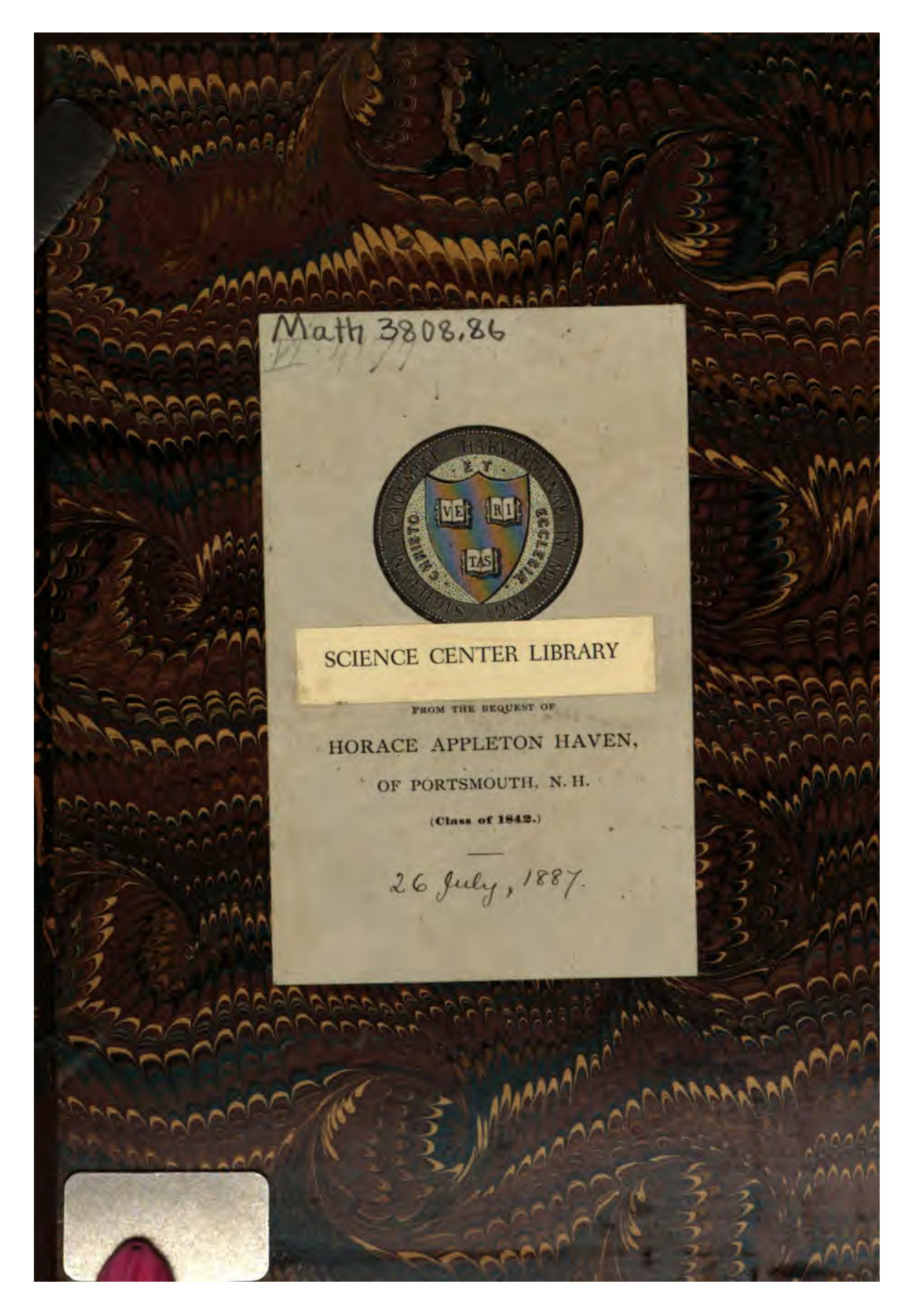
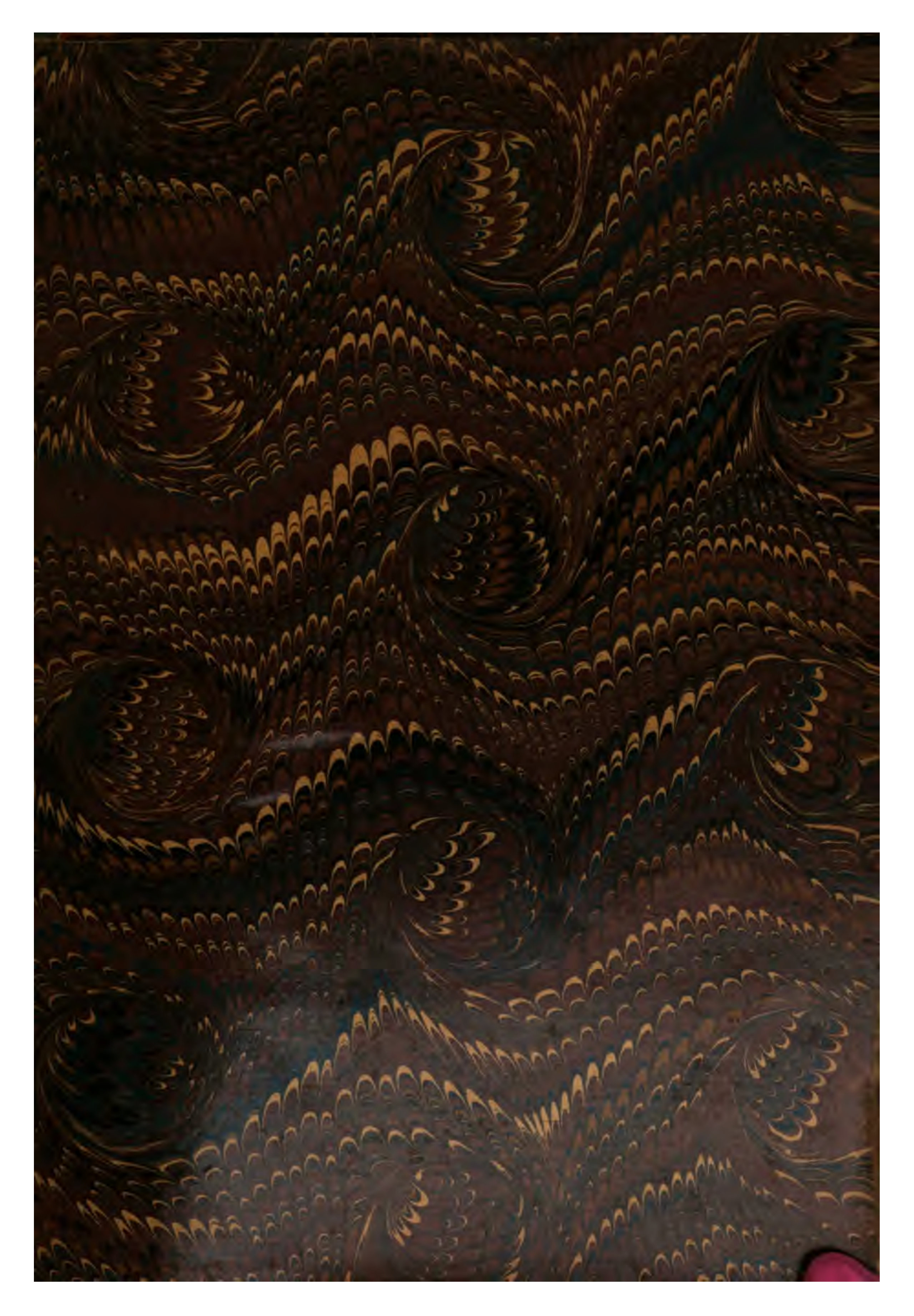



Math 3808.86
SCIENCE CENTER LIBRARY
FROM THE BEQUEST OF
HORACE APPLETON HAVEN,
OF PORTSMOUTH, N. H.
(Class of 1842.)
26 July, 1887.



DIE TRANSFORMATION

DER

HYPERELLIPTISCHEN FUNKTIONEN

ERSTER ORDNUNG.

NEBST ANWENDUNGEN.

VON

MARTIN KRAUSE,

PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT ZU ROSTOCK.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER

1886.

Vorwort.

Das nachfolgende Werk verdankt seine unmittelbare Entstehung den Vorlesungen, welche ich in mehreren Semestern an der hiesigen Universität über die hyperelliptischen Transcendenten gehalten habe. In ihm ist der Versuch gemacht worden, die Transformation der hyperelliptischen Funktionen erster Ordnung in elementarer und systematischer Weise zu entwickeln.

Als Einleitung und erster Teil wird eine kurze Theorie der Theta- resp. hyperelliptischen Funktionen zweier Veränderlichen auf Grund des Hermiteschen Transformationsprinzipes und im Anschlusse an einige Arbeiten der H. H. Weber, Prym, Krazer u. a. vorausgeschickt.

Der auf die Einleitung folgende zweite Teil enthält die Theorie der allgemeinen rationalen Transformation n^{ten} Grades nebst Anwendungen. Eine genauere Diskussion erfahren die Fälle, in denen n die Werte 1, 2, 3, 5 annimmt. Die Anwendungen beziehen sich auf die Lösung einer Reihe wichtiger Probleme. Dieselben können am besten aus dem Inhaltsverzeichnis ersehen werden.

Drittens wird dann der Versuch gemacht, die Transformationstheorie auf ein allgemeineres Fundament aufzubauen, als es bisher üblich war. Es geschieht dieses mit Hülfe der Thetafunktionen, deren Charakteristiken sich aus gebrochenen Zahlen zusammensetzen und auf Grund einiger allgemeiner Additionstheoreme zwischen Thetafunktionen mit verschiedenen Moduln.

Es enthält der soeben skizzierte zweite und dritte Teil, von der fundamentalen Arbeit von Herrn Hermite und einigen mit ihr zusammenhängenden Aufsätzen der H. H. Königsberger, Brioschi

u. a. abgesehen, eine Zusammenfassung und systematische Darstellung der Arbeiten, die ich auf dem Gebiete der hyperelliptischen Transcendenten in den letzten Jahren in verschiedenen Zeitschriften veröffentlicht habe. Einige Untersuchungen sind überdies als neue hinzugetreten.

Meinem Schüler, Herrn F. Rohde, spreche ich für hülfreiche Unterstützung bei der Korrektur meinen besten Dank aus.

Rostock, im August 1886.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichnis.

§ 1.*)

Einführung der fundamentalen Thetafunktion zweier Veränderlichen. Entwicklung der Haupteigenschaften derselben.

Als fundamentale Thetafunktion werde die doppelt unendliche Reihe zu Grunde gelegt:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_2} e^{\pi i [m_1 (m_1 \cdot \tau_{11} + m_2 \cdot \tau_{12}) + m_2 (m_1 \cdot \tau_{21} + m_2 \cdot \tau_{22})] + 2\pi i (m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2)}$$

oder auch, indem wir von vorneherein die Annahme hinzufügen, dafs

$$\tau_{12} = \tau_{21}$$

sei, die Reihe:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_2} e^{\pi i [m_1^2 \cdot \tau_{11} + 2 m_1 m_2 \cdot \tau_{12} + m_2^2 \cdot \tau_{22}] + 2\pi i (m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2)}.$$

Die Gröfsen v_1 und v_2 nennen wir die Argumente, die Gröfsen $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$ die Parameter oder Moduln der fundamentalen Thetafunktion. Wo ein Zweifel über die Werte der Parameter nicht möglich ist, bezeichnen wir die vorgelegte Funktion durch:

$$\vartheta_5(v_1, v_2) \quad \text{oder} \quad \vartheta_5(\!(v)\!),$$

im entgegengesetzten Falle durch:

$$\vartheta_5(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}) \quad \text{oder} \quad \vartheta_5(\!(v, \tau)\!).$$

Es soll zunächst untersucht werden, unter welchen Bedingungen die vorgelegte unendliche Reihe konvergiert.

Nehmen wir dazu erstens an, die unendliche Reihe sei konvergent.

---

*) In Bezug auf die allgemeine Theorie der Thetafunktionen zweier Veränderlichen möge vor allem verwiesen werden auf: Rosenhain: Mémoires des savans étrang. XI. 1851. Paris. Göpel: Crelle 35. Cayley: Philosophical Transactions. London 1881. Weber: Mathematische Annalen 14, Crelle 84. Forsyth: Philosophical Transactions. London 1883. Krazer: Theorie der zweifach unendlichen Thetareihen. Leipzig 1882.

Wir denken uns dann die Gröfsen $\tau_{\alpha\beta}$ in ihren reellen und imaginären Teil zerlegt, indem wir setzen:

$$\tau_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + i a'_{\alpha\beta}.$$

Dann wird der Ausdruck:

$$\pi i (m_1^2 \cdot \tau_{11} + 2 m_1 m_2 \cdot \tau_{12} + m_2^2 \cdot \tau_{22})$$

die Form $P + iQ$ annehmen, wobei:

$$P = m_1^2 \cdot a_{11} + 2 m_1 m_2 \cdot a_{12} + m_2^2 \cdot a_{22} = a_{11}\left(m_1 + m_2 \cdot \frac{a_{12}}{a_{11}}\right)^2 + \left(\frac{a_{22} \cdot a_{11} - a_{12}^2}{a_{11}}\right) m_2^2$$

ist. Die zweite Darstellung erlaubt dann unmittelbar den Schlufs, dafs im Falle der Konvergenz der unendlichen Reihe die beiden Gröfsen:

$$a_{11} \quad \text{und} \quad \frac{a_{22} \cdot a_{11} - a_{12}^2}{a_{11}}$$

das negative Vorzeichen besitzen müssen. Dieser Schlufs gilt für alle endlichen Werte der Argumente v_1 und v_2. Es gilt nun auch das umgekehrte. Wir beweisen zweitens, dafs die doppelt unendliche Reihe für alle Werte von v_1 und v_2 konvergiert, wenn die beiden Ausdrücke:

$$a_{11} \quad \text{und} \quad \frac{a_{22} \cdot a_{11} - a_{12}^2}{a_{11}}$$

das negative Vorzeichen besitzen.

In der That, bei der Entscheidung über die Konvergenz oder Divergenz der unendlichen Reihe können wir von den Gliedern e^{iQ} absehen, da deren absoluter Betrag der Einheit gleich ist. Wir können uns also auf die Betrachtung der Reihe:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} {}_{m_1} \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_{m_2} e^{P + 2\pi i (m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2)}$$

beschränken. Dabei war P in die Form gebracht worden:

$$P = a_{11}\left(m_1 + \frac{m_2 \cdot a_{12}}{a_{11}}\right)^2 + \left(\frac{a_{22} \cdot a_{11} - a_{12}^2}{a_{11}}\right) m_2^2.$$

Genau so können wir auch schreiben:

$$P = a_{22}\left(m_2 + \frac{m_1 \cdot a_{12}}{a_{22}}\right)^2 + \left(\frac{a_{22} \cdot a_{11} - a_{12}^2}{a_{22}}\right) m_1^2$$

oder also auch:

$$P = \frac{1}{2} a_{11}\left(m_1 + \frac{m_2 \cdot a_{12}}{a_{11}}\right)^2 + \frac{1}{2} a_{22}\left(m_2 + \frac{m_1 \cdot a_{12}}{a_{22}}\right)^2$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{a_{22} \cdot a_{11} - a_{12}^2}{a_{11}}\right) m_2^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{a_{22} \cdot a_{11} - a_{12}^2}{a_{22}}\right) m_1^2$$

Ist nun x eine negative reelle Gröfse, so ist e^x positiv und kleiner als 1. Daraus folgt, dafs die ursprüngliche Reihe sicher konvergieren wird, wenn die Reihe konvergiert:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_2} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{a_{22}\cdot a_{11}-a_{12}^2}{a_{11}}\right)m_2^2+\frac{1}{2}\left(\frac{a_{22}\cdot a_{11}-a_{12}^2}{a_{22}}\right)m_1^2+2\pi i(m_1\cdot v_1+m_2\cdot v_2)}$$

oder also, wenn das Produkt konvergiert:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_1} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{a_{22}\cdot a_{11}-a_{12}^2}{a_{22}}\right)m_1^2+2\pi i m_1\cdot v_1} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_2} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{a_{22}\cdot a_{11}-a_{12}^2}{a_{11}}\right)m_2^2+2\pi i m_2\cdot v_2}.$$

Dieses Produkt wird konvergieren, wenn ein jeder der Faktoren konvergiert. Setzen wir

$$e^{\frac{1}{2}\left(\frac{a_{22}\cdot a_{11}-a_{12}^2}{a_{22}}\right)} = p,$$

so hat das erste Glied die Form

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_1} p^{m_1^2}\cdot e^{2\pi i m_1\cdot v_1},$$

ist also, da p positiv und kleiner als 1 ist, eine für einen jeden endlichen Wert von v_1 konvergierende unendliche Reihe und zwar ist die Konvergenz eine unbedingte.

Das analoge gilt von dem zweiten Faktor. Hieraus folgt der

Lehrsatz.

Setzt man

$$\tau_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + i a'_{\alpha\beta},$$

so lautet die hinreichende und notwendige Bedingung für die Konvergenz der unendlichen Reihe, welche die fundamentale Thetafunktion definiert: es müssen die beiden reellen Gröfsen a_{11} und $\frac{a_{22}\cdot a_{11}-a_{12}^2}{a_{11}}$ oder auch a_{22} und $\frac{a_{22}\cdot a_{11}-a_{12}^2}{a_{22}}$ negative Gröfsen sein. Die Konvergenz ist dabei eine unbedingte und findet für alle endlichen Werte der Argumente v_1 und v_2 statt.

Wir nehmen in der Folge an, dafs die Parameter $\tau_{\alpha\beta}$ den aufgestellten Konvergenzbedingungen Genüge leisten.

Aus der Definitionsgleichung der fundamentalen Thetafunktion folgen leicht eine Reihe von Eigenschaften derselben.

I. Es finden die Beziehungen statt:

$$(1)\quad \begin{aligned} \vartheta_5(v_1+1, v_2) &= \vartheta_5(v_1, v_2),\\ \vartheta_5(v_1, v_2+1) &= \vartheta_5(v_1, v_2),\\ \vartheta_5(v_1+\tau_{11}, v_2+\tau_{12}) &= e^{-\pi i(2v_1+\tau_{11})}\cdot\vartheta_5(v_1, v_2),\\ \vartheta_5(v_1+\tau_{12}, v_2+\tau_{22}) &= e^{-\pi i(2v_2+\tau_{22})}\cdot\vartheta_5(v_1, v_2). \end{aligned}$$

Die Richtigkeit der ersten beiden Gleichungen folgt unmittelbar, die der dritten, wenn wir schreiben:

$$\vartheta_5(v_1, v_2) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{m_1}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{m_2} e^{\pi i((m_1+1)^2\tau_{11}+2(m_1+1)m_2\cdot\tau_{12}+m_2^2\cdot\tau_{22})+2\pi i((m_1+1)v_1+m_2\cdot v_2)}$$

und analog die der vierten Gleichung.

II. Die Thetafunktion ist eine gerade Funktion ihrer Argumente d. h. es findet die Beziehung statt:

$$(2)\qquad \vartheta_5(-v_1, -v_2) = \vartheta_5(v_1, v_2).$$

III) Die Thetafunktion leistet den drei Differentialgleichungen Genüge:

$$(3)\quad \frac{\partial^2\vartheta_5(v_1, v_2)}{\partial v_\varepsilon^2} = 4\pi i\cdot\frac{\partial\vartheta_5(v_1, v_2)}{\partial\tau_{\varepsilon\varepsilon}},\quad \frac{\partial^2\vartheta_5(v_1, v_2)}{\partial v_1\cdot\partial v_2} = 2\pi i\cdot\frac{\partial\vartheta_5(v_1, v_2)}{\partial\tau_{12}}.$$
$$\varepsilon = 1, 2.$$

Für alle endlichen Werte von v_1 und v_2 hat die Funktion den Charakter einer ganzen Funktion. Eine jede Funktion nun, die den Bedingungsgleichungen (1) und (3) Genüge leistet und für alle endlichen Werte von v_1 und v_2 den Charakter einer ganzen Funktion besitzt, kann sich von der fundamentalen Thetafunktion nur um eine Gröſse unterscheiden, die unabhängig von den Argumenten v_1 und v_2 und den Parametern τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} ist.

In der That, da die vorgelegte Funktion sich nicht ändern soll, wenn die Argumente um ganze Zahlen vermehrt werden, so folgt leicht, daſs sie sich in die Form bringen läſst:

$$(4)\qquad f(v_1, v_2) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{m_1}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{m_2} c_{m_1 m_2}\cdot e^{2\pi i(m_1\cdot v_1+m_2\cdot v_2)}.$$

Die Bedingung:

$$f(v_1+\tau_{11}, v_2+\tau_{12}) = e^{-\pi i(2v_1+\tau_{11})}\cdot f(v_1, v_2)$$

ergiebt die Gleichung:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{m_1}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{m_2} c_{m_1 m_2}\cdot e^{2\pi i(m_1\cdot v_1+m_2\cdot v_2+m_1\cdot\tau_{11}+m_2\cdot\tau_{12})}$$
$$= e^{-\pi i(2v_1+\tau_{11})}\cdot\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{m_1}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{m_2} c_{m_1 m_2}\cdot e^{2\pi i(m_1\cdot v_1+m_2\cdot v_2)}.$$

Multiplizieren wir beide Seiten mit

$$e^{\pi i(2v_1+\tau_{11})}$$

und setzen auf der linken an Stelle von m_1: $m_1 - 1$, so folgt durch Vergleichung die Relation:

$$c_{m_1-1\, m_2} \cdot e^{\pi i[(2m_1-1)\tau_{11}+2m_2\cdot\tau_{12}]} = c_{m_1 m_2},$$

mithin:

$$c_{m_1 m_2} = e^{\pi i(m_1^2\cdot\tau_{11}+2m_1 m_2\cdot\tau_{12})} \cdot c_{0\, m_2}.$$

Mit Hülfe der Bedingungsgleichung:

$$f(v_1+\tau_{12},\ v_2+\tau_{22}) = e^{-\pi i(2v_2+\tau_{22})} \cdot f(v_1, v_2)$$

ergiebt sich dann analog:

$$c_{m_1 m_2} = e^{\pi i(m_1^2\cdot\tau_{11}+2m_1 m_2\cdot\tau_{12}+m_2^2\cdot\tau_{22})} \cdot c_{00}.$$

Mithin ergiebt sich für $f(v_1, v_2)$ die Form:

$$(5)\quad f(v_1, v_2) = c_{00} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_2} e^{\pi i(m_1^2\cdot\tau_{11}+2m_1 m_2\cdot\tau_{12}+m_2^2\cdot\tau_{22})+2\pi i(m_1\cdot v_1+m_2\cdot v_2)}$$

oder also:

$$(6)\qquad f(v_1, v_2) = c_{00} \cdot \vartheta_5(v_1, v_2).$$

Die Konstante c_{00} kann noch von den Parametern $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$ abhängen.

Vermöge der dritten Bedingung aber findet die Gleichung statt:

$$\frac{\partial^2 f(v_1, v_2)}{\partial v_1^2} = 4\pi i \cdot \frac{\partial f(v_1, v_2)}{\partial \tau_{11}}$$

oder also:

$$c_{00} \cdot \frac{\partial^2 \vartheta_5(v_1, v_2)}{\partial v_1^2} = 4\pi i \left(\frac{\partial c_{00}}{\partial \tau_{11}} \cdot \vartheta_5(v_1, v_2) + c_{00} \cdot \frac{\partial \vartheta_5(v_1, v_2)}{\partial \tau_{11}}\right).$$

Mithin ergiebt sich das Resultat

$$\frac{\partial c_{00}}{\partial \tau_{11}} = 0.$$

Die Gröfse c_{00} mufs unabhängig von τ_{11} sein. Genau das analoge würde sich für die Parameter τ_{12}, τ_{22} ergeben, womit der Satz bewiesen ist.

§ 2.*)

Definition der Thetafunktionen mit beliebiger Charakteristik. Entwicklung der elementaren Relationen unter denselben.

Aus den Eigenschaften, die wir im vorigen Paragraphen entwickelt haben, folgt, dafs, wenn g_1, g_2, h_1, h_2 beliebige ganze Zahlen

*) In Bezug auf die Thetafunktionen mit beliebiger Charakteristik werde vor allem auf die Arbeiten der Herren Prym und Krazer im dritten Bande der Acta mathematica verwiesen.

bedeuten, die Relation besteht:

$$\vartheta_5(v_1, v_2) = \varepsilon \cdot \vartheta_5(v_1 + g_1 \cdot \tau_{11} + g_2 \cdot \tau_{12} + h_1,\ v_2 + g_1 \cdot \tau_{12} + g_2 \cdot \tau_{22} + h_2),$$

wobei gesetzt ist:

$$\varepsilon = e^{\pi i [g_1(2v_1 + g_1 \cdot \tau_{11} + g_2 \cdot \tau_{12} + 2h_1) + g_2(2v_2 + g_1 \cdot \tau_{12} + g_2 \cdot \tau_{22} + 2h_2)]}.$$

Lassen wir die Bedingung fallen, dafs g_1, g_2, h_1, h_2 ganze Zahlen sind, nehmen vielmehr an, dafs sie ganz willkürlich gewählte Gröfsen bedeuten können, so hört die obige Gleichung auf richtig zu sein und es definiert die rechte Seite eine neue Funktion, die wir, wo kein Zweifel über die Parameter τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} vorhanden ist, bezeichnen wollen durch:

$$\vartheta \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} (v_1, v_2) \quad \text{oder auch} \quad \vartheta \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} (\!(v)\!).$$

Wo jedoch die Parameter besonders hervorgehoben werden sollen, bezeichnen wir sie durch

$$\vartheta \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} (v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}) \quad \text{oder auch} \quad \vartheta \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} (\!(v, \tau)\!).$$

Das Symbol $\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix}$ wird die Charakteristik der vorhin definierten Funktion, die wir auch mit dem Namen einer Thetafunktion bezeichnen wollen, genannt. Wo kein Mifsverständnis zu befürchten ist, soll sie abgekürzt durch $\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$ bezeichnet werden.

Für diese allgemeineren Thetafunktionen finden dann, wie leicht nachzuweisen ist, die Beziehungen statt:

$$(1) \quad \begin{aligned} \vartheta \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} (v_1 + 1, v_2) &= e^{2g_1 \cdot \pi i} \cdot \vartheta \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} (\!(v)\!), \\ \vartheta \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} (v_1, v_2 + 1) &= e^{2g_2 \cdot \pi i} \cdot \vartheta \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} (\!(v)\!), \\ \vartheta \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} (v_1 + \tau_{11}, v_2 + \tau_{12}) &= e^{-2h_1 \cdot \pi i} \cdot \vartheta \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} (\!(v)\!) \cdot e^{-\pi i(2v_1 + \tau_{11})}, \\ \vartheta \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} (v_1 + \tau_{12}, v_2 + \tau_{22}) &= e^{-2h_2 \cdot \pi i} \cdot \vartheta \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} (\!(v)\!) \cdot e^{-\pi i(2v_2 + \tau_{22})}. \end{aligned}$$

Für alle endlichen Werte von v_1 und v_2 besitzt die Thetafunktion den Charakter einer ganzen Funktion. Eine jede andere Funktion derselben Art, welche den vier soeben entwickelten Relationen Ge-

nüge leistet, unterscheidet sich von der Thetafunktion nur um eine von den Argumenten v_1 und v_2 unabhängige Gröfse.

Ferner finden auch in diesem Falle die Gleichungen statt:

$$(2)\quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \vartheta \begin{bmatrix} g_1 g_2 \\ h_1 h_2 \end{bmatrix} (v_1, v_2)}{\partial v_s^2} &= 4\pi i \cdot \frac{\partial \vartheta \begin{bmatrix} g_1 g_2 \\ h_1 h_2 \end{bmatrix} (v_1, v_2)}{\partial \tau_{ss}}, \qquad s=1, 2. \\ \frac{\partial^2 \vartheta \begin{bmatrix} g_1 g_2 \\ h_1 h_2 \end{bmatrix} (v_1, v_2)}{\partial v_1 \cdot \partial v_2} &= 2\pi i \cdot \frac{\partial \vartheta \begin{bmatrix} g_1 g_2 \\ h_1 h_2 \end{bmatrix} (v_1, v_2)}{\partial \tau_{12}}. \end{aligned}$$

Eine jede Funktion der vorhin definierten Art, welche überdies den soeben entwickelten Differentialgleichungen Genüge leistet, kann sich von der Thetafunktion nur um eine Gröfse unterscheiden, welche von den Argumenten v_1 und v_2 und den Parametern τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} unabhängig ist.

Ganz analog folgen die Beziehungen:

$$\vartheta \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} (v_1 + g_1' \cdot \tau_{11} + g_2' \cdot \tau_{12} + h_1', \; v_2 + g_1' \cdot \tau_{21} + g_2' \cdot \tau_{22} + h_2')$$

$$= e^{-\pi i \omega} \cdot \vartheta \begin{bmatrix} g + g' \\ h + h' \end{bmatrix} ((v)),$$

$$(3)\quad \begin{aligned} \omega = g_1'(2v_1 + g_1' \cdot \tau_{11} + g_2' \cdot \tau_{12} + 2h_1 + 2h_1') \\ + g_2'(2v_2 + g_1' \cdot \tau_{21} + g_2' \cdot \tau_{22} + 2h_2 + 2h_2'), \end{aligned}$$

$$\vartheta \begin{bmatrix} g_1 + 1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} ((v)) = \vartheta \begin{bmatrix} g_1 & g_2 + 1 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} ((v)) = \vartheta \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} ((v)),$$

$$\vartheta \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 + 1 & h_2 \end{bmatrix} ((v)) = e^{2 g_1 \pi i} \cdot \vartheta \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} ((v)),$$

$$\vartheta \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 + 1 \end{bmatrix} ((v)) = e^{2 g_2 \pi i} \cdot \vartheta \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} ((v)).$$

§ 3.*)

Betrachtung der Thetafunktionen, deren Charakteristiken sich aus halben ganzen Zahlen zusammensetzen lassen. Entwicklung der einfachsten Beziehungen zwischen denselben.

Wir wollen jetzt den speziellen Fall in Betracht ziehen, dafs die vier Gröfsen g_1, g_2, h_1, h_2 die Hälften ganzer Zahlen sind. Wir wollen uns dann an ihrer Stelle die vier Gröfsen $\frac{g_1}{2}$, $\frac{g_2}{2}$, $\frac{h_1}{2}$, $\frac{h_2}{2}$

*) cf. Koenigsberger: Crelle 64.

gesetzt denken, wo jetzt unter g_1, g_2, h_1, h_2 ganze Zahlen zu verstehen sind, wir wollen ferner den Nenner 2, welcher in den einzelnen Gliedern der Charakteristik auftritt, unterdrücken, d. h. wir wollen jetzt, so lange kein Mifsverständnis zu befürchten ist, setzen:

$$(1)\quad \vartheta\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix}((v)) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_2}\, e^{\pi i\left(\left(m_1+\frac{g_1}{2}\right)^2\tau_{11}+2\left(m_1+\frac{g_1}{2}\right)\left(m_2+\frac{g_2}{2}\right)\tau_{12}+\left(m_2+\frac{g_2}{2}\right)^2\tau_{22}\right)+\pi i\left(\left(m_1+\frac{g_1}{2}\right)(2v_1+h_1)+\left(m_2+\frac{g_2}{2}\right)(2v_2+h_2)\right)}.$$

Dabei soll von jetzt an, so lange nichts anderes bemerkt wird, dies neue Symbol

$$\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix}$$

mit dem Namen der Charakteristik bezeichnet werden.

Dann ist klar, dafs vom Vorzeichen abgesehen, nur sechszehn von einander verschiedene Thetafunktionen existieren können, die wir erhalten, wenn an Stelle der Zahlen g, h die Zahlen 0 und 1 gesetzt werden. Die auf diese Weise definierten Funktionen werden auf mannigfache Weise bezeichnet. Die soeben eingeführte Bezeichnungsweise möge kurz als die Webersche bezeichnet werden. Wir stellen dieselbe mit den Bezeichnungsweisen von Rosenhain, Göpel, Hermite*) und Weierstrass**) zusammen:

Rosenhain.	Göpel.	Hermite.	Weierstrass.	Weber.
φ_{33}	P'''	ϑ_{0000}	ϑ_5	$\vartheta\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
φ_{23}	Q'''	ϑ_{1000}	ϑ_{01}	$\vartheta\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
φ_{32}	R'''	ϑ_{0100}	ϑ_4	$\vartheta\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
φ_{22}	S'''	ϑ_{1100}	ϑ_{23}	$\vartheta\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
φ_{00}	P	ϑ_{0011}	ϑ_0	$\vartheta\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
φ_{01}	iR	ϑ_{0111}	$i\vartheta_{04}$	$-i\vartheta\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

*) Comptes rendus des séances de l'Academie des sciences 1855.

**) Crelle 64.

Rosenhain.	Göpel.	Hermite.	Weierstrass.	Weber.
φ_{10}	iQ	ϑ_{1011}	$i\vartheta_1$	$-i\vartheta\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$
φ_{11}	S	ϑ_{1111}	$-\vartheta_{14}$	$-\vartheta\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$
φ_{03}	P''	ϑ_{0001}	ϑ_{12}	$\vartheta\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$
φ_{02}	R''	ϑ_{0101}	ϑ_{03}	$\vartheta\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$
φ_{13}	iQ''	ϑ_{1001}	$i\vartheta_{02}$	$-i\vartheta\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}$
φ_{12}	iS''	ϑ_{1101}	$i\vartheta_{13}$	$-i\vartheta\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$
φ_{30}	P'	ϑ_{0010}	ϑ_{34}	$\vartheta\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$
φ_{31}	iR'	ϑ_{0110}	$i\vartheta_3$	$-i\vartheta\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}$
φ_{20}	Q'	ϑ_{1010}	ϑ_2	$\vartheta\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$
φ_{21}	iS'	ϑ_{1110}	$i\vartheta_{24}$	$-i\vartheta\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$

Im folgenden soll von den beiden Bezeichnungsweisen von Weierstrass und Weber Gebrauch gemacht werden, je nachdem im speziellen Falle sich die eine oder die andere empfiehlt.

Wie aus der allgemeinen Formel, welche die 16 Thetafunktionen definiert, unmittelbar hervorgeht, können die ursprünglichen Reihen durch Fouriersche ersetzt werden. Dieselben mögen hier Platz finden, da ihre Kenntnis sich in vielen Fällen als notwendig zeigt. Wir setzen dazu:

$$
(2)\qquad \begin{aligned}
\vartheta_3(v,\ \tau) &= 1 + 2\sum_1^\infty{}_n\, q^{n^2}\cdot\cos 2n\pi,\\
\vartheta_0(v,\ \tau) &= 1 + 2\sum_1^\infty{}_n\, (-1)^n\cdot q^{n^2}\cdot\cos 2n\pi,
\end{aligned}
$$

(2)
$$\vartheta_2(v,\tau) = \quad 2\sum_1^\infty {}^n q^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2}\cdot\cos(2n-1)\pi,$$
$$\vartheta_1(v,\tau) = -2\sum_1^\infty {}^n (-1)^n\cdot q^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2}\cdot\sin(2n-1)\pi.$$

Dann ergeben sich folgende Ausdrücke, wenn gesetzt wird:

(3)
$$p = e^{\pi i\tau_{11}},\quad q = e^{\pi i\tau_{12}},\quad r = e^{\pi i\tau_{22}}:$$

(4) $\vartheta_5((v)) + 1 - \vartheta_3(v_1, \tau_{11}) - \vartheta_3(v_2, \tau_{22})$
$$= 2\sum_1^\infty {}^{n_1}\sum_1^\infty {}^{n_2} p^{n_1^2}\cdot r^{n_2^2}\cdot g_5,$$
$$g_5 = q^{2n_1n_2}\cdot\cos 2\pi(n_1\cdot v_1 + n_2\cdot v_2)$$
$$+ q^{-2n_1n_2}\cdot\cos 2\pi(n_1\cdot v_1 - n_2\cdot v_2),$$

(5) $\vartheta_{01}((v)) - \vartheta_2(v_1, \tau_{11})$
$$= 2\sum_0^\infty {}^{n_1}\sum_1^\infty {}^{n_2} p^{\left(n_1+\frac{1}{2}\right)^2} r^{n_2^2}\cdot g_{01},$$
$$g_{01} = q^{(2n_1+1)n_2}\cdot\cos\pi((2n_1+1)v_1 + 2n_2\cdot v_2)$$
$$+ q^{-(2n_1+1)n_2}\cdot\cos\pi((2n_1+1)v_1 - 2n_2\cdot v_2),$$

(6) $\vartheta_4((v)) - \vartheta_2(v_2, \tau_{22})$
$$= 2\sum_1^\infty {}^{n_1}\sum_0^\infty {}^{n_2} p^{n_1^2}\cdot r^{\left(n_2+\frac{1}{2}\right)^2}\cdot g_4,$$
$$g_4 = q^{n_1(2n_2+1)}\cdot\cos\pi(2n_1\cdot v_1 + (2n_2+1)v_2)$$
$$+ q^{-n_1(2n_2+1)}\cdot\cos\pi(2n_1\cdot v_1 - (2n_2+1)v_2),$$

(7) $\vartheta_{23}((v))$
$$= 2\sum_0^\infty {}^{n_1}\sum_0^\infty {}^{n_2} p^{\left(n_1+\frac{1}{2}\right)^2}\cdot r^{\left(n_2+\frac{1}{2}\right)^2}\cdot g_{23},$$
$$g_{23} = q^{2\left(n_1+\frac{1}{2}\right)\left(n_2+\frac{1}{2}\right)}\cdot\cos\pi((2n_1+1)v_1+(2n_2+1)v_2)$$
$$+ q^{-2\left(n_1+\frac{1}{2}\right)\left(n_2+\frac{1}{2}\right)}\cdot\cos\pi((2n_1+1)v_1-(2n_2+1)v_2),$$

(8) $\vartheta_0((v)) + 1 - \vartheta_0(v_1, \tau_{11}) - \vartheta_0(v_2, \tau_{22})$

$$= 2 \sum_1^\infty{}^{n_1} \sum_1^\infty{}^{n_2} (-1)^{n_1+n_2} \cdot p^{n_1^2} \cdot r^{n_2^2} \cdot g_0,$$

$$g_0 = q^{2n_1n_2} \cdot \cos 2\pi(n_1 \cdot v_1 + n_2 \cdot v_2) + q^{-2n_1n_2} \cdot \cos 2\pi(n_1 \cdot v_1 - n_2 \cdot v_2),$$

(9) $\vartheta_{04}((v)) - \vartheta_1(v_2, \tau_{22})$

$$= 2 \sum_1^\infty{}^{n_1} \sum_0^\infty{}^{n_2} (n-1)^{n_1+n_2} \cdot p^{n_1^2} \cdot r^{\left(n_2+\frac{1}{2}\right)^2} \cdot g_{04},$$

$$g_{04} = q^{n_1(2n_2+1)} \cdot \sin \pi\,(2n_1 \cdot v_1 + (2n_2+1)v_2) - q^{-n_1(2n_2+1)} \cdot \sin \pi\,(2n_1 \cdot v_1 - (2n_2+1)v_2),$$

(10) $\vartheta_1((v)) - \vartheta_1(v_1, \tau_{11})$

$$= 2 \sum_0{}^{n_1} \sum_1^\infty{}^{n_2} (-1)^{n_1+n_2} \cdot p^{\left(n_1+\frac{1}{2}\right)^2} \cdot r^{n_2^2} \cdot g_1,$$

$$g_1 = q^{(2n_1+1)n_2} \cdot \sin \pi\,((2n_1+1)v_1 + 2n_2 \cdot v_2) + q^{-(2n_1+1)n_2} \cdot \sin \pi\,((2n_1+1)v_1 - 2n_2 \cdot v_2),$$

(11) $\vartheta_{14}((v))$

$$= 2 \sum_0^\infty{}^{n_1} \sum_0^\infty{}^{n_2} (-1)^{n_1+n_2} \cdot p^{\left(n_1+\frac{1}{2}\right)^2} \cdot r^{\left(n_2+\frac{1}{2}\right)^2} \cdot g_{14},$$

$$g_{14} = q^{2\left(n_1+\frac{1}{2}\right)\left(n_2+\frac{1}{2}\right)} \cdot \cos \pi\,(2n_1+1)v_1 + (2n_2+1)v_2) - q^{-2\left(n_1+\frac{1}{2}\right)\left(n_2+\frac{1}{2}\right)} \cdot \cos \pi\,((2n_1+1)v_1 - (2n_2+1)v_2),$$

(12) $\vartheta_{12}((v)) + 1 - \vartheta_0(v_1, \tau_{11}) - \vartheta_3(v_2, \tau_{22})$

$$= 2 \sum_1^\infty{}^{n_1} \sum_1^\infty{}^{n_2} (-1)^{n_1} \cdot p^{n_1^2} \cdot r^{n_2^2} \cdot g_{12},$$

$$g_{12} = q^{2n_1n_2} \cdot \cos 2\pi\,(n_1 \cdot v_1 + n_2 \cdot v_2) + q^{-2n_1n_2} \cdot \cos 2\pi\,(n_1 \cdot v_1 - n_2 \cdot v_2),$$

(13) $\vartheta_{03}(\!(v)\!) - \vartheta_2(v_2, \tau_{22})$

$$= 2\sum_1^\infty{}^{n_1}\sum_0^\infty{}^{n_2}(-1)^{n_1}\cdot p^{n_1^2}\cdot r^{\left(n_2+\frac{1}{2}\right)^2}\cdot g_{03},$$

$$g_{03} = q^{n_1(2n_2+1)}\cdot\cos\pi(2n_1\cdot v_1 + (2n_2+1)v_2) + q^{-n_1(2n_2+1)}\cos\pi(2n_1\cdot v_1 - (2n_2+1)v_2),$$

(14) $\vartheta_{02}(\!(v)\!) - \vartheta_1(v_1, \tau_{11})$

$$= 2\sum_0^\infty{}^{n_1}\sum_1^\infty{}^{n_2}(-1)^{n_1}\cdot p^{\left(n_1+\frac{1}{2}\right)^2}\cdot r^{n_2^2}\cdot g_{02},$$

$$g_{02} = q^{(2n_1+1)n_2}\cdot\sin\pi((2n_1+1)v_1 + 2n_2\cdot v_2) + q^{-(2n_1+1)n_2}\cdot\sin\pi((2n_1+1)v_1 - 2n_2\cdot v_2),$$

(15) $\vartheta_{13}(\!(v)\!)$

$$= 2\sum_0^\infty{}^{n_1}\sum_0^\infty{}^{n_2}(-1)^{n_1}\cdot p^{\left(n_1+\frac{1}{2}\right)^2}\cdot r^{\left(n_2+\frac{1}{2}\right)^2}\cdot g_{13},$$

$$g_{13} = q^{2\left(n_1+\frac{1}{2}\right)\left(n_2+\frac{1}{2}\right)}\cdot\sin\pi((2n_1+1)v_1 + (2n_2+1)v_2) + q^{-2\left(n_1+\frac{1}{2}\right)\left(n_2+\frac{1}{2}\right)}\cdot\sin\pi((2n_1+1)v_1 - (2n_2+1)v_2),$$

(16) $\vartheta_{34}(\!(v)\!) + 1 - \vartheta_3(v_1, \tau_{11}) - \vartheta_0(v_2, \tau_{22})$

$$= 2\sum_1^\infty{}^{n_1}\sum_1^\infty{}^{n_2}(-1)^{n_2}\cdot p^{n_1^2}\cdot r^{n_2^2}\cdot g_{34},$$

$$g_{34} = q^{2n_1n_2}\cdot\cos 2\pi(n_1\cdot v_1 + n_2\cdot v_2) + q^{-2n_1n_2}\cdot\cos 2\pi(n_1\cdot v_1 - n_2\cdot v_2),$$

(17) $\vartheta_3(\!(v)\!) - \vartheta_1(v_2, \tau_{22})$

$$= 2\sum_1^\infty{}^{n_1}\sum_0^\infty{}^{n_2}(-1)^{n_2}\cdot p^{n_1^2}\cdot r^{\left(n_2+\frac{1}{2}\right)^2}\cdot g_3,$$

$$g_3 = q^{n_1(2n_2+1)}\cdot\sin\pi(2n_1\cdot v_1 + (2n_2+1)v_2) - q^{-n_1(2n_2+1)}\cdot\sin\pi(2n_1\cdot v_1 - (2n_2+1)v_2),$$

(18) $\vartheta_2((v)) - \vartheta_2(v_1, \tau_{11})$

$$= 2\sum_0^\infty{}^{n_1}\sum_1^\infty{}^{n_2}(-1)^{n_2}\cdot p^{\left(n_1+\frac{1}{2}\right)^2}\cdot r^{n_2^2}\cdot g_2,$$

$$g_2 = q^{(2n_1+1)n_2}\cdot\cos\pi\left((2n_1+1)v_1 + 2n_2\cdot v_2\right)$$
$$+ q^{-(2n_1+1)n_2}\cdot\cos\pi\left((2n_1+1)v_1 - 2n_2\cdot v_2\right),$$

(19) $\vartheta_{24}((v))$

$$= 2\sum_0^\infty{}^{n_1}\sum_0^\infty{}^{n_2}(-1)^{n_2}\cdot p^{\left(n_1+\frac{1}{2}\right)^2}\cdot r^{\left(n_2+\frac{1}{2}\right)^2}\cdot g_{24},$$

$$g_{24} = q^{2\left(n_1+\frac{1}{2}\right)\left(n_2+\frac{1}{2}\right)}\cdot\sin\pi\left((2n_1+1)v_1 + (2n_2+1)v_2\right)$$
$$- q^{-2\left(n_1+\frac{1}{2}\right)\left(n_2+\frac{1}{2}\right)}\cdot\sin\pi\left((2n_1+1)v_1 - (2n_2+1)v_2\right).$$

Die fundamentalen Eigenschaften der eingeführten 16 Thetafunktionen sind in den Formeln des vorigen Paragraphen enthalten. Von besonderer Bedeutung ist die Formel, die sich bei der Substitution halber Perioden ergiebt und die wieder aufgenommen werden möge:

$$\vartheta\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}\left(v_1 + \frac{g_1'}{2}\cdot\tau_{11} + \frac{g_2'}{2}\cdot\tau_{12} + \frac{h_1'}{2},\ v_2 + \frac{g_1'}{2}\cdot\tau_{12} + \frac{g_2'}{2}\cdot\tau_{22} + \frac{h_2'}{2}\right)$$

(20)
$$= e^{-\pi i\omega}\ \vartheta\begin{bmatrix}g+g'\\h+h'\end{bmatrix}((v)),$$

$$\omega = \frac{g_1'}{2}\left(2v_1 + \frac{g_1'}{2}\cdot\tau_{11} + \frac{g_2'}{2}\cdot\tau_{12} + h_1 + h_1'\right)$$
$$+ \frac{g_2'}{2}\left(2v_2 + \frac{g_1'}{2}\cdot\tau_{21} + \frac{g_2'}{2}\cdot\tau_{22} + h_2 + h_2'\right).$$

Sehen wir von dem allgemeinen Exponentialfaktor ab, welcher allen Thetafunktionen gemeinsam ist, so ergiebt sich hieraus unter Anwendung der Weierstrassischen Bezeichnungsweise die Tabelle:

5	0	1	2	3	4	01	02	03	04	12	13	14	23	24	34
5	0	1	2	3	4	01	02	03	04	12	13	14	23	24	34
0	5	— 01	02	— 03	04	1	— 2	3	— 4	34	— 24	23	14	— 13	12
$i.\ 1$	01	— 5	$i.12$	$-i.13$	$i.14$	$i.\ 0$	— 34	24	— 23	2	— 3	4	$i.04$	$-i.03$	$i.02$
2	$i.02$	$i.12$	5	— 23	24	34	$i.\ 0$	$i.14$	$-i.13$	$i.\ 1$	$i.04$	$-i.03$	3	— 4	01
$i.\ 3$	03	13	23	— 5	$i.34$	$i.24$	$i.14$	$i.\ 0$	— 12	$i.04$	$i.\ 1$	— 02	$i.\ 2$	— 01	4
4	$i.04$	$i.14$	$i.24$	$i.34$	5	23	13	12	$i.\ 0$	03	02	$i.\ 1$	01	$i.\ 2$	$i.\ 3$
01	$i.\ 1$	$i.\ 0$	34	24	23	5	$i.12$	$i.13$	$i.14$	$i.02$	$i.03$	$i.04$	4	3	2
$i.02$	2	— 34	$i.\ 0$	$i.14$	$i.13$	$i.12$	— 5	23	24	01	— 4	— 3	$i.03$	$i.04$	$i.\ 1$
03	$i.\ 3$	$-i.24$	$i.14$	$i.\ 0$	12	13	— 23	5	$i.34$	4	— 01	$-i.\ 2$	02	$i.\ 1$	$i.04$
$i.04$	4	— 23	13	— 12	$i.\ 0$	$i.14$	$-i.24$	$i.34$	— 5	$i.\ 3$	$-i.\ 2$	01	$i.\ 1$	— 02	03
12	34	— 2	1	04	03	02	— 01	4	3	5	— 23	— 24	13	14	0
$i.13$	$i.24$	$-i.\ 3$	— 04	— 1	$i.02$	$i.03$	— 4	01	$i.\ 2$	23	— 5	$-i.34$	$i.12$	— 0	— 14
— 14	23	— 4	$i.03$	$-i.02$	— 1	— 04	$i.\ 3$	$i.\ 2$	— 01	$i.24$	$-i.34$	5	— 0	$-i.12$	$i.13$
23	— 14	— 04	$i.\ 3$	$i.\ 2$	01	4	$i.03$	$i.02$	— 1	$i.13$	$i.12$	— 0	5	$i.34$	$i.24$
$i.24$	$i.13$	$i.03$	4	— 01	$i.\ 2$	$i.\ 3$	— 04	— 1	$-i.02$	— 14	— 0	$-i.12$	$i.34$	— 5	23
34	12	02	01	— 4	3	2	1	04	— 03	0	14	— 13	24	— 23	5

Endlich mögen noch folgende Relationen aufgestellt werden.

Setzt man:

$$\begin{aligned} a &= \vartheta_5\,(2v_1,\ 2v_2,\ 4\tau_{11},\ 4\tau_{12},\ 4\tau_{22}),\\ b &= \vartheta_{01}(2v_1,\ 2v_2,\ 4\tau_{11},\ 4\tau_{12},\ 4\tau_{22}),\\ c &= \vartheta_4\,(2v_1,\ 2v_2,\ 4\tau_{11},\ 4\tau_{12},\ 4\tau_{22}),\\ d &= \vartheta_{23}(2v_1,\ 2v_2,\ 4\tau_{11},\ 4\tau_{12},\ 4\tau_{22}), \end{aligned}$$

so wird:

$$\begin{aligned} \vartheta_5\,(v_1,\ v_2,\ \tau_{11},\ \tau_{12},\ \tau_{22}) &= a+b+c+d,\\ \vartheta_{34}(v_1,\ v_2,\ \tau_{11},\ \tau_{12},\ \tau_{22}) &= a+b-c-d,\\ \vartheta_{12}(v_1,\ v_2,\ \tau_{11},\ \tau_{12},\ \tau_{22}) &= a-b+c-d,\\ \vartheta_0\,(v_1,\ v_2,\ \tau_{11},\ \tau_{12},\ \tau_{22}) &= a-b-c+d. \end{aligned} \tag{21}$$

§ 4.*)

Die Hauptsätze über Charakteristiken.

Es mögen jetzt die Charakteristiken als selbständige Gröſsen betrachtet werden. Wir wollen dieselbe in der Folge öfter durch einen einzelnen in Klammer gesetzten Buchstaben bezeichnen. Die Charakteristiken zerfallen in gerade oder ungerade, je nachdem:

$$g_1 \cdot h_1 + g_2 \cdot h_2$$

gerade oder ungerade ist. Mit der Charakteristik $[\omega]$ ist dann auch die dazu gehörende Thetafunktion gerade oder ungerade.

Zwei Charakteristiken $\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} g_1', & g_2' \\ h_1', & h_2' \end{bmatrix}$ sollen congruent genannt werden, wenn ihre entsprechenden Elemente sich nur um gerade Zahlen unterscheiden d. h. wenn ist:

$$g_\alpha \equiv g_\alpha', \quad h_\alpha \equiv h_\alpha' \bmod 2.$$

Unter der Summe oder Differenz zweier Charakteristiken $\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} g_1', & g_2', \\ h_1' & h_2' \end{bmatrix}$ soll diejenige Charakteristik verstanden werden, deren Elemente g'', h'' durch die Gleichungen bestimmt sind:

$$g_\alpha'' = g_\alpha \pm g_\alpha', \quad h_\alpha'' = h_\alpha \pm h_\alpha'. \qquad \alpha = 1, 2$$

Eine Charakteristik ist oder soll in zwei andere zerlegbar sein, wenn sie der Summe derselben congruent ist.

Haben die sämtlichen Zahlen g und h die Werte 0 oder 1, so

*) cf. Weber: Mathematische Annalen 14, Crelle 84; Krazer am angeführten Ort.

nennen wir die Charakteristik eine Normalcharakteristik. Von den sechszehn Normalcharakteristiken sind sechs ungerade und zehn gerade. Die ersteren lauten:

$$\begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix} \begin{bmatrix}10\\11\end{bmatrix} \begin{bmatrix}01\\11\end{bmatrix} \begin{bmatrix}01\\01\end{bmatrix} \begin{bmatrix}11\\01\end{bmatrix} \begin{bmatrix}11\\10\end{bmatrix}$$

und sollen in beliebiger Reihenfolge genommen mit:

$$[\beta_a], \quad a = 1, 2, \ldots 6,$$

bezeichnet werden.

Die Summe zweier gleicher Charakteristiken ist congruent der Charakteristik $\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$. Letztere soll durch $[0]$ bezeichnet werden. Dann gelten die Sätze:

I. Die Summe aller ungeraden Charakteristiken $[\beta_\alpha]$ ist congruent der Charakteristik $[0]$.

II. Jede der Null nicht kongruente Charakteristik läſst immer auf eine und nur eine Weise eine Zerlegung in zwei oder vier ungerade Normalcharakteristiken zu.

Jedenfalls ist klar, daſs die Summe zweier ungerader Charakteristiken niemals kongruent $[0]$ sein kann. Bilden wir ferner die 15 Summen von je zwei ungeraden Normalcharakteristiken, so müssen diese alle von einander verschieden sein, da sonst die Summe von vier oder zwei ungeraden Normalcharakteristiken der Null congruent sein müſste.

III. Jede der Null nicht kongruente Charakteristik läſst sich immer auf drei Weisen in zwei gerade Normalcharakteristiken zerlegen.

IV. Jede der Null nicht kongruente Charakteristik läſst sich immer auf vier Arten in eine gerade und eine ungerade Normalcharakteristik zerlegen.

V. Die Summe dreier von einander verschiedenen Charakteristiken, die ungerade sind, ist stets eine gerade Charakteristik.

In der That, im entgegengesetzten Falle müſste die Summe von vier oder zwei ungeraden Charakteristiken der Null congruent sein w. n. g.

VI. Eine jede gerade Charakteristik läſst sich auf zwei und nur zwei Weisen in drei ungerade Normalcharakteristiken zerlegen.

In der That von den zwanzig möglichen Summen $[\beta_1] + [\beta_2] + [\beta_3]$ sind nur dann zwei einander congruent, wenn in beiden zusammengenommen alle sechs ungeraden Charakteristiken vorkommen.

§ 5.*)

Einführung der Thetafunktionen n^{ter} Ordnung. Entwicklung des Transformationsprinzipes.

Wir definieren als Thetafunktion n^{ter} Ordnung der beiden Veränderlichen v_1 und v_2 und der Moduln τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} eine Funktion $\Theta(v_1, v_2)$, welche als Funktion von v_1 und v_2 aufgefafst, für alle Werte von v_1 und v_2 den Charakter einer ganzen Funktion hat und überdies den Bedingungsgleichungen Genüge leistet:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \Theta(v_1+1, v_2) &= (-1)^{g_1}\cdot\Theta(v_1, v_2),\\ \Theta(v_1, v_2+1) &= (-1)^{g_2}\cdot\Theta(v_1, v_2),\\ \Theta(v_1+\tau_{11}, v_2+\tau_{12}) &= (-1)^{h_1}\cdot e^{-\pi i n(2v_1+\tau_{11})}\cdot\Theta(v_1, v_2),\\ \Theta(v_1+\tau_{12}, v_2+\tau_{22}) &= (-1)^{h_2}\cdot e^{-\pi i n(2v_2+\tau_{22})}\cdot\Theta(v_1, v_2). \end{aligned}$$

Den Zahlenkomplex $\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix}$ nennen wir analog wie früher die Charakteristik der Thetafunktion n^{ter} Ordnung. Es können dann alle früher entwickelten Sätze auf ihn angewandt werden.

Für diese Thetafunktionen n^{ter} Ordnung besteht nun der

Lehrsatz.

Zwischen je n^2+1 Thetafunktionen n^{ter} Ordnung besteht mindestens eine lineare Beziehung. Es giebt also höchstens n^2 solcher Funktionen, zwischen denen keine lineare Relation existiert. Dabei ist die Charakteristik bei allen diesen Funktionen als die nämliche angenommen worden.

Der Beweis folgt leicht. In der That, nehmen wir der Einfachheit halber an, dafs die Charakteristik Null sei, so mufs $\Theta(v_1, v_2)$ jedenfalls die Form haben:

$$(2)\qquad \Theta(v_1, v_2) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n_2} c_{n_1 n_2}\cdot e^{2\pi i(n_1\cdot v_1 + n_2\cdot v_2)} .$$

oder indem wir setzen:

$$c_{n_1 n_2} = C_{n_1 n_2}\cdot e^{\frac{\pi i}{n}(n_1^2\cdot\tau_{11} + 2n_1 n_2\cdot\tau_{12} + n_2^2\cdot\tau_{22})},$$

*) Cf. Weber: Mathematische Annalen 14; Hermite am angegebenen Orte.

$$(3)\quad \Theta(v_1, v_2) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n_2} C_{n_1 n_2} \cdot e^{\frac{\pi i}{n}(n_1^2 \cdot \tau_{11} + 2n_1 n_2 \cdot \tau_{12} + n_2^2 \cdot \tau_{22}) + 2\pi i(n_1 \cdot v_1 + n_2 \cdot v_2)}.$$

Die dritte Bedingungsgleichung liefert die Beziehung:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n_2} C_{n_1 n_2} . e^{\frac{\pi i}{n}(n_1^2 \cdot \tau_{11} + 2n_1 n_2 \cdot \tau_{12} + n_2^2 \cdot \tau_{22}) + 2\pi i(n_1 \cdot v_1 + n_2 \cdot v_2)}$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n_2} C_{n_1 n_2} . e^{\frac{\pi i}{n}\left\{(n_1+n)^2 \tau_{11} + 2(n_1+n) n_2 \cdot \tau_{12} + n_2^2 \cdot \tau_{22}\right\} + 2\pi i((n_1+n) v_1 + n_2 \cdot v_2)}.$$

Setzen wir auf der rechten Seite an Stelle von n_1: $n_1 - n$ und vergleichen die beiden Seiten mit einander, so ergiebt sich:

$$C_{n_1 n_2} = C_{n_1 - rn\, n_2}.$$

Genau so wird:

$$C_{n_1 n_2} = C_{n_1\, n_2 - rn}.$$

Hieraus folgt, dafs nur die Konstanten $C_{00}, \ldots C_{n-1\, n-1}$, deren Zahl n^2 ist, willkürlich bleiben können.

Die Zahl der willkürlichen Konstanten wird noch verringert, wenn wir eine Annahme darüber machen, ob die vorgelegte Thetafunktion eine gerade oder eine ungerade Funktion ihrer Argumente ist.

In der That, bleiben wir bei dem vorhin betrachteten Beispiele stehen und nehmen die Annahme hinzu, dafs:

$$\Theta(v_1, v_2) = \Theta(-v_1, -v_2)$$

ist, so würde folgen, dafs

$$C_{rs} = C_{-r-s}$$

ist. Nehmen wir n als ungerade Zahl an, so lassen sich die Konstanten ordnen:

$$\begin{array}{llll}
C_{00}, & C_{01}, & \ldots, & C_{0\,n-1} \\
C_{10}, & C_{11}, & \ldots, & C_{1\,n-1} \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
C_{\frac{n-1}{2}0}, & C_{\frac{n-1}{2}1}, & \ldots, & C_{\frac{n-1}{2}\,n-1} \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
C_{n-1\,0}, & C_{n-1\,1}, & & C_{n-1\,n-1}.
\end{array}$$

Vermöge der Bedingungsgleichungen ist aber:

$$C_{\frac{n+1}{2}0} = C_{\frac{n-1}{2}0},\quad C_{\frac{n+1}{2}1} = C_{\frac{n-1}{2}\,n-1} \cdots$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$C_{n-1\,0} = C_{10},\quad C_{n-1\,1} = C_{1\,n-1}, \cdots$$

$$C_{0\,n-1} = C_{01},\quad C_{0\,n-2} = C_{02} \cdots$$

Hieraus folgt aber, dafs nur $\frac{n^2+1}{2}$ Konstanten willkürlich bleiben können. In ähnlicher Weise sind alle andern Fälle zu untersuchen. Wir finden den

Lehrsatz.

Für ein gerades n existieren höchstens $\frac{n^2}{2}$ gerade und $\frac{n^2}{2}$ ungerade linear unabhängige Thetafunktionen n^{ter} Ordnung, mit Ausnahme der Charakteristik Null, für welche die Anzahl der linear unabhängigen geraden Thetafunktionen höchstens $\frac{n^2}{2}+2$, die der ungeraden $\frac{n^2}{2}-2$ beträgt. Bei ungeradem n und gerader Charakteristik giebt es höchstens $\frac{1}{2}(n^2+1)$ gerade, $\frac{1}{2}(n^2-1)$ ungerade, bei ungeradem n und ungerader Charakteristik $\frac{1}{2}(n^2+1)$ ungerade und $\frac{1}{2}(n^2-1)$ gerade linear unabhängige Thetafunktionen.

§ 6.*)

Die linearen Relationen zwischen den Quadraten der sechzehn ursprünglichen Thetafunktionen.

Bilden wir das Quadrat einer beliebigen Thetafunktion erster Ordnung, so ist dieses eine Thetafunktion zweiter Ordnung mit der Chrakteristik Null. Hieraus folgt der

Lehrsatz.

Zwischen den Quadraten von fünf der ursprünglichen sechzehn Thetafunktionen mufs immer eine lineare Relation bestehen.

Es ist nicht schwer, diese Relationen zu entwickeln. Seien $[\beta_1]$, $[\beta_2]$, $[\beta_3]$ drei beliebige ungerade Normalcharakteristiken, so ist die Charakteristik:

$$[\beta_0] = [\beta_1] + [\beta_2] + [\beta_3]$$

sicher eine gerade. Bedeutet ferner $[\omega]$ eine beliebige von den soeben

*) Cf. Weber und Krazer an den angeführten Orten.

definierten Charakteristiken verschiedene Charakteristik, so mufs sicherlich eine Gleichung von der Form bestehen:

$$c \,.\, \vartheta[\omega]((v))^2 = \sum_{0}^{3} c_\varepsilon \,.\, \vartheta[\beta_\varepsilon]((v))^2. \tag{1}$$

Setzen wir in dieser Gleichung $v_1 = v_2 = 0$, so wird:

$$\frac{c_0}{c} = \frac{\vartheta[\omega]((0))^2}{\vartheta[\beta_0]((0))^2}. \tag{2}$$

Wir wollen nun annehmen, dafs:

$$[\omega] = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix}; \quad [\beta_\varepsilon] = \begin{bmatrix} g_1^{(\varepsilon)} & g_2^{(\varepsilon)} \\ h_1^{(\varepsilon)} & h_2^{(\varepsilon)} \end{bmatrix}$$

sei, wir wollen ferner setzen:

$$\Sigma g \cdot h = g_1 \cdot h_1 + g_2 \cdot h_2. \tag{3}$$

Benutzen wir dann die Substitution halber Perioden, so zwar, dafs eine Thetafunktion mit der Charakteristik $[k]$ übergeht in die Thetafunktion $[k] + [\beta_0] + [\beta_\varepsilon]$, $\varepsilon = 1, 2, 3$, so folgt die Richtigkeit der Formel:

$$\begin{aligned} &\vartheta[\beta_0]((0))^2 \cdot \vartheta[\omega]((v))^2 \\ &= \sum_{0}^{3} (-1)^{\Sigma(g^{(0)}+g^{(\varepsilon)})(h^{(\varepsilon)}+h)} \cdot \vartheta[\beta_0 + \beta_\varepsilon + \omega]((0))^2 \cdot \vartheta[\beta_\varepsilon]((v))^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Wir spezialisieren jetzt, indem wir annehmen, dafs $[\omega]$ eine ungerade von den Charakteristiken $[\beta_1]$, $[\beta_2]$, $[\beta_3]$ verschiedene Charakteristik sei. Dann wird $c_0 = 0$ und es ergiebt sich mit Hülfe weniger Schlüsse der

Lehrsatz.

Zwischen den Quadraten von je vier beliebigen ungeraden Thetafunktionen besteht immer eine lineare Relation.

Da die Zahl der ungeraden Thetafunktionen gleich sechs ist, so ergeben sich fünfzehn lineare Relationen zwischen den Quadraten von vier ungeraden Thetafunktionen.

Es ist diese Eigenschaft von Rosenhain gefunden worden. Wir wollen sagen, die sechs ungeraden Thetafunktionen bilden ein Rosenhainsches Sechsersystem, wir wollen ferner unter einem Rosenhainschen Sechsersystem im allgemeinen Sinne ein System von sechs Thetafunktionen verstehen, so zwar, dafs zwischen den Quadraten von je vier derselben immer eine lineare Relation besteht. Dann existiert sicherlich ein solches System, wir werden ferner durch

Substitution halber Perioden neue finden können. Ist ein Sechsersystem gegeben, so wird ein jedes System von sechs Thetafunktionen, welches aus diesem durch Substitution halber Perioden hervorgegangen ist, wieder ein Rosenhainsches Sechsersystem sein, oder anders ausgedrückt, wenn $[k]$ eine beliebige Charakteristik bedeutet, so werden die sechs Thetafunktionen mit den Charakteristiken

$$[k] + [\beta_\varepsilon], \quad \varepsilon = 1, 2, \ldots 6,$$

ein Rosenhainsches Sechsersystem bilden.

Setzt man

$$[k] = [\beta_1] + [\beta_2],$$

so erhalten wir das System

$$[\beta_1], \quad [\beta_2], \quad [\beta_1 + \beta_2 + \beta_3], \quad [\beta_1 + \beta_2 + \beta_4], \quad [\beta_1 + \beta_2 + \beta_5], \quad [\beta_1 + \beta_2 + \beta_6].$$

Hierbei ist, wie auch schon bei einer früheren Gelegenheit gesetzt worden:

$$[\beta_1 + \beta_2 + \beta_3] = [\beta_1] + [\beta_2] + [\beta_3] \text{ etc.}$$

Da man das Paar $[\beta_1]$, $[\beta_2]$ auf fünfzehn Arten auswählen kann, so ergeben sich im ganzen 16 Rosenhainsche Sechsersysteme, also 240 lineare Relationen zwischen den Quadraten von je vier Thetafunktionen. Alle diese 240 sind in der obigen Grundformel enthalten, da sie aus ihr durch Substitution halber Perioden hervorgehen.

Unter Anwendung der Weierstrassischen Bezeichnungsweise mögen diejenigen Beziehungen hervorgehoben werden, die zwischen den Quadraten der ungeraden Thetafunktionen bestehen. Dieselben lauten:

$$(5) \quad \begin{aligned}
&\vartheta_{23}{}^2 . \vartheta_1((v))^2 + \vartheta_{12}{}^2 . \vartheta_3((v))^2 - \vartheta_2{}^2 . \vartheta_{13}((v))^2 - \vartheta_5{}^2 . \vartheta_{04}((v))^2 = 0,\\
&\vartheta_0{}^2 . \vartheta_3((v))^2 - \vartheta_{01}{}^2 . \vartheta_{13}((v))^2 + \vartheta_{23}{}^2 . \vartheta_{02}((v))^2 - \vartheta_{34}{}^2 . \vartheta_{04}((v))^2 = 0,\\
&\vartheta_5{}^2 . \vartheta_{13}((v))^2 + \vartheta_2{}^2 . \vartheta_{04}((v))^2 - \vartheta_4{}^2 . \vartheta_{02}((v))^2 - \vartheta_0{}^2 . \vartheta_{24}((v))^2 = 0,\\
&\vartheta_{23}{}^2 . \vartheta_{04}((v))^2 + \vartheta_{34}{}^2 . \vartheta_{02}((v))^2 - \vartheta_{03}{}^2 . \vartheta_{24}((v))^2 - \vartheta_5{}^2 . \vartheta_1((v))^2 = 0,\\
&\vartheta_0{}^2 . \vartheta_{02}((v))^2 - \vartheta_4{}^2 . \vartheta_{24}((v))^2 - \vartheta_{12}{}^2 . \vartheta_1((v))^2 + \vartheta_{23}{}^2 . \vartheta_3((v))^2 = 0,\\
&\vartheta_5{}^2 . \vartheta_{24}((v))^2 + \vartheta_{03}{}^2 . \vartheta_1((v))^2 - \vartheta_{01}{}^2 . \vartheta_3((v))^2 - \vartheta_0{}^2 . \vartheta_{13}((v))^2 = 0,\\
&\vartheta_2{}^2 . \vartheta_3((v))^2 + \vartheta_{12}{}^2 . \vartheta_{13}((v))^2 - \vartheta_{34}{}^2 . \vartheta_{24}((v))^2 - \vartheta_{03}{}^2 . \vartheta_{02}((v))^2 = 0,\\
&\vartheta_4{}^2 . \vartheta_3((v))^2 + \vartheta_{14}{}^2 . \vartheta_{13}((v))^2 - \vartheta_{03}{}^2 . \vartheta_{04}((v))^2 - \vartheta_{23}{}^2 . \vartheta_{24}((v))^2 = 0,\\
&\vartheta_{23}{}^2 . \vartheta_{13}((v))^2 + \vartheta_2{}^2 . \vartheta_1((v))^2 - \vartheta_{14}{}^2 . \vartheta_{24}((v))^2 - \vartheta_{01}{}^2 . \vartheta_{02}((v))^2 = 0,\\
&\vartheta_0{}^2 . \vartheta_1((v))^2 + \vartheta_{03}{}^2 . \vartheta_{13}((v))^2 - \vartheta_{14}{}^2 . \vartheta_{04}((v))^2 - \vartheta_{12}{}^2 . \vartheta_{02}((v))^2 = 0,
\end{aligned}$$

$$
(5)\quad
\begin{aligned}
&\vartheta_4^2 . \vartheta_1 ((v))^2 - \vartheta_{34}^2 . \vartheta_{13}((v))^2 - \vartheta_{01}^2 . \vartheta_{04}((v))^2 + \vartheta_{12}^2 . \vartheta_{24}((v))^2 = 0,\\
&\vartheta_{01}^2 . \vartheta_1 ((v))^2 + \vartheta_{03}^2 . \vartheta_3 ((v))^2 - \vartheta_4^2 . \vartheta_{04}((v))^2 - \vartheta_2^2 . \vartheta_{02}((v))^2 = 0,\\
&\vartheta_{14}^2 . \vartheta_1 ((v))^2 + \vartheta_{34}^2 . \vartheta_3 ((v))^2 - \vartheta_0^2 . \vartheta_{04}((v))^2 - \vartheta_2^2 . \vartheta_{24}((v))^2 = 0,\\
&\vartheta_{34}^2 . \vartheta_1 ((v))^2 - \vartheta_{14}^2 . \vartheta_3 ((v))^2 + \vartheta_4^2 . \vartheta_{13}((v))^2 - \vartheta_5^2 . \vartheta_{02}((v))^2 = 0,\\
&\vartheta_5^2 . \vartheta_3 ((v))^2 - \vartheta_{12}^2 . \vartheta_{04}((v))^2 - \vartheta_{01}^2 . \vartheta_{24}((v))^2 + \vartheta_{14}^2 . \vartheta_{02}((v))^2 = 0.
\end{aligned}
$$

Die übrigen Formeln können aus den soeben hingeschriebenen durch Substitution halber Perioden entwickelt werden.

§ 7.*)

Die Auflösung der linearen Relationen. Erste Methode. Einführung der ungeraden Vierersysteme.

Die im vorigen Paragraphen gefundene Formel:

$$
(1)\quad \vartheta[\beta_0]((0))^2 . \vartheta[\omega]((v))^2
$$
$$
= \sum_0^3 {}_{\varepsilon} (-1)^{\Sigma(g^{(0)}+g^{(\varepsilon)})(h^{(\varepsilon)}+h)} \cdot \vartheta[\beta_0 + \beta_\varepsilon + \omega]((0))^2 \cdot \vartheta[\beta_\varepsilon]((v))^2
$$

kann auch so interpretiert werden, dafs die Quadrate aller sechzehn Thetafunktionen sich linear durch die Quadrate von vier unter ihnen ausdrücken lassen müssen und zwar der Funktionen

$$[\beta_\varepsilon],\ \varepsilon = 0, 1, 2, 3.$$

Zwischen den Quadraten der vier letzteren kann aber, wie man sich leicht überzeugt, eine lineare Relation nicht existieren. Hieraus folgt, dafs die obigen 12 Gleichungen die 240 im vorigen Paragraphen gefundenen Relationen ersetzen müssen, dafs sie als Auflösung derselben angesehen werden können. Wir wollen nun ein jedes System von vier Thetafunktionen, welches die Eigenthümlichkeit besitzt, dafs sich durch ihre Quadrate die Quadrate aller andern linear ausdrücken lassen, ein Vierersystem oder ein Quadrupel von Thetafunktionen nennen. Da die Gröfsen $[\beta_\varepsilon]$ auf zwanzig verschiedene Arten ausgewählt werden können, so finden wir zunächst, dafs es zwanzig Vierersysteme giebt, deren jedes aus einer geraden und drei ungeraden Thetafunktionen besteht.

Ist nun $[\beta_0]$, $[\beta_1]$, $[\beta_2]$, $[\beta_3]$ ein Vierersystem der angegebenen Art, so werden auch alle diejenigen Thetafunktionen ein Vierersystem

*) Cf. Krazer am angeführten Orte.

bilden, die aus den obigen durch Substitution halber Perioden entstanden sind, d. h.

$$[k + \beta_0],\quad [k + \beta_1],\quad [k + \beta_2],\quad [k + \beta_3].$$

Dabei bedeutet $[k]$ eine ganz beliebige Charakteristik. Setzen wir der Reihe nach für k: $\beta_4 + \beta_5$, $\beta_5 + \beta_6$, $\beta_4 + \beta_6$, so erhalten wir die neuen Vierersysteme:

$$\begin{array}{llll} [\beta_1 + \beta_4 + \beta_5], & [\beta_2 + \beta_4 + \beta_5], & [\beta_3 + \beta_4 + \beta_5], & [\beta_6], \\ [\beta_1 + \beta_5 + \beta_6], & [\beta_2 + \beta_5 + \beta_6], & [\beta_3 + \beta_5 + \beta_6], & [\beta_4], \\ [\beta_1 + \beta_4 + \beta_6], & [\beta_2 + \beta_4 + \beta_6], & [\beta_3 + \beta_4 + \beta_6], & [\beta_5]. \end{array}$$

Diese bestehen aus drei geraden und einer ungeraden Thetafunktion. Hieraus folgt der

Lehrsatz.

Es giebt achtzig Vierersysteme, von denen zwanzig aus je drei ungeraden und einer geraden, sechzig aus drei geraden und einer ungeraden Thetafunktion bestehen. Es lassen sich also auch die Quadrate aller Thetafunktionen auf achtzig verschiedene Arten linear durch die Quadrate von vier derselben ausdrücken, die linear von einander unabhängig sind.

Diese achtzig Vierersysteme können auch noch auf eine andere Art definiert werden.

In der That, setzen wir:

$$[\beta_\varepsilon] = \begin{bmatrix} g_1^{(\varepsilon)} & g_2^{(\varepsilon)} \\ h_1^{(\varepsilon)} & h_2^{(\varepsilon)} \end{bmatrix},$$

so überzeugt man sich leicht, dafs die Relationen bestehen:

$$(2)\qquad \begin{aligned} & g_1^{(0)} + g_1^{(1)} + g_1^{(2)} + g_1^{(3)} \equiv 0 \bmod 2, \\ & g_2^{(0)} + g_2^{(1)} + g_2^{(2)} + g_2^{(3)} \equiv 0 \bmod 2, \\ & h_1^{(0)} + h_1^{(1)} + h_1^{(2)} + h_1^{(3)} \equiv 0 \bmod 2, \\ & h_2^{(0)} + h_2^{(1)} + h_2^{(2)} + h_2^{(3)} \equiv 0 \bmod 2, \\ & s^{(0)} + s^{(1)} + s^{(2)} + s^{(3)} \equiv 1 \bmod 2, \\ & s^{(\varepsilon)} = g_1^{(\varepsilon)} \cdot h_1^{(\varepsilon)} + g_2^{(\varepsilon)} \cdot h_2^{(\varepsilon)}, \quad \varepsilon = 0, 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Ferner ist klar, dafs auch alle übrigen Vierersysteme denselben Bedingungsgleichungen Genüge leisten.

Aber es folgt auch das umgekehrte. Alle Systeme von vier Thetafunktionen, welche den obigen Gleichungen Genüge leisten, bilden ein Vierersystem. Es wäre das nachgewiesen, wenn gezeigt werden

könnte, dafs die Zahl der Systeme, die den obigen Gleichungen Genüge leisten, gleich achtzig ist.

Das folgt leicht. Jedenfalls werden die Systeme aus zwei Kategorien bestehen, von denen die eine drei ungerade eine gerade, die andere drei gerade eine ungerade Thetafunktion enthält. Um die erste Kategorie zu erhalten, können drei ungerade Thetafunktionen beliebig ausgewählt werden, die vier ersten Gleichungen ergeben dann von selbst die dazu gehörende gerade Funktion. Zu dieser Kategorie gehören also zwanzig Systeme.

Greifen wir dagegen drei gerade Funktionen willkürlich heraus, was auf 120fache Weise möglich ist, und bestimmen aus den vier ersten Gleichungen die dazu gehörende vierte, so kann dieselbe gerade oder ungerade sein und zwar wird ein jeder Fall gleich oft eintreten können. Daraus folgt die Richtigkeit der Behauptung. Da nun für unsere Vierersysteme $s^{(0)} + s^{(1)} + s^{(2)} + s^{(3)}$ eine ungerade Zahl ist, wollen wir die Systeme selbst ungerade Vierersysteme oder ungerade Quadrupel nennen.

Die Form aller der gefundenen Vierersysteme kann leicht in übersichtlicher Weise in folgender Art dargestellt werden:

Bezeichnen wir durch $[\beta_1], \ldots [\beta_6]$ die sechs ungeraden Thetafunktionen in beliebiger Reihenfolge, verstehen unter $[\eta]$ eine ganz willkürliche Funktion, so bilden die vier Funktionen

$$[\eta], \quad [\eta + \beta_1 + \beta_2], \quad [\eta + \beta_1 + \beta_3], \quad [\eta + \beta_2 + \beta_3]$$

ein ungerades Vierersystem. Jedenfalls leisten sie den vier ersten Bedingungsgleichungen Genüge, der letzten aber auch, da sie entweder aus drei geraden und einer ungeraden, oder drei ungeraden und einer geraden Funktion bestehen. Ebenso einfach folgt umgekehrt, dafs ein jedes ungerade Vierersystem sich in die obige Form bringen lassen mufs, so dafs dieselbe alle jene Systeme erschöpft.

An Stelle der obigen können wir auch die Form wählen:

$$[\eta + \beta_1], \quad [\eta + \beta_2], \quad [\eta + \beta_3], \quad [\eta + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3].$$

Ist ein beliebiges solches System vorgelegt, so erhalten wir durch Substitution halber Perioden dasselbe dreimal in veränderter Reihenfolge und zwar in den Reihenfolgen:

$$\begin{array}{llll} [\eta + \beta_2], & [\eta + \beta_1], & [\eta + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3], & [\eta + \beta_3], \\ [\eta + \beta_3], & [\eta + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3], & [\eta + \beta_1], & [\eta + \beta_2], \\ [\eta + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3], & [\eta + \beta_3], & [\eta + \beta_2], & [\eta + \beta_1]. \end{array}$$

Ferner folgt leicht, dafs die 16 Thetafunktionen 20mal in je

vier ungerade Vierersysteme zerfällt werden können. Bei einer jeden Zerfällung sind die vier Vierersysteme aus einander durch Substitution halber Perioden hervorgegangen. Das eine unter ihnen besteht aus einer geraden und drei ungeraden, die drei anderen aus einer ungeraden und drei geraden Funktionen. Wir wollen diese Anordnungen unter Annahme der Weierstrassischen Bezeichnungsweise wirklich vornehmen. Hierbei beschränken wir uns darauf, die Indices der Thetafunktionen hinzuschreiben:

1, 02, 04, 03; 1, 02, 3, 4; 1, 02, 24, 23; 1, 02, 13, 14;
5, 34, 23, 24; 5, 34, 13, 14; 5, 34, 03, 04; 5, 34, 3, 4;
0, 12, 14, 13; 0, 12, 24, 23; 0, 12, 3, 4; 0, 12, 03, 04;
2, 01, 3, 4; 2, 01, 04, 03; 2, 01, 14, 13; 2, 01, 23, 24;

3, 24, 04, 14; 1, 3, 24, 0; 24, 02, 13, 2; 04, 02, 13, 0;
5, 01, 12, 02; 01, 03, 13, 5; 4, 0, 04, 5; 4, 2, 24, 5;
0, 1, 34, 2; 34, 14, 04, 2; 14, 01, 23, 1; 14, 12, 03, 1;
4, 23, 03, 13; 23, 12, 02, 4; 34, 03, 12, 3; 34, 23, 01, 3;

3, 04, 02, 01; 3, 04, 13, 23; 1, 04, 3, 2; 1, 04, 13, 12;
5, 12, 14, 24; 5, 12, 1, 2; 5, 23, 13, 12; 5, 23, 3, 2;
0, 34, 23, 13; 0, 34, 01, 02; 0, 14, 24, 34; 0, 14, 03, 02;
1, 2, 4, 03; 4, 03, 14, 24; 4, 01, 02, 03; 4, 01, 34, 24;

1, 04, 24, 34; 24, 04, 13, 4; 1, 24, 13, 01; 3, 02, 13, 34;
5, 23, 03, 02; 2, 0, 02, 5; 5, 03, 3, 0; 5, 14, 1, 4;
0, 14, 3, 2; 12, 01, 34, 1; 2, 14, 23, 02; 0, 23, 01, 04;
4, 01, 12, 13; 23, 03, 14, 3; 4, 12, 34, 04; 2, 03, 12, 24;

02, 24, 04, 5; 3, 1, 13, 5; 3, 24, 13, 03; 3, 24, 02, 12;
2, 13, 4, 0; 03, 01, 24, 0; 5, 01, 1, 0; 5, 01, 14, 04;
34, 03, 23, 1; 23, 12, 04, 2; 2, 34, 12, 02; 0, 1, 23, 4;
14, 01, 12, 3; 34, 14, 02, 4; 4, 23, 14, 04; 2, 34, 03, 13.

§ 8.*)

Die Auflösung der 240 linearen Relationen. Zweite Methode. Einführung der geraden Vierersysteme.

Neben den ungeraden Vierersystemen sind wir im vorigen Paragraphen zu einem Systeme von vier Thetafunktionen gekommen, deren Charakteristiken den Gleichungen Genüge leisten:

$$(1)\quad \sum_0^3 {}_\varepsilon\, g_1^{(\varepsilon)} \equiv \sum_0^3 {}_\varepsilon\, g_2^{(\varepsilon)} \equiv \sum_0^3 {}_\varepsilon\, h_1^{(\varepsilon)} \equiv \sum_0^3 {}_\varepsilon\, h_2^{(\varepsilon)} \equiv \sum_0^3 {}_\varepsilon\, s^{(\varepsilon)} \equiv 0 \bmod 2.$$

Aus der Kongruenz:

$$\sum_0^3 {}_\varepsilon\, s^{(\varepsilon)} \equiv 0 \bmod 2$$

folgt, dafs ein solches System entweder aus vier geraden oder zwei geraden und zwei ungeraden Thetafunktionen bestehen kann. Nehmen wir zwei ungerade und eine gerade Funktion willkürlich als gegeben an, so ergeben sich im ganzen 150 Systeme, die den vier ersten Kongruenzen Genüge leisten. Von diesen sind 60 ungerade Vierersysteme, es bleiben also noch 90 Systeme der betrachteten Art. Da dieselben zu je zwei einander gleich sind, so folgt, dafs 45 von einander verschiedene Systeme der angegebenen Art existieren, die aus zwei ungeraden und aus zwei geraden Funktionen bestehen. Genau so würde folgen, dafs 15 von einander verschiedene Systeme existieren, die aus vier geraden Funktionen bestehen. Die Gesamtzahl der möglichen Systeme ist demnach gleich 60.

Auch diese Systeme können in einer übersichtlichen Form dargestellt werden.

Ein jedes System:

$$[\eta],\quad [\eta + \beta_1 + \beta_2],\quad [\eta + \beta_3 + \beta_4],\quad [\eta + \beta_5 + \beta_6]$$

ist ein System der betrachteten Art, und umgekehrt läfst sich ein jedes solches System in diese Form bringen. An Stelle derselben können noch mehrere andere gesetzt werden, so z. B.

$$[\eta + \beta_1 + \beta_3],\quad [\eta + \beta_2 + \beta_3],\quad [\eta + \beta_1 + \beta_4],\quad [\eta + \beta_2 + \beta_4].$$

Ist ein beliebiges System der genannten Art vorgelegt, so erhält man durch Substitution halber Perioden noch dreimal dasselbe, nur anders angeordnet. Ferner folgt: Die 16 Thetafunktionen lassen sich

*) Cf. Krazer am angeführten Orte.

15mal in je vier Systeme der betrachteten Art zerfällen. Bei einer jeden Zerfällung sind die vier Systeme aus einander durch Substitution halber Perioden entstanden. Das eine unter ihnen besteht aus vier geraden, die anderen aus zwei geraden und zwei ungeraden Thetafunktionen.

Setzen wir $j = e^{\frac{\pi i}{4}}$, so lauten die Anordnungen:

5,	01,	4,	23;	5,	34,	12,	0;
34,	2,	3,	24;	01,	2,	$-i.\,02$,	$-i.\,1$;
12,	02,	03,	13;	4,	$-i.\,3$,	03,	$-i.\,04$;
0,	1,	04,	14;	23,	$-i.\,24$,	$-i.\,13$,	$-\,14$;
5,	01,	34,	2;	5,	12,	4,	03;
4,	23,	$-i.\,3$,	$-i.\,24$;	34,	0,	3,	04;
12,	02,	0,	1;	01,	$-i.\,02$,	23,	$-i.\,13$;
03,	13,	$-i.\,04$,	$-i.\,14$;	2,	$-i.\,1$,	24,	$-i.\,14$;
5,	23,	0,	14;	5,	2,	03,	$i.\,14$;
4,	01,	$-i.\,04$,	$-i.\,1$;	34,	01;	04,	$-i.\,13$;
12,	13,	34,	$-\,24$;	12,	1,	4,	$-i.\,24$;
03,	02,	$-i.\,3$,	$i.\,2$;	0,	02,	3,	$i.\,23$;
34,	$j.\,4$,	0,	$j.03$;	12,	$j.01$,	03,	$j.23$;
2,	$j.23$,	$-i.\,1$,	$-i.j.13$;	$j.\,2$,	0,	$j.24$,	04;
5,	$j.\,3$,	12,	$j.04$;	4,	$j.13$,	5,	$j.02$;
01,	$j.24$,	$-i.\,02$,	$-i.j.14$;	$i.j.14$,	$i.\,3$,	$i.j.\,1$,	$i.\,34$;
34,	$j.\,4$,	2,	$j.23$;	12,	$j.01$,	0,	$j.\,2$;
$j.03$,	0,	$j.13$,	1;	$j.23$,	03,	$-i.j.24$,	$-i.\,04$;
01,	$j.24$,	5,	$j.\,3$;	34,	$j.\,1$,	5,	$j.02$;
$i.j.14$,	$i.\,02$,	$i.j.04$,	$i.\,12$;	$j.14$,	3,	$i.j.13$,	$i.\,4$;
0,	$-i.j.\,4$,	14,	$-i.j.01$;	12,	$j.23$,	34,	$j.14$;
34,	$-i.j.03$,	24,	$i.j.02$;	03,	$j.01$,	$-i.\,3$,	$-i.j.\,1$;
5,	$-i.j.04$,	23,	$-i.j.\,1$;	5,	$j.13$,	0,	$-\,j.24$;
12,	$-i.j.\,3$,	$-\,13$,	$-i.j.\,2$;	4,	$j.02$,	$-i.\,04$,	$i.j.\,2$;

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
0, & j.03, & -i.23, & j.2; & 2, & j.4, & i.14, & -j.12; \\
34, & j.4, & -i.13, & j.1; & -j.23, & 34, & -i.j.02, & 04; \\
5, & j.3, & -i.14, & j.02; & -03, & -i.j.1, & 5, & j.24; \\
12, & j.04, & i.24, & -j.01; & -i.j.0, & 13, & -i.j.3, & -i.01;
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr}
03, & j.01, & i.14, & j.34; \\
j.23, & -12, & -i.j.3, & 1; \\
2, & i.j.04, & 5, & -j.13; \\
i.j.0, & -24, & -i.j.02, & -i.4.
\end{array}$$

Es sind hierbei die Thetafunktionen mit Faktoren multipliziert, deren Bedeutung erst später klar werden wird.

Aus den soeben entwickelten Sätzen folgt, dafs zwischen den Quadraten von je vier Thetafunktionen der betrachteten Art eine lineare Relation nicht bestehen kann. Hieraus schliefsen wir, dafs sich das Quadrat einer jeden Thetafunktion linear durch die Quadrate von je vier betrachteten Thetafunktionen ausdrücken läfst oder also, dafs die zuletzt eingeführten Systeme auch mit dem Namen von Verersystemen bezeichnet werden können. Da für dieselben $\Sigma s^{(\epsilon)}$ eine gerade Zahl ist, so mögen sie mit dem Namen der geraden Vierersysteme oder geraden Quadrupel bezeichet werden. Somit finden wir den

Lehrsatz.

Es giebt 60 gerade Vierersysteme, von denen 15 aus vier geraden, 45 aus zwei geraden und zwei ungeraden Thetafunktionen bestehen.

Wählen wir das Quadrupel (0, 12, 34, 5), so gestalten sich die Ausdrücke folgendermafsen:

$$\begin{aligned}
\vartheta_{03}((v))^2 . (\vartheta_2{}^4 - \vartheta_{01}{}^4) &= \vartheta_{23}{}^2 . \vartheta_2{}^2 . \vartheta_0((v))^2 - \vartheta_{23}{}^2 . \vartheta_{01}{}^2 . \vartheta_{12}((v))^2 \\
&\quad + \vartheta_{14}{}^2 . \vartheta_{01}{}^2 . \vartheta_{34}((v))^2 - \vartheta_{14}{}^2 . \vartheta_2{}^2 . \vartheta_5((v))^2, \\
(2) \quad \vartheta_{23}((v))^2 . (\vartheta_2{}^4 - \vartheta_{01}{}^4) &= -\vartheta_2{}^2 . \vartheta_{03}{}^2 . \vartheta_0((v))^2 + \vartheta_{01}{}^2 . \vartheta_{03}{}^2 . \vartheta_{12}((v))^2 \\
&\quad + \vartheta_4{}^2 . \vartheta_2{}^2 . \vartheta_{34}((v))^2 - \vartheta_4{}^2 . \vartheta_{01}{}^2 . \vartheta_5((v))^2, \\
\vartheta_{01}((v))^2 . ((\vartheta_2{}^4 - \vartheta_{01}{}^4) &= \vartheta_{14}{}^2 . \vartheta_4{}^2 . \vartheta_0((v))^2 + \vartheta_{23}{}^2 . \vartheta_{03}{}^2 . \vartheta_{12}((v))^2 \\
&\quad - \vartheta_{14}{}^2 . \vartheta_{03}{}^2 . \vartheta_{34}((v))^2 - \vartheta_{23}{}^2 . \vartheta_4{}^2 . \vartheta_5((v))^2.
\end{aligned}$$

Die übrigen Ausdrücke sind aus den soeben entwickelten durch Substitution halber Perioden zu erhalten.

Setzt man an Stelle der Anordnung:

5,	34,	12,	0
01,	2,	$-i.02$,	$-i.\ 1$
4,	$-i.\ 3$,	03,	$-i.04$
23,	$-i.24$,	$-i.13$,	$-\ \ 14$

eine beliebige der andern vorhin entwickelten Anordnungen, so erhält man die Quadrate sämtlicher Thetafunktionen linear ausgedrückt durch die Quadrate von vier beliebigen geraden Thetafunktionen, die ein gerades Vierersystem bilden. Aus diesen wiederum sind alle übrigen Darstellungen mit Hülfe der Substitution halber Perioden zu erhalten.

§ 9.*)

Die Relationen zwischen den Produkten von je zwei Thetafunktionen.

Es möge jetzt das Produkt zweier Thetafunktionen gebildet werden:

$$\vartheta[\gamma_1]((v)) \,.\, \vartheta[\gamma_2]((v)).$$

Sind die beiden Funktionen von einander verschieden, so stellt das Produkt eine Thetafunktion zweiter Ordnung dar, deren Charakteristik kongruent der Charakteristikensumme $[\gamma_1]+[\gamma_2]$ ist und daher jedenfalls einen von Null verschiedenen Wert besitzt. Hieraus folgt, dafs das Produkt nur zwei willkürliche Konstanten enthalten kann, oder also wir erhalten den

Lehrsatz.

Zwischen drei Produkten von je zwei Thetafunktionen, welche als Thetafunktionen zweiter Ordnung betrachtet dieselbe Charakteristik besitzen und zu gleicher Zeit gerade oder ungerade sind, besteht je eine lineare Relation.

Es ist nicht schwer, derartige Produkte zu bilden. Verstehen wir unter $[\beta_1], \cdots [\beta_6]$ wie früher die ungeraden Charakteristiken, so sind die drei Produkte:

$$\vartheta[\beta_1]((v)) \,.\, \vartheta[\beta_1+\beta_4+\beta_5]((v)); \quad \vartheta[\beta_2]((v)) \,.\, \vartheta[\beta_2+\beta_4+\beta_5]((v));$$
$$\vartheta[\beta_3]((v)) \,.\, \vartheta[\beta_3+\beta_4+\beta_5]((v))$$

ungerade Funktionen von v_1 und v_2, die sämtlich die Charakteristik

$$[\beta_4+\beta_5]$$

*) Cf. Weber und Krazer an den angeführten Orten.

besitzen. Demgemäfs mufs eine Relation von der Form existieren:

$$(1) \qquad \sum_{1}^{3}{}_{\varepsilon}\, c_{\varepsilon} \,.\, \vartheta[\beta_\varepsilon + \beta_4 + \beta_5]((v)) \,.\, \vartheta[\beta_\varepsilon]((v)) = 0.$$

Die Konstanten werden durch Substitution halber Perioden bestimmt. Wendet man die drei Substitutionen an, die den Charakteristiken entsprechen:

$$[\beta_1 + \beta_5], \quad [\beta_2 + \beta_5], \quad [\beta_3 + \beta_5],$$

so ergiebt sich die von Weber aufgestellte Formel:

$$(2) \qquad \sum_{1}^{3}{}_{\varepsilon} (-1)^{\Sigma h^{(\varepsilon)} \cdot g^{(0)}} \,.\, \vartheta[\beta_\varepsilon + \beta_4 + \beta_6]((0)) \,.\, \vartheta[\beta_\varepsilon + \beta_5 + \beta_6]((0))$$
$$.\, \vartheta[\beta_\varepsilon + \beta_4 + \beta_5]((v)) \,.\, \vartheta[\beta_\varepsilon]((v)) = 0.$$

Bei der angestellten Operation sind die Gröfsen $[\beta_4]$ und $[\beta_5]$ völlig willkürlich. Es repräsentiert die eine Formel also thatsächlich im ganzen 15 von einander verschiedene Formeln.

Durch Substitution halber Perioden können aus einer jeden der soeben definierten Formeln 15 weitere Formeln entwickelt werden, so dafs wir im Ganzen 240 Formeln erhalten. Dieselben sind aber paarweise einander gleich, da eine jede gerade Charakteristik auf doppelte Weise als Summe dreier ungeraden dargestellt werden kann. Es ergiebt sich also der

Lehrsatz.

Es existieren 120 lineare Relationen zwischen je drei Produkten von je zwei Thetafunktionen.

Weitere Relationen derselben Art können offenbar nicht existieren.

Es mögen unter Anwendung der Weierstrassischen Bezeichnungsweise analog wie früher 15 Formeln aufgestellt werden, aus denen die übrigen durch Substitution halber Perioden abgeleitet werden können.

$$\vartheta_4 \,.\, \vartheta_{23} \,.\, \vartheta_{04}((v)) \,.\, \vartheta_{14}((v)) + \vartheta_2 \,.\, \vartheta_{34} \,.\, \vartheta_{02}((v)) \,.\, \vartheta_{12}((v)) = \vartheta_{01} \,.\, \vartheta_5 \,.\, \vartheta_1((v)) \,.\, \vartheta_0((v)),$$
$$\vartheta_{03} \,.\, \vartheta_{23} \,.\, \vartheta_3((v)) \,.\, \vartheta_{14}((v)) + \vartheta_0 \,.\, \vartheta_2 \,.\, \vartheta_{02}((v)) \,.\, \vartheta_5((v)) = \vartheta_{12} \,.\, \vartheta_{01} \,.\, \vartheta_1((v)) \,.\, \vartheta_{34}((v)),$$
$$\vartheta_{03} \,.\, \vartheta_4 \,.\, \vartheta_{24}((v)) \,.\, \vartheta_{14}((v)) + \vartheta_0 \,.\, \vartheta_{34} \,.\, \vartheta_{02}((v)) \,.\, \vartheta_{01}((v)) = \vartheta_{12} \,.\, \vartheta_5 \,.\, \vartheta_1((v)) \,.\, \vartheta_2((v)),$$
$$(3) \quad \vartheta_5 \,.\, \vartheta_{34} \,.\, \vartheta_{13}((v)) \,.\, \vartheta_{14}((v)) + \vartheta_{12} \,.\, \vartheta_0 \,.\, \vartheta_{24}((v)) \,.\, \vartheta_{23}((v)) = \vartheta_{01} \,.\, \vartheta_2 \,.\, \vartheta_{04}((v)) \,.\, \vartheta_{03}((v)),$$
$$\vartheta_{34} \,.\, \vartheta_4 \,.\, \vartheta_{02}((v)) \,.\, \vartheta_{14}((v)) + \vartheta_0 \,.\, \vartheta_{03} \,.\, \vartheta_{24}((v)) \,.\, \vartheta_{01}((v)) = \vartheta_2 \,.\, \vartheta_{23} \,.\, \vartheta_{04}((v)) \,.\, \vartheta_{12}((v)),$$
$$\vartheta_4 \,.\, \vartheta_5 \,.\, \vartheta_1((v)) \,.\, \vartheta_{14}((v)) + \vartheta_{23} \,.\, \vartheta_{01} \,.\, \vartheta_{04}((v)) \,.\, \vartheta_0((v)) - \vartheta_{03} \,.\, \vartheta_{12} \,.\, \vartheta_{24}((v)) \,.\, \vartheta_2((v)),$$

$$
\begin{aligned}
&\vartheta_{34}.\vartheta_{01}.\vartheta_{1}(\!(v)\!).\vartheta_{12}(\!(v)\!)-\vartheta_{14}.\vartheta_{03}.\vartheta_{3}(\!(v)\!).\vartheta_{23}(\!(v)\!)=\vartheta_{2}.\vartheta_{5}.\vartheta_{02}(\!(v)\!).\vartheta_{0}(\!(v)\!),\\
&\vartheta_{0}.\vartheta_{5}.\vartheta_{1}(\!(v)\!).\vartheta_{01}(\!(v)\!)-\vartheta_{34}.\vartheta_{12}.\vartheta_{02}(\!(v)\!).\vartheta_{2}(\!(v)\!)=\vartheta_{14}.\vartheta_{23}.\vartheta_{04}(\!(v)\!).\vartheta_{4}(\!(v)\!),\\
&\vartheta_{0}.\vartheta_{01}.\vartheta_{1}(\!(v)\!).\vartheta_{5}(\!(v)\!)-\vartheta_{2}.\vartheta_{12}.\vartheta_{02}(\!(v)\!).\vartheta_{34}(\!(v)\!)=\vartheta_{14}.\vartheta_{4}.\vartheta_{04}(\!(v)\!).\vartheta_{23}(\!(v)\!),\\
&\vartheta_{5}.\vartheta_{03}.\vartheta_{3}(\!(v)\!).\vartheta_{0}(\!(v)\!)+\vartheta_{14}.\vartheta_{2}.\vartheta_{02}(\!(v)\!).\vartheta_{23}(\!(v)\!)=\vartheta_{12}.\vartheta_{4}.\vartheta_{04}(\!(v)\!).\vartheta_{34}(\!(v)\!),\\
(3)\ &\vartheta_{4}.\vartheta_{01}.\vartheta_{24}(\!(v)\!).\vartheta_{34}(\!(v)\!)+\vartheta_{0}.\vartheta_{14}.\vartheta_{02}(\!(v)\!).\vartheta_{03}(\!(v)\!)=\vartheta_{5}.\vartheta_{23}.\vartheta_{3}(\!(v)\!).\vartheta_{2}(\!(v)\!),\\
&\vartheta_{03}.\vartheta_{01}.\vartheta_{24}(\!(v)\!).\vartheta_{0}(\!(v)\!)+\vartheta_{34}.\vartheta_{14}.\vartheta_{02}(\!(v)\!).\vartheta_{4}(\!(v)\!)=\vartheta_{12}.\vartheta_{23}.\vartheta_{2}(\!(v)\!).\vartheta_{04}(\!(v)\!),\\
&\vartheta_{03}.\vartheta_{2}.\vartheta_{24}(\!(v)\!).\vartheta_{12}(\!(v)\!)+\vartheta_{14}.\vartheta_{5}.\vartheta_{1}(\!(v)\!).\vartheta_{4}(\!(v)\!)=\vartheta_{0}.\vartheta_{23}.\vartheta_{04}(\!(v)\!).\vartheta_{01}(\!(v)\!),\\
&\vartheta_{03}.\vartheta_{34}.\vartheta_{3}(\!(v)\!).\vartheta_{12}(\!(v)\!)+\vartheta_{14}.\vartheta_{01}.\vartheta_{1}(\!(v)\!).\vartheta_{23}(\!(v)\!)=\vartheta_{0}.\vartheta_{4}.\vartheta_{04}(\!(v)\!).\vartheta_{5}(\!(v)\!),\\
-&\vartheta_{2}.\vartheta_{4}.\vartheta_{13}(\!(v)\!).\vartheta_{0}(\!(v)\!)+\vartheta_{14}.\vartheta_{12}.\vartheta_{3}(\!(v)\!).\vartheta_{01}(\!(v)\!)=\vartheta_{34}.\vartheta_{23}.\vartheta_{03}(\!(v)\!).\vartheta_{1}(\!(v)\!).
\end{aligned}
$$

§ 10.*)

Andere Darstellung der Thetarelationen.

Wir haben bisher als einzige Thetafunktionen erster Ordnung die 16 ursprünglichen Funktionen in Betracht gezogen. Es ist nun nicht schwer, sich andere zu bilden, welche eine wesentlich andere Form besitzen. Wir wollen dazu Thetafunktionen in Betracht ziehen, deren Moduln gleich $2\tau_{11}$, $2\tau_{12}$, $2\tau_{22}$ sind und diese durch den grofsen Buchstaben Θ von den ursprünglichen unterscheiden. Nehmen wir nun an, dafs v_1, v_2; w_1, w_2 zwei Paare unabhängiger Argumente sind, so können wir uns bei beliebig vorgelegter Charakteristik $\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$ die vier Funktionen bilden:

$$
\Theta\begin{bmatrix} g_1+\varepsilon_1 & g_2+\varepsilon_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix}(\!(v+w)\!).\Theta\begin{bmatrix} g_1+\varepsilon_1 & g_2+\varepsilon_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix}(\!(v-w)\!),
$$
$$
\varepsilon_1 = 1, 0
$$
$$
\varepsilon_2 = 1, 0,
$$

und diese sowohl als Funktionen von v_1, v_2, als auch als Funktionen von w_1, w_2 ansehen. Dann folgt leicht, dafs sie in beiden Fällen ungeändert bleiben, wenn wir die Argumente um ganze Zahlen vermehren, es folgt ferner, dafs sie von einem leicht bestimmbaren Exponentialfaktor abgesehen in einander übergehen, wenn die Argumente um ganze Vielfache von den Gröfsen τ vermehrt werden. Mit wenigen Schlüssen ergiebt sich dann das Resultat, dafs die Gröfsen c_s als positive oder negative Einheit auf vierfache Weise derart bestimmt werden können, dafs die Summe

*) Cf. Caspary: Crelle 94.

$$\sum c_\varepsilon \,.\, \Theta\begin{bmatrix} g_1+\varepsilon_1 & g_2+\varepsilon_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix}(\!(v+w)\!) \,.\, \Theta\begin{bmatrix} g_1+\varepsilon_1 & g_2+\varepsilon_2 \\ h & h_2 \end{bmatrix}(\!(v-w)\!), \qquad \begin{matrix}\varepsilon_1 = 0,\,1\\ \varepsilon_2 = 0,\,1,\end{matrix}$$

sowohl als Funktion von v_1, v_2, als auch als Funktion von w_1, w_2 aufgefafst eine Thetafunktion erster Ordnung darstellt, sich also von Produkten von der Form:

$$\vartheta\begin{bmatrix} g' \\ h' \end{bmatrix}(\!(v)\!) \,.\, \vartheta\begin{bmatrix} g' \\ h' \end{bmatrix}(\!(w)\!)$$

nur um eine Konstante unterscheiden kann. Diese Konstante kann dann mit Hülfe der partiellen Differentialgleichung, welcher die Thetafunktionen Genüge leisten und der Reihenentwickelungen bestimmt werden. Indem wir die spezielle Charakteristik Null wählen und setzen:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \alpha_1 &= \Theta_5\,(\!(v+w)\!), & \beta_1 &= \Theta_5\,(\!(v-w)\!),\\ \alpha_2 &= \Theta_{01}(\!(v+w)\!), & \beta_2 &= \Theta_{01}(\!(v-w)\!),\\ \alpha_3 &= \Theta_4\,(\!(v+w)\!), & \beta_3 &= \Theta_4\,(\!(v-w)\!),\\ \alpha_4 &= \Theta_{23}(\!(v+w)\!), & \beta_4 &= \Theta_{23}(\!(v-w)\!), \end{aligned}$$

erhalten wir die Relationen:

$$(2)\qquad \begin{aligned} \vartheta_5\,(\!(v)\!)\,.\,\vartheta_5\,(\!(w)\!) &= \alpha_1\,.\,\beta_1 + \alpha_2\,.\,\beta_2 + \alpha_3\,.\,\beta_3 + \alpha_4\,.\,\beta_4,\\ \vartheta_{34}(\!(v)\!)\,.\,\vartheta_{34}(\!(w)\!) &= \alpha_1\,.\,\beta_1 + \alpha_2\,.\,\beta_2 - \alpha_3\,.\,\beta_3 - \alpha_4\,.\,\beta_4,\\ \vartheta_{12}(\!(v)\!)\,.\,\vartheta_{12}(\!(w)\!) &= \alpha_1\,.\,\beta_1 - \alpha_2\,.\,\beta_2 + \alpha_3\,.\,\beta_3 - \alpha_4\,.\,\beta_4,\\ \vartheta_0\,(\!(v)\!)\,.\,\vartheta_0\,(\!(w)\!) &= \alpha_1\,.\,\beta_1 - \alpha_2\,.\,\beta_2 - \alpha_3\,.\,\beta_3 + \alpha_4\,.\,\beta_4. \end{aligned}$$

Aufser der soeben betrachteten Kategorie von Formeln ergiebt sich durch Vermehrung um halbe Perioden eine weitere. Auch diese soll nur unter Zugrundelegung derselben Gröfsen α und β gebildet werden. Wir erhalten:

$$(3)\qquad \begin{aligned} \vartheta_{01}(\!(v)\!)\,.\,\vartheta_{01}(\!(w)\!) &= \alpha_1\,.\,\beta_2 + \alpha_2\,.\,\beta_1 + \alpha_3\,.\,\beta_4 + \alpha_4\,.\,\beta_3,\\ \vartheta_2\,(\!(v)\!)\,.\,\vartheta_2\,(\!(w)\!) &= \alpha_1\,.\,\beta_2 + \alpha_2\,.\,\beta_1 - \alpha_3\,.\,\beta_4 - \alpha_4\,.\,\beta_3,\\ \vartheta_{02}(\!(v)\!)\,.\,\vartheta_{02}(\!(w)\!) &= \alpha_1\,.\,\beta_2 - \alpha_2\,.\,\beta_1 + \alpha_3\,.\,\beta_4 - \alpha_4\,.\,\beta_3,\\ \vartheta_1\,(\!(v)\!)\,.\,\vartheta_1\,(\!(w)\!) &= \alpha_1\,.\,\beta_2 - \alpha_2\,.\,\beta_1 - \alpha_3\,.\,\beta_4 + \alpha_4\,.\,\beta_3,\\ \vartheta_4\,(\!(v)\!)\,.\,\vartheta_4\,(\!(w)\!) &= \alpha_1\,.\,\beta_3 + \alpha_2\,.\,\beta_4 + \alpha_3\,.\,\beta_1 + \alpha_4\,.\,\beta_2,\\ \vartheta_3\,(\!(v)\!)\,.\,\vartheta_3\,(\!(w)\!) &= \alpha_1\,.\,\beta_3 + \alpha_2\,.\,\beta_4 - \alpha_3\,.\,\beta_1 - \alpha_4\,.\,\beta_2,\\ \vartheta_{03}(\!(v)\!)\,.\,\vartheta_{03}(\!(w)\!) &= \alpha_1\,.\,\beta_3 - \alpha_2\,.\,\beta_4 + \alpha_3\,.\,\beta_1 - \alpha_4\,.\,\beta_2,\\ \vartheta_{04}(\!(v)\!)\,.\,\vartheta_{04}(\!(w)\!) &= \alpha_1\,.\,\beta_3 - \alpha_2\,.\,\beta_4 - \alpha_3\,.\,\beta_1 + \alpha_4\,.\,\beta_2, \end{aligned}$$

$$
(3) \qquad
\begin{aligned}
\vartheta_{23}(\!(v)\!) \,.\, \vartheta_{23}(\!(w)\!) &= \alpha_1 \,.\, \beta_4 + \alpha_2 \,.\, \beta_3 + \alpha_3 \,.\, \beta_2 + \alpha_4 \,.\, \beta_1, \\
\vartheta_{24}(\!(v)\!) \,.\, \vartheta_{24}(\!(w)\!) &= \alpha_1 \,.\, \beta_4 + \alpha_2 \,.\, \beta_3 - \alpha_3 \,.\, \beta_2 - \alpha_4 \,.\, \beta_1, \\
\vartheta_{13}(\!(v)\!) \,.\, \vartheta_{13}(\!(w)\!) &= \alpha_1 \,.\, \beta_4 - \alpha_2 \,.\, \beta_3 + \alpha_3 \,.\, \beta_2 - \alpha_4 \,.\, \beta_1, \\
\vartheta_{14}(\!(v)\!) \,.\, \vartheta_{14}(\!(w)\!) &= \alpha_1 \,.\, \beta_4 - \alpha_2 \,.\, \beta_3 - \alpha_3 \,.\, \beta_2 + \alpha_4 \,.\, \beta_1.
\end{aligned}
$$

Ist andrerseits:

$$
(4) \qquad y_k = a_{1k} \,.\, x_1 + a_{2k} \,.\, x_2 + a_{3k} \,.\, x_3 + a_{4k} \,.\, x_4, \quad {}_{k = 1,\, 2,\, 3,\, 4,}
$$

und wird durch diese Substitution:

$$
(5) \qquad y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2),
$$

so bestehen bekanntlich zwischen den Gröfsen a_{ik} eine Reihe von Gleichungen, welche für den Fall $a = 1$ in die Gleichungen der orthogonalen Substitution übergehen. Setzt man ferner aus den Elementen a_{ik} und den analogen Bedingungsgleichungen unterworfenen, neuen Elementen b_{ik} die Elemente g_{ik} so zusammen, dafs:

$$
(6) \qquad g_{ik} = a_{1i} \,.\, b_{1k} + a_{2i} \,.\, b_{2k} + a_{3i} \,.\, b_{3k} + a_{4i} \,.\, b_{4k}
$$

wird, so führt die Substitution:

$$
(7) \qquad y_k = g_{1k} \,.\, x_1 + g_{2k} \,.\, x_2 + g_{3k} \,.\, x_3 + g_{4k} \,.\, x_4
$$

ebenfalls die Summe der Quadrate der neuen Variablen in die Summe der Quadrate der ursprünglichen, multipliziert jedoch mit einem Faktor, über.

Es mögen jetzt für die Gröfsen a_{ik} und b_{ik} folgende gewählt werden, was jedenfalls erlaubt ist:

$$
\begin{array}{cccc}
\alpha_1, & -\alpha_2, & \alpha_3, & \alpha_4 \\
\alpha_2, & \alpha_1, & -\alpha_4, & \alpha_3 \\
-\alpha_3, & \alpha_4, & \alpha_1, & \alpha_2 \\
\alpha_4, & \alpha_3, & \alpha_2, & -\alpha_1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
\beta_1, & \beta_2, & -\beta_3, & \beta_4 \\
-\beta_2, & \beta_1, & \beta_4, & \beta_3 \\
\beta_3, & -\beta_4, & \beta_1, & \beta_2 \\
\beta_4, & \beta_3, & \beta_2, & -\beta_1,
\end{array}
$$

so gestalten sich die Gleichungen für die Gröfsen g_{ik} folgendermafsen:

$$
(8) \qquad
\begin{aligned}
g_{11} &= \alpha_1.\beta_1 - \alpha_2.\beta_2 - \alpha_3.\beta_3 + \alpha_4.\beta_4, & g_{21} &= \alpha_1.\beta_2 + \alpha_2.\beta_1 + \alpha_3.\beta_4 + \alpha_4.\beta_3, \\
g_{12} &= -(\alpha_1.\beta_2 + \alpha_2.\beta_1 - \alpha_3.\beta_4 - \alpha_4.\beta_3), & g_{22} &= \alpha_1.\beta_1 - \alpha_2.\beta_2 + \alpha_3.\beta_3 - \alpha_4.\beta_4, \\
g_{13} &= \alpha_1.\beta_3 + \alpha_2.\beta_4 + \alpha_3.\beta_1 + \alpha_4.\beta_2, & g_{23} &= -(\alpha_1.\beta_4 - \alpha_2.\beta_3 - \alpha_3.\beta_2 + \alpha_4.\beta_1), \\
g_{14} &= \alpha_1.\beta_4 - \alpha_2.\beta_3 + \alpha_3.\beta_2 - \alpha_4.\beta_1, & g_{24} &= \alpha_1.\beta_3 + \alpha_2.\beta_4 - \alpha_3.\beta_1 - \alpha_4.\beta_2,
\end{aligned}
$$

$$
(8)\quad
\begin{aligned}
g_{31} &= -(\alpha_1.\beta_3-\alpha_2.\beta_4+\alpha_3.\beta_1-\alpha_4.\beta_2), & g_{41} &= -(\alpha_1.\beta_4+\alpha_2.\beta_3-\alpha_3.\beta_2-\alpha_4.\beta_1),\\
g_{32} &= \alpha_1.\beta_4+\alpha_2.\beta_3+\alpha_3.\beta_2+\alpha_4.\beta_1, & g_{42} &= -(\alpha_1.\beta_3-\alpha_2.\beta_4-\alpha_3.\beta_1+\alpha_4.\beta_2),\\
g_{33} &= \alpha_1.\beta_1+\alpha_2.\beta_2-\alpha_3.\beta_3-\alpha_4.\beta_4, & g_{43} &= -(\alpha_1.\beta_2-\alpha_2.\beta_1+\alpha_3.\beta_4-\alpha_4.\beta_3),\\
g_{34} &= \alpha_1.\beta_2-\alpha_2.\beta_1-\alpha_3.\beta_4+\alpha_4.\beta_3, & g_{44} &= \alpha_1.\beta_1+\alpha_2.\beta_2+\alpha_3.\beta_3+\alpha_4.\beta_4.
\end{aligned}
$$

Dabei bestehen dann zwischen den Gröfsen g identisch die Relationen:

$$
(9)\quad
\begin{aligned}
g_{i1}.g_{k1}+g_{i2}.g_{k2}+g_{i3}.g_{k3}+g_{i4}.g_{k4} &= 0,\\
g_{1i}.g_{1k}+g_{2i}.g_{2k}+g_{3i}.g_{3k}+g_{4i}.g_{4k} &= 0, \qquad i, k = 1, 2, 3, 4,\\
g_{i1}^2+g_{i2}^2+g_{i3}^2+g_{i4}^2 &= g, \qquad i \gtrless k.\\
g_{1i}^2+g_{2i}^2+g_{3i}^2+g_{4i}^2 &= g,\\
g = (\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2)&(\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2+\beta_4^2).
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt der von Caspary aufgestellte

Lehrsatz.

Bedeuten v_1, v_2; w_1, w_2 zwei Paare unabhängiger Argumente, so bilden die sechzehn Thetaprodukte in der folgenden Anordnung:

$$
\begin{array}{llll}
\vartheta_0((v)).\vartheta_0((w)), & \vartheta_{01}((v)).\vartheta_{01}((w)), & -\vartheta_{03}((v)).\vartheta_{03}((w)), & -\vartheta_{24}((v)).\vartheta_{24}((w)),\\
-\vartheta_2((v)).\vartheta_2((w)), & \vartheta_{12}((v)).\vartheta_{12}((w)), & \vartheta_{23}((v)).\vartheta_{23}((w)), & -\vartheta_{04}((v)).\vartheta_{04}((w)),\\
\vartheta_4((v)).\vartheta_4((w)), & -\vartheta_{14}((v)).\vartheta_{14}((w)), & \vartheta_{34}((v)).\vartheta_{34}((w)), & -\vartheta_{02}((v)).\vartheta_{02}((w)),\\
\vartheta_{13}((v)).\vartheta_{13}((w)), & \vartheta_3((v)).\vartheta_3((w)), & \vartheta_1((v)).\vartheta_1((w)), & \vartheta_5((v)).\vartheta_5((w)),
\end{array}
$$

die Koefficienten einer linearen Substitution, welche die Summe der Quadrate der neuen vier Veränderlichen in die mit einem Faktor multiplizierte Summe der Quadrate der ursprünglichen vier Veränderlichen überführt.

Setzen wir $w_1 = w_2 = 0$ und dividieren jedes Element durch $\vartheta_5 . \vartheta_5(v_1, v_2)$, so ergiebt sich der

Lehrsatz.

Zwischen den neun Quotienten:

$$
\begin{array}{ccc}
\dfrac{\vartheta_0 . \vartheta_0((v))}{\vartheta_5 . \vartheta_5((v))}, & \dfrac{\vartheta_{01} . \vartheta_{01}((v))}{\vartheta_5 . \vartheta_5((v))}, & -\dfrac{\vartheta_{03} . \vartheta_{03}((v))}{\vartheta_5 . \vartheta_5((v))},\\[2ex]
-\dfrac{\vartheta_2 . \vartheta_2((v))}{\vartheta_5 . \vartheta_5((v))}, & \dfrac{\vartheta_{12} . \vartheta_{12}((v))}{\vartheta_5 . \vartheta_5((v))}, & \dfrac{\vartheta_{23} . \vartheta_{23}((v))}{\vartheta_5 . \vartheta_5((v))},\\[2ex]
\dfrac{\vartheta_4 . \vartheta_4((v))}{\vartheta_5 . \vartheta_5((v))}, & -\dfrac{\vartheta_{14} . \vartheta_{14}((v))}{\vartheta_5 . \vartheta_5((v))}, & \dfrac{\vartheta_{34} . \vartheta_{34}((v))}{\vartheta_5 . \vartheta_5((v))}
\end{array}
$$

bestehen die Bedingungsgleichungen der orthogonalen Substitution.

Es ist klar, dafs und wie die allgemeinen analogen Sätze aufgestellt werden können.

Die soeben entwickelten Sätze ersetzen dann sämtliche in den früheren Paragraphen aufgestellten Thetarelationen.

§ 11.*)

Die Thetafunktionen für die Nullwerte der Argumente.

Setzen wir in den Relationen, die wir für die Thetafunktionen gefunden haben $v_1 = v_2 = 0$, so ergeben sich Gleichungen, denen die Thetafunktionen für die Nullwerte der Argumente Genüge leisten. Dieselben lauten:

$$\begin{aligned}
&\vartheta_4^2 \cdot \vartheta_{23}^2 + \vartheta_2^2 \cdot \vartheta_{34}^2 = \vartheta_{01}^2 \cdot \vartheta_5^2, \\
&\vartheta_{03}^2 \cdot \vartheta_{23}^2 + \vartheta_0^2 \cdot \vartheta_2^2 = \vartheta_{12}^2 \cdot \vartheta_{01}^2, \\
&\vartheta_{03}^2 \cdot \vartheta_4^2 + \vartheta_0^2 \cdot \vartheta_{34}^2 = \vartheta_{12}^2 \cdot \vartheta_5^2, \\
&\vartheta_{34}^2 \cdot \vartheta_{01}^2 - \vartheta_{14}^2 \cdot \vartheta_{03}^2 = \vartheta_2^2 \cdot \vartheta_5^2, \\[1ex]
&\vartheta_{34}^2 \cdot \vartheta_{12}^2 + \vartheta_{14}^2 \cdot \vartheta_{23}^2 = \vartheta_0^2 \cdot \vartheta_5^2, \\
&\vartheta_{12}^2 \cdot \vartheta_2^2 + \vartheta_{14}^2 \cdot \vartheta_4^2 = \vartheta_0^2 \cdot \vartheta_{01}^2, \\
&\vartheta_{01}^2 \cdot \vartheta_2^2 + \vartheta_{12}^2 \cdot \vartheta_0^2 = \vartheta_5^2 \cdot \vartheta_{34}^2, \\
(1) \qquad -&\vartheta_{14}^2 \cdot \vartheta_2^2 + \vartheta_{12}^2 \cdot \vartheta_4^2 = \vartheta_5^2 \cdot \vartheta_{03}^2, \\[1ex]
&\vartheta_4^2 \cdot \vartheta_{01}^2 + \vartheta_0^2 \cdot \vartheta_{14}^2 = \vartheta_5^2 \cdot \vartheta_{23}^2, \\
&\vartheta_{34}^2 \cdot \vartheta_{14}^2 + \vartheta_{03}^2 \cdot \vartheta_{01}^2 = \vartheta_{12}^2 \cdot \vartheta_{23}^2, \\
&\vartheta_{03}^2 \cdot \vartheta_2^2 + \vartheta_{14}^2 \cdot \vartheta_5^2 = \vartheta_0^2 \cdot \vartheta_{23}^2, \\
&\vartheta_{03}^2 \cdot \vartheta_{34}^2 + \vartheta_{14}^2 \cdot \vartheta_{01}^2 = \vartheta_0^2 \cdot \vartheta_4^2, \\[1ex]
&\vartheta_{34}^2 \cdot \vartheta_4^2 - \vartheta_2^2 \cdot \vartheta_{23}^2 = \vartheta_0^2 \cdot \vartheta_{03}^2, \\
&\vartheta_2^2 \cdot \vartheta_4^2 + \vartheta_{14}^2 \cdot \vartheta_{12}^2 = \vartheta_{34}^2 \cdot \vartheta_{23}^2, \\
&\vartheta_{23}^2 \cdot \vartheta_{01}^2 + \vartheta_{03}^2 \cdot \vartheta_{12}^2 = \vartheta_4^2 \cdot \vartheta_5^2,
\end{aligned}$$

*) Cf. neben den früher citierten Arbeiten die Arbeit von Staude im 24ten Bande der Mathematischen Annalen.

$$
(1) \quad \begin{aligned}
\vartheta_4^4 + \vartheta_{03}^4 &= \vartheta_5^4 + \vartheta_{12}^4 - \vartheta_{34}^4 - \vartheta_0^4 , \\
\vartheta_{01}^4 + \vartheta_2^4 &= \vartheta_5^4 - \vartheta_{12}^4 + \vartheta_{34}^4 - \vartheta_0^4 , \\
\vartheta_{23}^4 + \vartheta_{14}^4 &= \vartheta_5^4 - \vartheta_{12}^4 - \vartheta_{34}^4 + \vartheta_0^4 , \\
\vartheta_4^4 - \vartheta_{03}^4 &= \vartheta_{01}^4 - \vartheta_2^4 = \vartheta_{23}^4 - \vartheta_{14}^4 .
\end{aligned}
$$

Diese Formeln lehren, dafs die zehn Funktionen ϑ_α nicht sämtlich von einander unabhängig sind, sondern sich durch vier unter ihnen oder durch vier andere Gröfsen ausdrücken lassen müssen. Greifen wir vier Thetafunktionen heraus, die ein gerades Vierersystem bilden, z. B. die Funktionen ϑ_5, ϑ_{34}, ϑ_{12}, ϑ_0, so ergeben sich folgende Resultate.

Setzt man (2):

$$
\alpha = \vartheta_5^2 + \vartheta_{12}^2 + \vartheta_{34}^2 + \vartheta_0^2 , \qquad \gamma = \vartheta_5^2 - \vartheta_{12}^2 + \vartheta_{34}^2 - \vartheta_0^2 ,
$$
$$
\beta = \vartheta_5^2 + \vartheta_{12}^2 - \vartheta_{34}^2 - \vartheta_0^2 , \qquad \delta = \vartheta_5^2 - \vartheta_{12}^2 - \vartheta_{34}^2 + \vartheta_0^2 ,
$$

so wird:

$$
(3) \quad \begin{aligned}
\vartheta_4^2 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{\alpha . \beta} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\gamma . \delta} , & \vartheta_{03}^2 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{\alpha . \beta} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\gamma . \delta} , \\
\vartheta_{01}^2 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{\alpha . \gamma} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\beta . \delta} , & \vartheta_2^2 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{\alpha . \gamma} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\beta . \delta} , \\
\vartheta_{23}^2 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{\alpha . \delta} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\beta . \gamma} , & \vartheta_{14}^2 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{\alpha . \delta} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\beta . \gamma} .
\end{aligned}
$$

Den sämtlichen Gleichungen wird jedenfalls Genüge geleistet, wenn die Vorzeichen aller Wurzeln positiv genommen werden. Umgekehrt sind aber aus den Gleichungen die Wurzeln nicht eindeutig bestimmt. Die eindeutige Zuordnung ist möglich, sobald die Moduln τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} eindeutig bestimmt sind, die zu den vier Funktionen ϑ_5, ϑ_{34}, ϑ_{12}, ϑ_0 gehören.

Eine andere Darstellungsform ist die Rosenhainsche.

Setzen wir:

$$
(4) \quad \varkappa^2 = \frac{\vartheta_{23}^2 . \vartheta_{01}^2}{\vartheta_4^2 . \vartheta_5^2} , \qquad \lambda^2 = \frac{\vartheta_2^2 . \vartheta_{23}^2}{\vartheta_{34}^2 . \vartheta_4^2} , \qquad \mu^2 = \frac{\vartheta_2^2 . \vartheta_{01}^2}{\vartheta_5^2 . \vartheta_{34}^2} ,
$$

so ergeben sich vermöge der Thetarelationen zunächst folgende Beziehungen:

$$
(5) \quad \begin{aligned}
\varkappa_1^2 &= 1 - \varkappa^2 = \frac{\vartheta_{03}^2 . \vartheta_{12}^2}{\vartheta_4^2 . \vartheta_5^2} , \qquad \lambda_1^2 = 1 - \lambda^2 = \frac{\vartheta_0^2 . \vartheta_{03}}{\vartheta_{34}^2 . \vartheta_4^2} , \\
\mu_1^2 &= 1 - \mu^2 = \frac{\vartheta_{12}^2 . \vartheta_0^2}{\vartheta_5^2 . \vartheta_{34}^2} ,
\end{aligned}
$$

$$\lambda_\varkappa^2 = \varkappa^2 - \lambda^2 = \frac{\vartheta_{14}^2 \cdot \vartheta_{03}^2 \cdot \vartheta_{23}^2}{\vartheta_{34}^2 \cdot \vartheta_4^2 \cdot \vartheta_5^2}, \quad \mu_\lambda^2 = \lambda^2 - \mu^2 = \frac{\vartheta_{14}^2 \cdot \vartheta_0^2 \cdot \vartheta_2^2}{\vartheta_{34}^2 \cdot \vartheta_4^2 \cdot \vartheta_5^2},$$

$$\mu_\varkappa^2 = \varkappa^2 - \mu^2 = \frac{\vartheta_{14}^2 \cdot \vartheta_{01}^2 \cdot \vartheta_{12}^2}{\vartheta_{34}^2 \cdot \vartheta_4^2 \cdot \vartheta_5^2}.$$

Hieraus lassen sich die Thetaquotienten unmittelbar durch die Gröfsen $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 ausdrücken und zwar erhalten wir die Formeln (6):

$$\frac{\vartheta_{12}^4}{\vartheta_5^4} = \frac{\varkappa_1^2 \cdot \mu_1^2}{\lambda_1^2}, \quad \frac{\vartheta_0^4}{\vartheta_5^4} = \frac{\varkappa^2 \cdot \mu_1^2 \cdot \mu_\lambda^2}{\lambda^2 \cdot \mu_\varkappa^2}, \quad \frac{\vartheta_{03}^4}{\vartheta_5^4} = \frac{\varkappa_1^2 \cdot \mu^2 \cdot \lambda_\varkappa^2}{\lambda^2 \cdot \mu_\varkappa^2},$$

$$\frac{\vartheta_{01}^4}{\vartheta_5^4} = \frac{\varkappa^2 \cdot \mu^2}{\lambda^2}, \quad \frac{\vartheta_{23}^4}{\vartheta_5^4} = \frac{\varkappa^2 \cdot \mu_1^2 \cdot \lambda_\varkappa^2}{\lambda_1^2 \cdot \mu_\varkappa^2}, \quad \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_5^4} = \frac{\varkappa_1^2 \cdot \mu^2 \cdot \mu_\lambda^2}{\lambda_1^2 \cdot \mu_\varkappa^2},$$

$$\frac{\vartheta_{14}^4}{\vartheta_5^4} = \frac{\lambda_\varkappa^2 \cdot \mu_\lambda^2}{\lambda^2 \cdot \lambda_1^2}, \quad \frac{\vartheta_{34}^4}{\vartheta_5^4} = \frac{\varkappa^2 \cdot \varkappa_1^2 \cdot \mu_\lambda^2}{\lambda^2 \cdot \lambda_1^2 \cdot \mu_\varkappa^2}, \quad \frac{\vartheta_4^4}{\vartheta_5^4} = \frac{\mu^2 \cdot \mu_1^2 \cdot \lambda_\varkappa^2}{\lambda^2 \cdot \lambda_1^2 \cdot \mu_\varkappa^2}.$$

In vielen Beziehungen symmetrischer und übersichtlicher gestalten sich die Formeln, wenn wir setzen:

$$(7)\ \varkappa^2 = \frac{a_2 - a_1 \cdot a_0 - a_3}{a_3 - a_1 \cdot a_0 - a_2}, \quad \lambda^2 = \frac{a_2 - a_1 \cdot a_0 - a_4}{a_4 - a_1 \cdot a_0 - a_2}, \quad \mu^2 = \frac{a_2 - a_1 \cdot a_0 - a_5}{a_5 - a_1 \cdot a_0 - a_2}.$$

Hierbei sind $a_0, \ldots a_5$ sechs Gröfsen, von denen drei, etwa a_0, a_1, a_2, beliebig angenommen werden können, während dann die drei übrigen aus den vorliegenden Gleichungen eindeutig bestimmt sind. Für den speziellen Fall:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \infty, \quad a_2 = 1$$

wird dann:

$$a_3 = \varkappa^2, \quad a_4 = \lambda^2, \quad a_5 = \mu^2.$$

Bei diesen Definitionen wird:

$$\varkappa_1^2 = \frac{a_1 - a_0 \cdot a_2 - a_3}{a_1 - a_3 \cdot a_2 - a_0}, \qquad \lambda_1^2 = \frac{a_1 - a_0 \cdot a_2 - a_4}{a_1 - a_4 \cdot a_2 - a_0},$$

$$(8) \qquad \mu_1^2 = \frac{a_1 - a_0 \cdot a_2 - a_5}{a_1 - a_5 \cdot a_2 - a_0},$$

$$\lambda_\varkappa^2 = \frac{a_1 - a_2 \cdot a_1 - a_0 \cdot a_3 - a_4}{a_1 - a_3 \cdot a_1 - a_4 \cdot a_2 - a_0}, \quad \mu_\lambda^2 = \frac{a_1 - a_2 \cdot a_1 - a_0 \cdot a_4 - a_5}{a_1 - a_4 \cdot a_1 - a_5 \cdot a_2 - a_0},$$

$$\mu_\varkappa^2 = \frac{a_1 - a_2 \cdot a_1 - a_0 \cdot a_3 - a_5}{a_1 - a_3 \cdot a_1 - a_5 \cdot a_2 - a_0},$$

und es nehmen die vierten Potenzen der Thetaquotienten folgende Form an:

$$
\begin{aligned}
\frac{\vartheta_{12}{}^4}{\vartheta_5{}^4} &= \frac{a_1 - a_4 \,.\, a_2 - a_5 \,.\, a_2 - a_3 \,.\, a_1 - a_0}{a_1 - a_3 \,.\, a_2 - a_0 \,.\, a_2 - a_4 \,.\, a_1 - a_5}, \\
\frac{\vartheta_0{}^4}{\vartheta_5{}^4} &= \frac{a_1 - a_0 \,.\, a_2 - a_5 \,.\, a_3 - a_0 \,.\, a_4 - a_5}{a_1 - a_5 \,.\, a_2 - a_0 \,.\, a_3 - a_5 \,.\, a_4 - a_0}, \\
\frac{\vartheta_{03}{}^4}{\vartheta_5{}^4} &= \frac{a_1 - a_0 \,.\, a_2 - a_3 \,.\, a_3 - a_4 \,.\, a_5 - a_0}{a_1 - a_3 \,.\, a_2 - a_3 \,.\, a_3 - a_5 \,.\, a_4 - a_0}, \\
\frac{\vartheta_{23}{}^4}{\vartheta_5{}^4} &= \frac{a_1 - a_2 \,.\, a_2 - a_5 \,.\, a_3 - a_4 \,.\, a_3 - a_0}{a_1 - a_3 \,.\, a_2 - a_4 \,.\, a_2 - a_0 \,.\, a_3 - a_5}, \\
\frac{\vartheta_2{}^4}{\vartheta_5{}^4} &= \frac{a_1 - a_2 \,.\, a_2 - a_3 \,.\, a_4 - a_5 \,.\, a_5 - a_0}{a_1 - a_5 \,.\, a_2 - a_0 \,.\, a_2 - a_4 \,.\, a_3 - a_5}, \qquad (9) \\
\frac{\vartheta_{14}{}^4}{\vartheta_5{}^4} &= \frac{a_1 - a_2 \,.\, a_1 - a_0 \,.\, a_3 - a_4 \,.\, a_4 - a_5}{a_1 - a_3 \,.\, a_1 - a_5 \,.\, a_2 - a_4 \,.\, a_4 - a_0}, \\
\frac{\vartheta_{34}{}^4}{\vartheta_5{}^4} &= \frac{a_1 - a_4 \,.\, a_2 - a_3 \,.\, a_3 - a_0 \,.\, a_4 - a_5}{a_1 - a_3 \,.\, a_2 - a_4 \,.\, a_3 - a_5 \,.\, a_4 - a_0}, \\
\frac{\vartheta_4{}^4}{\vartheta_5{}^4} &= \frac{a_1 - a_4 \,.\, a_2 - a_5 \,.\, a_3 - a_4 \,.\, a_5 - a_6}{a_1 - a_5 \,.\, a_2 - a_4 \,.\, a_3 - a_5 \,.\, a_4 - a_0}, \\
\frac{\vartheta_{01}{}^4}{\vartheta_5{}^4} &= \frac{a_0 - a_3 \,.\, a_2 - a_1 \,.\, a_0 - a_5 \,.\, a_4 - a_1}{a_3 - a_1 \,.\, a_5 - a_1 \,.\, a_0 - a_2 \,.\, a_0 - a_4}.
\end{aligned}
$$

Die Thetaquotienten selbst sind aus diesen Formeln nicht eindeutig bestimmt. Es ist dieses auch nicht möglich, so lange von den Thetarelationen allein ausgegangen wird.

Wir wollen nun die Festsetzung treffen, dafs, wenn

$$i > k, \sqrt{a_i - a_k}$$

immer einen bestimmten für alle i und k, die unter der gemachten Voraussetzung möglich sind, eindeutig festgesetzten Wert besitze. Unter der vierten Wurzel:

$$\sqrt[4]{(a_i - a_k)\,(a_{i'} - a_{k'}) \ldots},$$

wo $i > k$, $i' > k'$, ... soll alsdann das Produkt verstanden werden:

$$\sqrt[4]{(a_i - a_k)} \cdot \sqrt[4]{a_{i'} - a_{k'}} \ldots$$

und in diesem die einzelnen Faktoren in dem festgesetzten Sinne verstanden werden.

Sind die Gröfsen τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} vorgelegt, so müssen die vierten Wurzeln so bestimmt werden, dafs den Ausdrücken für die Thetaquotienten Genüge geleistet wird.

§ 12.*)

Die Göpelschen biquadratischen Relationen.

Aufser den bisher aufgestellten Thetarelationen giebt es noch weitere, die zuerst von Göpel aufgedeckt worden sind. Verstehen wir unter $\vartheta_\alpha(v_1, v_2)$, $\vartheta_\beta(v_1, v_2)$, $\vartheta_\gamma(v_1, v_2)$, $\vartheta_\delta(v_1, v_2)$ vier Thetafunktionen, die ein gerades Vierersystem bilden, so werden die vierten Potenzen dieser Funktionen Thetafunktionen 4ter Ordnung mit der Charakteristik Null, die überdies gerade sind. Dasselbe gilt von den Quadraten der Produkte zu je 2, den Gröfsen $\vartheta_\alpha(v_1, v_2)^2 \cdot \vartheta_\beta(v_1, v_2)^2$ etc., dasselbe gilt endlich von dem Produkte aller vier Thetafunktionen. Wir erhalten auf diese Weise 11 Thetafunktionen 4ter Ordnung mit der Charakteristik Null, die sämtlich gerade sind. Dann folgt aber, dafs zwischen ihnen eine lineare Relation bestehen mufs. Die Koefficienten bestimmen sich analog wie früher mit Hülfe der Substitution halber Perioden. Greifen wir das Quadrupel

$$\vartheta_5(v_1, v_2), \quad \vartheta_{34}(v_1, v_2), \quad \vartheta_{12}(v_1, v_2), \quad \vartheta_0(v_1, v_2)$$

heraus und setzen:

$$(1) \qquad \begin{aligned} &\vartheta_5(v_1, v_2) = w, \; \vartheta_{34}(v_1, v_2) = x, \; \vartheta_{12}(v_1, v_2) = y, \; \vartheta_0(v_1, v_2) = z, \\ &\vartheta_5 \qquad\quad = w_0, \; \vartheta_{34} \qquad\quad = x_0, \; \vartheta_{12} \qquad\quad = y_0, \; \vartheta_0 \qquad\quad = z_0, \end{aligned}$$

so nimmt die Relation nach einigen wenigen Rechnungen die Form an:

$$(2) \qquad \begin{aligned} &w^4 + x^4 + y^4 + z^4 \\ &+ 2\,\frac{w_0 \cdot x_0 \cdot y_0 \cdot z_0 \prod\limits_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} (w_0^2 + \varepsilon_1 \cdot x_0^2 + \varepsilon_2 \cdot y_0^2 + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot z_0^2)}{(w_0^2 \cdot x_0^2 - y_0^2 \cdot z_0^2)(w_0^2 \cdot y_0^2 - x_0^2 \cdot z_0^2)(w_0^2 \cdot z_0^2 - x_0^2 \cdot y_0^2)} \cdot w \cdot x \cdot y \cdot z \\ &- \frac{w_0^4 + x_0^4 - y_0^4 - z_0^4}{w_0^2 \cdot x_0^2 - y_0^2 \cdot z_0^2}\,(w^2 \cdot x^2 + y^2 \cdot z^2) \\ &- \frac{w_0^4 + y_0^4 - x_0^4 - z_0^4}{w_0^2 \cdot y_0^2 - x_0^2 \cdot z_0^2}\,(w^2 \cdot y^2 + z^2 \cdot x^2) \\ &- \frac{w_0^4 + z_0^4 - x_0^4 - y_0^4}{w_0^2 \cdot z_0^2 - x_0^2 \cdot y_0^2}\,(w^2 \cdot z^2 + x^2 \cdot y^2) = 0. \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \varepsilon_1, \varepsilon_2 = 1, -1. \end{aligned}$$

Es hat diese Gleichung die Eigenschaft, ungeändert zu bleiben:

I) wenn man die Gröfsen w, x, y, z und w_0, x_0, y_0, z_0 gleichzeitig derselben Permutation unterwirft;

*) Aus der reichen Litteratur über diesen Gegenstand möge hier nur aufser auf die früher genannten Arbeiten auf die Arbeit von Borchardt im 83ten Bande des Crelleschen Journals verwiesen werden.

II) wenn man w_0, x_0, y_0, z_0 unverändert läfst, dagegen die Gröfsen w, x, y, z in zwei Paare teilt und die Gröfsen jedes Paares vertauscht;

III) wenn man von den vier Gröfsenpaaren w, w_0; x, x_0; y, y_0; z, z_0 eins negativ nimmt oder zwei mit i multipliciert;

IV) wenn man w_0, x_0, y_0, z_0 unverändert läfst und von den Gröfsen w, x, y, z zwei negativ nimmt. Bezeichnet man mit φ die linke Seite der Gleichung, so wird φ identisch gleich Null, wenn $w = w_0$, $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ gesetzt wird.

Bildet man ferner:

$$(3) \qquad 4\,\varphi_1 = w \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial w} + x \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} - z \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

so ergiebt sich:

$$(4) \qquad \varphi_1 = w^4 + x^4 - y^4 - z^4 - \frac{w_0^4 + x_0^4 - y_0^4 - z_0^4}{w_0^2 \cdot x_0^2 - y_0^2 \cdot z_0^2} (w^2 \cdot x^2 - y^2 \cdot z^2),$$

welches für $w = w_0$, $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ ebenfalls verschwindet, und da dasselbe für:

$$(5) \qquad \begin{aligned} 4\,\varphi_2 &= w \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial w} - x \cdot \frac{\partial \varphi}{d x} + y \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} - z \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \\ 4\,\varphi_3 &= w \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial w} - x \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{aligned}$$

der Fall ist, so verschwinden für:

$$w = w_0,\ x = x_0,\ y = y_0,\ z = z_0$$

gleichzeitig $\frac{\partial \varphi}{\partial w}$, $\frac{\partial \varphi}{d x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$. Hieraus folgt, dafs unsere Gleichung eine Oberfläche vierter Ordnung darstellt, welche den Punkt w_0, x_0, y_0, z_0 als Knotenpunkt besitzt.

Nach der unter II) und IV) bemerkten Unveränderlichkeit der Funktion φ gehen aus dem einen Punkte noch weitere 15 hervor, so dafs die Fläche im Ganzen 16 Knotenpunkte besitzt.

Ersetzen wir das zu Grunde gelegte Quadrupel durch ein beliebiges gerades, in welchem die Reihenfolge und die Faktoren, mit denen die einzelnen Funktionen zu multiplizieren sind, aus der Tabelle ersichtlich sind, die in § 8 aufgestellt worden ist, so erhalten wir 14 neue biquadratische Relationen. Um z. B. die Relation zwischen den Funktionen:

$$\vartheta_2(v_1, v_2),\ \vartheta_4(v_1, v_2),\ \vartheta_{14}(v_1, v_2),\ \vartheta_{12}(v_1, v_2)$$

zu erhalten, haben wir zu setzen:

$$w = \vartheta_2(v_1, v_2),\ x = j\cdot\vartheta_4(v_1, v_2),\ y = i\cdot\vartheta_{14}(v_1, v_2),\ z = -j\cdot\vartheta_{12}(v_1, v_2),$$
$$w_0 = \vartheta_2 \qquad ,\ x_0 = j\cdot\vartheta_4 \qquad ,\ y_0 = i\cdot\vartheta_{14} \qquad ,\ z_0 = -j\cdot\vartheta_{12}.$$

Aus den auf diese Weise erhaltenen 15 biquadratischen Relationen folgen durch Substitution halber Perioden 45 weitere, denen die Funktionen der ungeraden Vierersysteme Genüge leisten. Da die Quadrate aller Thetafunktionen sich linear durch die Quadrate von vier ausdrücken lassen, die ein gerades Vierersystem bilden, so folgt aus dem vorhin bemerkten, dafs nur drei Thetafunktionen willkürlich bleiben können, während die übrigen sich algebraisch durch dieselben ausdrücken lassen oder es folgt auch, dafs von allen Quotienten von Thetafunktionen nur zwei willkürlich sein können.

§ 13.*)

Das Additionstheorem der Thetafunktionen. Spezielle Formen.

Die Theorie, wie sie bisher entwickelt worden ist, beruht wesentlich auf der Aufstellung und Vergleichung von Thetafunktionen n^{ter} Ordnung. Solche Thetafunktionen n^{ter} Ordnung können auf unendlich mannigfache Weise gebildet werden. Wir fassen jetzt das Produkt ins Auge:

$$\vartheta[\omega](v_1 + w_1,\ v_1 + w_2)\,.\,\vartheta[\omega](v_1 - w_1,\ v_2 - w_2),$$

so kann dieses sowohl als Funktion von v_1 und v_2, als auch als Funktion von w_1 und w_2 angesehen werden. In beiden Fällen kann es als Thetafunktion zweiter Ordnung angesehen werden, deren Charakteristik Null, die überdies gerade ist. Dann können aber alle die Betrachtungen, die bei der Herleitung der linearen Relationen zwischen den Quadraten der Thetafunktionen angestellt worden sind, unmittelbar übertragen werden.

Es läfst sich dieses Produkt auf doppelte Weise darstellen, wenn wir es etwa als Funktion von v_1 und v_2 ansehen. Erstens läfst es sich linear durch die Quadrate von vier Thetafunktionen eines ungeraden Vierersystems und zweitens durch solche eines geraden Vierersystems ausdrücken.

Im ersten Falle ergiebt sich die Formel:

---

*) Cf. nebst den früher genannten Arbeiten die Abhandlungen von Königsberger im 64ten und 65ten Bande des Crelleschen Journals und die Abhandlung des Verfassers über die Multiplikation der hyperelliptischen Funktionen im 17ten Bande der Mathematischen Annalen.

$$(1)\quad \vartheta[\beta_0]((0))^2 . \vartheta[\omega]((v+w)) . \vartheta[\omega]((v-w))$$

$$= \sum_0^3 (-1)^{\Sigma(g^{(0)}+g^{(\varepsilon)})(h^{(\varepsilon)}+h)} . \vartheta[\beta_0+\beta_\varepsilon+\omega]((w)) . \vartheta[\beta_0+\beta_\varepsilon+\omega]((-w)) . \vartheta[\beta_\varepsilon]((v))^2,$$

aus der alle übrigen nach bekannten Methoden herzuleiten sind.

Unter Anwendung der Weierstrassischen Bezeichnungsweise ergiebt sich, wenn überdies gesetzt wird:

$$(2)\quad \vartheta_\alpha(v_1+w_1,\, v_2+w_2) = P_\alpha;\ \vartheta_\alpha(v_1-w_1,\, v_2-w_2) = Q_\alpha,$$
$$\vartheta_\alpha(v_1,\, v_2) = p_\alpha,\ \vartheta_\alpha(w_1,\, w_2) = q_\alpha,$$

das von Königsberger aufgestellte Gleichungssystem (3):

$$\begin{aligned}
\vartheta_5^2 . P_5 . Q_5 &= p_5^2 . q_5^2 + p_1^2 . q_1^2 + p_3^2 . q_3^2 + p_{13}^2 . q_{13}^2,\\
\vartheta_5^2 . P_0 . Q_0 &= p_5^2 . q_0^2 + p_1^2 . q_{01}^2 + p_3^2 . q_{03}^2 + p_{13}^2 . q_{24}^2,\\
\vartheta_5^2 . P_1 . Q_1 &= -p_5^2 . q_1^2 + p_1^2 . q_5^2 - p_3^2 . q_{13}^2 + p_{13}^2 . q_3^2,\\
\vartheta_5^2 . P_2 . Q_2 &= p_5^2 . q_2^2 - p_1^2 . q_{12}^2 + p_3^2 . q_{23}^2 - p_{13}^2 . q_{04}^2,\\
\vartheta_5^2 . P_3 . Q_3 &= -p_5^2 . q_3^2 + p_1^2 . q_{13}^2 + p_3^2 . q_5^2 - p_{13}^2 . q_1^2,\\
\vartheta_5^2 . P_4 . Q_4 &= p_5^2 . q_4^2 - p_1^2 . q_{14}^2 - p_3^2 . q_{34}^2 + p_{13}^2 . q_{02}^2,\\
\vartheta_5^2 . P_{01} . Q_{01} &= p_5^2 . q_{01}^2 - p_1^2 . q_0^2 + p_3^2 . q_{24}^2 - p_{13}^2 . q_{03}^2,\\
\vartheta_5^2 . P_{02} . Q_{02} &= -p_5^2 . q_{02}^2 + p_1^2 . q_{34}^2 - p_3^2 . q_{14}^2 + p_{13}^2 . q_4^2,\\
\vartheta_5^2 . P_{03} . Q_{03} &= p_5^2 . q_{03}^2 - p_1^2 . q_{24}^2 - p_3^2 . q_0^2 + p_{13}^2 . q_{01}^2,\\
\vartheta_5^2 . P_{04} . Q_{01} &= -p_5^2 . q_{04}^2 + p_1^2 . q_{23}^2 + p_3^2 . q_{12}^2 - p_{13}^2 . q_2^2,\\
\vartheta_5^2 . P_{12} . Q_{12} &= p_5^2 . q_{12}^2 + p_1^2 . q_2^2 + p_3^2 . q_{04}^2 + p_{13}^2 . q_{23}^2,\\
\vartheta_5^2 . P_{13} . Q_{13} &= -p_5^2 . q_{13}^2 - p_1^2 . q_3^2 + p_3^2 . q_1^2 + p_{13}^2 . q_5^2,\\
\vartheta_5^2 . P_{14} . Q_{14} &= p_5^2 . q_{14}^2 + p_1^2 . q_4^2 - p_3^2 . q_{02}^2 - p_{13}^2 . q_{34}^2,\\
\vartheta_5^2 . P_{23} . Q_{23} &= p_5^2 . q_{23}^2 + p_1^2 . q_{04}^2 - p_3^2 . q_2^2 - p_{13}^2 . q_{12}^2,\\
\vartheta_5^2 . P_{24} . Q_{24} &= -p_5^2 . q_{24}^2 - p_1^2 . q_{03}^2 + p_3^2 . q_{01}^2 + p_{13}^2 . q_0^2,\\
\vartheta_5^2 . P_{34} . Q_{34} &= p_5^2 . q_{34}^2 + p_1^2 . q_{02}^2 + p_3^2 . q_4^2 + p_{13}^2 . q_{14}^2.
\end{aligned}$$

In analoger Weise können die betrachteten Produkte mit Hülfe der geraden Vierersysteme dargestellt werden.

Wählen wir das Vierersystem mit den Indices 5, 34, 12, 0, so ergeben sich folgende Beziehungen.

Setzt man:

$$
(4)\quad
\begin{aligned}
a &= 2.\vartheta_{12}^2.\vartheta_{34}^2.\vartheta_5^2 + \vartheta_0^2(\vartheta_0^4 - \vartheta_{12}^4 - \vartheta_{34}^4 - \vartheta_5^4),\\
b &= 2.\vartheta_{34}^2.\vartheta_5^2.\vartheta_0^2 + \vartheta_{12}^2(\vartheta_{12}^4 - \vartheta_{34}^4 - \vartheta_5^4 - \vartheta_0^4),\\
c &= 2.\vartheta_5^2.\vartheta_0^2.\vartheta_{12}^2 + \vartheta_{34}^2(\vartheta_{34}^4 - \vartheta_5^4 - \vartheta_0^4 - \vartheta_{12}^4),\\
d &= 2.\vartheta_0^2.\vartheta_{12}^2.\vartheta_{34}^2 + \vartheta_5^2(\vartheta_5^4 - \vartheta_0^4 - \vartheta_{12}^4 - \vartheta_{34}^4),
\end{aligned}
$$

so wird (5):

$$
\begin{aligned}
P_0.Q_0.\prod_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}&(\vartheta_0^2 + \varepsilon_1.\vartheta_{12}^2 + \varepsilon_2.\vartheta_{34}^2 + \varepsilon_1.\varepsilon_2.\vartheta_5^2)\\
&= a(p_0^2.q_0^2 + p_{12}^2.q_{12}^2 + p_{34}^2.q_{34}^2 + p_5^2.q_5^2)\\
&+ b(p_0^2.q_{12}^2 + q_0^2.p_{12}^2 + p_5^2.q_{34}^2 + p_{34}^2.q_5^2)\\
&+ c(p_0^2.q_{34}^2 + p_{34}^2.q_0^2 + p_5^2.q_{12}^2 + p_{12}^2.q_5^2)\\
&+ d(p_0^2.q_5^2 + p_5^2.q_0^2 + p_{34}^2.q_{12}^2 + p_{12}^2.q_{34}^2),\\
&\qquad\qquad \varepsilon_1,\varepsilon_2 = 1, -1.
\end{aligned}
$$

Ferner ergeben sich die Ausdrücke (6):

$$
\begin{aligned}
P_{03}.Q_{03}(\vartheta_{03}^4 - \vartheta_4^4) &= \vartheta_{03}^2(-p_0^2.q_0^2 + p_{12}^2.q_{12}^2 - p_{34}^2.q_{34}^2 + p_5^2.q_5^2)\\
&+ \vartheta_4^2(p_0^2.q_{34}^2 + p_{34}^2.q_0^2 - p_{12}^2.q_5^2 - p_5^2.q_{12}^2),\\
P_{23}.Q_{23}(\vartheta_{23}^4 - \vartheta_{14}^4) &= -\vartheta_{23}^2(-p_0^2.q_0^2 + p_{12}^2.q_{12}^2 + p_{34}^2.q_{34}^2 - p_5^2.q_5^2)\\
&+ \vartheta_{14}^2(p_0^2.q_5^2 + p_5^2.q_0^2 - p_{34}^2.q_{12}^2 - p_{12}^2.q_{34}^2),\\
P_2.Q_2(\vartheta_2^4 - \vartheta_{01}^4) &= \vartheta_2^2(-p_0^2.q_0^2 - p_{12}^2.q_{12}^2 + p_{34}^2.q_{34}^2 + p_5^2.q_5^2)\\
&+ \vartheta_{01}^2(p_0^2.q_{12}^2 + p_{12}^2.q_0^2 - p_5^2.q_{34}^2 - p_{34}^2.q_5^2).
\end{aligned}
$$

Die übrigen Ausdrücke sind aus den soeben aufgestellten durch Substitution halber Perioden zu entwickeln. Mit Hülfe der früher angegebenen Methoden können dann die Darstellungen durch ein beliebiges anderes gerades Quadrupel gegeben werden. In ähnlicher Weise sind die Ausdrücke zu untersuchen:

$$\vartheta[\omega]((v + w)).\vartheta[\omega']((v - w)),$$

wobei ω und ω' zwei von einander verschiedene Charakteristiken bedeuten. Das Produkt ist sowohl als Funktion von v_1, v_2, als auch als Funktion von w_1, w_2 eine Thetafunktion 2ter Ordnung mit der Charakteristik $[\omega + \omega']$ und kann daher nach gegebenen Regeln durch die ursprünglichen Thetafunktionen ausgedrückt werden. Es ergiebt sich auf diese Weise die Formel (7):

$$\begin{aligned}
&\vartheta[\beta_2+\beta_3+\beta_4]((0)).\vartheta[\beta_2+\beta_3+\beta_5]((0)).\vartheta[\beta_1]((v+w)).\vartheta[\beta_1+\beta_4+\beta_5]((v-w)) \\
&= \vartheta[\beta_1]((w)).\vartheta[\beta_1+\beta_4+\beta_5]((w)).\vartheta[\beta_2+\beta_3+\beta_4]((v)).\vartheta[\beta_2+\beta_3+\beta_5]((v)) \\
&+ (-1)^{\Sigma(g^{(2)}+g^{(4)})(h^{(1)}+h^{(3)})}.\vartheta[\beta_1+\beta_2+\beta_4]((w)).\vartheta[\beta_1+\beta_2+\beta_5]((w)) \\
&\qquad\qquad .\vartheta[\beta_3+\beta_4+\beta_5]((v)).\vartheta[\beta_3]((v)) \\
&+ (-1)^{\Sigma(g^{(3)}+g^{(4)})(h^{(1)}+h^{(2)})}.\vartheta[\beta_1+\beta_3+\beta_4]((w)).\vartheta[\beta_1+\beta_3+\beta_5]((w)) \\
&\qquad\qquad .\vartheta[\beta_2+\beta_4+\beta_5]((v)).\vartheta[\beta_2]((v)) \\
&+ (-1)^{\Sigma(g^{(1)}+g^{(6)})h^{(1)}}.\vartheta[\beta_6]((w)).\vartheta[\beta_4+\beta_5+\beta_6]((w)).\vartheta[\beta_4]((v)).\vartheta[\beta_5]((v)).
\end{aligned}$$

Aus derselben sind alle übrigen mit leichter Mühe abzuleiten. Bei Anwendung der Weierstrassischen Beziehungsweise ergiebt sich so u. a. das von Königsberger aufgestellte System (8):

$$\begin{aligned}
\vartheta_5 .\vartheta_5 .P_5 .Q_5 &= p_5 \cdot p_5 \cdot q_5 \cdot q_5 + p_1 \cdot p_1 \cdot q_1 \cdot q_1 + p_3 \cdot p_3 \cdot q_3 \cdot q_3 \\
&\qquad + p_{13} \cdot p_{13} \cdot q_{13} \cdot q_{13}, \\
\vartheta_5 .\vartheta_0 .P_0 .Q_5 &= p_5 \cdot p_0 \cdot q_5 \cdot q_0 + p_1 \cdot p_{01} \cdot q_1 \cdot q_{01} + p_3 \cdot p_{03} \cdot q_3 \cdot q_{03} \\
&\qquad + p_{13} \cdot p_{24} \cdot q_{13} \cdot q_{24}, \\
\vartheta_4 .\vartheta_{14} .P_1 .Q_5 &= p_5 \cdot p_1 \cdot q_4 \cdot q_{14} + p_0 \cdot p_{01} \cdot q_{04} \cdot q_{23} - p_2 \cdot p_{12} \cdot q_{24} \cdot q_{03} \\
&\qquad - p_{02} \cdot p_{34} \cdot q_{13} \cdot q_3, \\
\vartheta_5 .\vartheta_2 .P_2 .Q_5 &= p_5 \cdot p_2 \cdot q_5 \cdot q_2 - p_1 \cdot p_{12} \cdot q_1 \cdot q_{12} + p_3 \cdot p_{23} \cdot q_3 \cdot q_{23} \\
&\qquad - p_{13} \cdot p_{04} \cdot q_{13} \cdot q_{04}, \\
\vartheta_2 .\vartheta_{23} .P_3 .Q_5 &= p_5 \cdot p_3 \cdot q_2 \cdot q_{23} + p_0 \cdot p_{03} \cdot q_{02} \cdot q_{14} + p_4 \cdot p_{34} \cdot q_{24} \cdot q_{01} \\
&\qquad + p_{04} \cdot p_{12} \cdot q_{13} \cdot q_1, \\
\vartheta_5 .\vartheta_4 .P_4 .Q_5 &= p_5 \cdot p_4 \cdot q_5 \cdot q_4 - p_1 \cdot p_{14} \cdot q_1 \cdot q_{14} - p_3 \cdot p_{34} \cdot q_3 \cdot q_{34} \\
&\qquad + p_{13} \cdot p_{02} \cdot q_{13} \cdot q_{02}, \\
\vartheta_5 .\vartheta_{01} .P_{01} .Q_5 &= p_5 \cdot p_{01} \cdot q_5 \cdot q_{01} - p_1 \cdot p_0 \cdot q_1 \cdot q_0 + p_3 \cdot p_{24} \cdot q_3 \cdot q_{24} \\
&\qquad - p_{13} \cdot p_{03} \cdot q_{13} \cdot q_{03}, \\
\vartheta_2 .\vartheta_0 .P_{02} .Q_5 &= p_5 \cdot p_{02} \cdot q_2 \cdot q_0 + p_0 \cdot p_2 \cdot q_{02} \cdot q_5 - p_4 \cdot p_{13} \cdot q_{24} \cdot q_{04} \\
&\qquad - p_{04} \cdot p_{24} \cdot q_{13} \cdot q_4, \\
\vartheta_5 .\vartheta_{03} .P_{03} .Q_5 &= p_5 \cdot p_{03} \cdot q_5 \cdot q_{03} - p_1 \cdot p_{24} \cdot q_1 \cdot q_{24} - p_3 \cdot p_0 \cdot q_3 \cdot q_0 \\
&\qquad + p_{13} \cdot p_{01} \cdot q_{13} \cdot q_{01}, \\
\vartheta_4 .\vartheta_0 .P_{04} .Q_5 &= p_5 \cdot p_{04} \cdot q_4 \cdot q_0 + p_0 \cdot p_4 \cdot q_{04} \cdot q_5 + p_2 \cdot p_{13} \cdot q_{24} \cdot q_{02} \\
&\qquad + p_{02} \cdot p_{24} \cdot q_{13} \cdot q_2, \\
\vartheta_5 .\vartheta_{12} .P_{12} .Q_5 &= p_5 \cdot p_{12} \cdot q_5 \cdot q_{12} + p_1 \cdot p_2 \cdot q_1 \cdot q_2 + p_3 \cdot p_{04} \cdot q_3 \cdot q_{04} \\
&\qquad + p_{13} \cdot p_{23} \cdot q_{13} \cdot q_{23}, \\
\vartheta_{03} .\vartheta_{01} .P_{13} .Q_5 &= p_5 \cdot p_{13} \cdot q_{03} \cdot q_{01} - p_0 \cdot p_{24} \cdot q_3 \cdot q_1 - p_1 \cdot p_3 \cdot q_{24} \cdot q_0 \\
&\qquad + p_{01} \cdot p_{03} \cdot q_{13} \cdot q_5,
\end{aligned}$$

$$\vartheta_5 \,.\, \vartheta_{14} \,.\, P_{14} \,.\, Q_5 = p_5 \cdot p_{14} \cdot q_5 \cdot q_{14} + p_1 \cdot p_4 \cdot q_1 \cdot q_4 - p_3 \cdot p_{02} \cdot q_3 \cdot q_{02} - p_{13} \cdot p_{34} \cdot q_{13} \cdot q_{34},$$

$$\vartheta_5 \,.\, \vartheta_{23} \,.\, P_{23} \,.\, Q_5 = p_5 \cdot p_{23} \cdot q_5 \cdot q_{23} + p_1 \cdot p_{04} \cdot q_1 \cdot q_{04} - p_3 \cdot p_2 \cdot q_3 \cdot q_2 - p_{13} \cdot p_{12} \cdot q_{13} \cdot q_{12},$$

$$\vartheta_4 \,.\, \vartheta_2 \,.\, P_{24} \,.\, Q_5 = p_5 \cdot p_{24} \cdot q_4 \cdot q_2 - p_0 \cdot p_{13} \cdot q_{04} \cdot q_{02} + p_2 \cdot p_4 \cdot q_{24} \cdot q_5 - p_{02} \cdot p_{04} \cdot q_{13} \cdot q_0,$$

$$\vartheta_5 \,.\, \vartheta_{34} \,.\, P_{34} \,.\, Q_5 = p_5 \cdot p_{34} \cdot q_5 \cdot q_{34} + p_1 \cdot p_{02} \cdot q_1 \cdot q_{02} + p_3 \cdot p_4 \cdot q_3 \cdot q_4 + p_{13} \cdot p_{14} \cdot q_{13} \cdot q_{14}.$$

§ 14.*)

Das Additionstheorem. Allgemeine Form.

Zu noch allgemeineren Thetafunktionen erster Ordnung, als sie in § 10 betrachtet worden sind, kann man auf folgende Weise gelangen.

Setzt man:

$$(1) \quad \begin{aligned} u_1 + v_1 + w_1 + t_1 &= 2u_1', & u_2 + v_2 + w_2 + t_2 &= 2u_2', \\ u_1 + v_1 - w_1 - t_1 &= 2v_1', & u_2 + v_2 - w_2 - t_2 &= 2v_2', \\ u_1 - v_1 + w_1 - t_1 &= 2w_1', & u_2 - v_2 + w_2 - t_2 &= 2w_2', \\ u_1 - v_1 - w_1 + t_1 &= 2t_1', & u_2 - v_2 - w_2 + t_2 &= 2t_2', \end{aligned}$$

so ist das Produkt:

$$4\vartheta[0]((u')) \,.\, \vartheta[0]((v')) \,.\, \vartheta[0)((w')) \,.\, \vartheta(0)((t'))$$

eine Thetafunktion erster Ordnung eines jeden der Paare von Veränderlichen u_1', u_2'; v_1', v_2'; w_1', w_2'; t_1', t_2'.

Bilden wir andrerseits das Produkt:

$$\vartheta[0]((u)) \,.\, \vartheta[0]((v)) \,.\, \vartheta[0]((w)) \,.\, \vartheta[0]((t)),$$

so geht dieser Ausdruck, wenn wir ihn, was jedenfalls erlaubt ist, als Funktion von u_1', u_2' ansehen, bei der Vermehrung der Argumente um ganze Zahlen und um Vielfache der Moduln, von einer Exponentialgröſse abgesehen, in Ausdrücke von der Form über:

$$\vartheta[\varepsilon]((u)) \,.\, \vartheta[\varepsilon]((v)) \,.\, \vartheta[\varepsilon]((w)) \,.\, \vartheta[\varepsilon]((t)),$$

wo ε eine der sechszehn Normalcharakteristiken bedeutet.

Hieraus folgt leicht, daſs der Ausdruck:

$$\sum \vartheta[\varepsilon]((u)) \,.\, \vartheta[\varepsilon]((v)) \,.\, \vartheta[\varepsilon]((w)) \,.\, \vartheta[\varepsilon]((t)),$$

*) Cf. Prym: Crelle 93.

bei welchem die Summe nach ε über alle Normalcharakteristiken zu nehmen ist, als Funktion von u_1', u_2' betrachtet eine Thetafunktion erster Ordnung ist; es folgt ferner, daſs sie dieselbe Charakteristik als die Funktion:

$$\vartheta[0]((u')) \,.\, \vartheta[0]((v')) \,.\, \vartheta[0]((w')) \,.\, \vartheta[0]((t'))$$

besitzt. Hieraus folgt, daſs:

$$\begin{aligned} (2) \qquad & 4\,\vartheta[0]((u')) \,.\, \vartheta[0]((v')) \,.\, \vartheta[0]((w')) \,.\, \vartheta[0]((t')) \\ & = c \sum^{\varepsilon} \vartheta[\varepsilon]((u)) \,.\, \vartheta[\varepsilon]((v)) \,.\, \vartheta[\varepsilon]((w)) \,.\, \vartheta[\varepsilon]((t)) \end{aligned}$$

ist. Dabei ist c sicherlich von u_1' und u_2' unabhängig. Ganz analog aber würde folgen, daſs es auch von v_1' und v_2', w_1' und w_2', t_1' und t_2' unabhängig sein muſs.

Unter Zuhülfenahme der partiellen Differentialgleichungen, denen die Thetafunktionen Genüge leisten, folgt dann leicht, daſs die Konstante auch von den Gröſsen τ unabhängig sein muſs.

Setzen wir die Fourierschen Entwicklungen der Thetafunktionen links und rechts ein, so folgt als Wert der Konstanten die Einheit oder also wir erhalten die Gleichung:

$$\begin{aligned} (3) \qquad & 4\,\vartheta[0]((u')) \,.\, \vartheta[0]((v')) \,.\, \vartheta[0]((w')) \,.\, \vartheta[0]((t')) \\ & = \sum^{\varepsilon} \vartheta[\varepsilon]((u)) \,.\, \vartheta[\varepsilon]((v)) \,.\, \vartheta[\varepsilon]((w)) \,.\, \vartheta[\varepsilon]((t)). \end{aligned}$$

Genau analog ergiebt sich die folgende Formel, die als Riemannsche Fundamentalformel bezeichnet werden möge:

$$\begin{aligned} (4) \qquad & 4\,\vartheta[\eta]((u')) \,.\, \vartheta[\eta+\varrho]((v')) \,.\, \vartheta[\eta+\sigma]((w')) \,.\, \vartheta[\eta-\varrho-\sigma]((t')) \\ & = \sum (-1)^{(\varepsilon)(\eta)} . \vartheta[\varepsilon]((u)) . \vartheta[\eta+\varrho]((v)) . \vartheta[\varepsilon+\sigma]((w)) . \vartheta[\varepsilon-\varrho-\sigma]((t)). \end{aligned}$$

In ihr bezeichnen $[\eta+\varrho]$, $[\eta+\sigma]$, $[\eta-\varrho-\sigma]$ drei Charakteristiken, deren Elemente sich aus den entsprechenden Elementen der drei willkürlich wählbaren Charakteristiken $[\eta]$, $[\varrho]$, $[\sigma]$ in der durch die Bezeichnung markirten Weise zusammensetzen, während die drei rechts stehenden Charakteristiken $[\varepsilon+\varrho]$, $[\varepsilon+\sigma]$, $[\varepsilon-\varrho-\sigma]$ in gleicher Weise aus $[\varepsilon]$, $[\varrho]$, $[\sigma]$ entstehen. Es vertritt ferner das Symbol $(-1)^{(\varepsilon)(\eta)}$ den Ausdruck:

$$(-1)^{\varepsilon_1 \cdot \eta_1' + \varepsilon_1' \cdot \eta_1 + \varepsilon_2 \cdot \eta_2' + \varepsilon_2' \cdot \eta_2},$$

wobei $[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_1' & \varepsilon_2' \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \end{bmatrix}$, $\eta = \begin{bmatrix} \eta_1' & \eta_2' \\ \eta_1 & \eta_2 \end{bmatrix}$ gesetzt ist. Endlich ist die Summation auf der rechten Seite über alle Normalcharakteristiken $[\varepsilon]$ zu erstrecken.

Es kann diese Formel als Fundament einer allgemeinen Theorie der Thetafunktionen gebraucht werden, welche von zwei Veränderlichen abhängen. Es hat dieses Krazer in seinem Werke „Theorie der zweifach unendlichen Thetareihen auf Grund der Riemannschen Thetaformel“ wirklich durchgeführt.

§ 15.*)

Die Rosenhainschen Differentialformeln. Erster Beweis.

Aufser den Thetarelationen, die bisher entwickelt worden sind, giebt es noch solche, die zwischen den Differentialquotienten der Thetafunktionen für die Nullwerte der Argumente und den Thetafunktionen selbst bestehen. Um diese zu entwickeln, gehen wir zu den Relationen zurück, die in § 3 entwickelt worden sind.

Setzt man:

$$\begin{aligned} a &= \vartheta_5\,(2v_1,\ 2v_2,\ 4\tau_{11},\ 4\tau_{12},\ 4\tau_{22}),\\ b &= \vartheta_{01}(2v_1,\ 2v_2,\ 4\tau_{11},\ 4\tau_{12},\ 4\tau_{22}),\\ c &= \vartheta_4\,(2v_1,\ 2v_2,\ 4\tau_{11},\ 4\tau_{12},\ 4\tau_{22}),\\ d &= \vartheta_{23}(2v_1,\ 2v_2,\ 4\tau_{11},\ 4\tau_{12},\ 4\tau_{22}), \end{aligned}$$

so bestehen die Formeln:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \vartheta_5\,(v_1,\ v_2,\ \tau_{11},\ \tau_{12},\ \tau_{22}) &= a+b+c+d,\\ \vartheta_{34}(v_1,\ v_2,\ \tau_{11},\ \tau_{12},\ \tau_{22}) &= a+b-c-d,\\ \vartheta_{12}(v_1,\ v_2,\ \tau_{11},\ \tau_{12},\ \tau_{22}) &= a-b+c-d,\\ \vartheta_0\,(v_1,\ v_2,\ \tau_{11},\ \tau_{12},\ \tau_{22}) &= a-b-c+d. \end{aligned}$$

Setzen wir ferner in den Formeln (6) des § 13 $v_1 = w_1$, $v_2 = w_2$, so erhalten wir u. a. die Gleichung:

$$\begin{aligned} (2)\qquad & 2\vartheta_2(\vartheta_{01}{}^4-\vartheta_2{}^4)\,\vartheta_2(2v_1,\ 2v_2)\\ &= (\vartheta_{01}{}^2-\vartheta_2{}^2)\left(\vartheta_5(v_1,v_2)^2+\vartheta_{34}(v_1,v_2)^2+\vartheta_{12}(v_1,v_2)^2+\vartheta_0(v_1,v_2)^2\right)\\ &\qquad\cdot\left(\vartheta_5(v_1,\ v_2)^2+\vartheta_{34}(v_1,\ v_2)^2-\vartheta_{12}(v_1,\ v_2)^2-\vartheta_0(v_1,\ v_2)^2\right)\\ &\quad-(\vartheta_{01}{}^2+\vartheta_2{}^2)\left(\vartheta_5(v_1,\ v_2)^2-\vartheta_{34}(v_1,\ v_2)^2+\vartheta_{12}(v_1,\ v_2)^2-\vartheta_0(v_1,\ v_2)^2\right)\\ &\qquad\cdot\left(\vartheta_5(v_1,\ v_2)^2-\vartheta_{34}(v_1,\ v_2)^2-\vartheta_{12}(v_1,\ v_2)^2+\vartheta_0(v_1,\ v_2)^2\right). \end{aligned}$$

---

*) Cf. des Verfassers Arbeit im 26ten Bande der Mathematischen Annalen. Überdies möge auf die gleichzeitig erschienene Arbeit von Frobenius im 98ten Bande des Crelleschen Journals verwiesen werden.

Unter Berücksichtigung der Formeln (1) folgt hieraus:

$$\vartheta_2(\vartheta_{01}^4-\vartheta_2^4)\vartheta_2(2v_1,2v_2)=16(\vartheta_{01}^2-\vartheta_2^2)(a^2+b^2+c^2+d^2)(a.b+c.d)$$
$$-32(\vartheta_{01}^2+\vartheta_2^2)(a.c+b.d)(a.d+b.c).$$

Setzen wir in dieser Gleichung links und rechts an Stelle von $2v_1$, $2v_2$ resp. v_1, v_2, bezeichnen ferner die Thetafunktionen mit den Moduln $4\tau_{11}$, $4\tau_{12}$, $4\tau_{22}$ durch grofse Buchstaben, so folgt:

$$(3)\qquad \vartheta_2.(\vartheta_{01}^4-\vartheta_2^4).\vartheta_2(v_1,v_2)$$
$$=16(\vartheta_{01}^2-\vartheta_2^2)\big(\Theta_5(v_1,v_2)^2+\Theta_{01}(v_1,v_2)^2+\Theta_4(v_1,v_2)^2+\Theta_{23}(v_1,v_2)\big)$$
$$\cdot\big(\Theta_5(v_1,v_2).\Theta_{01}(v_1,v_2)+\Theta_4(v_1,v_2)+\Theta_{23}.(v_1,v_2)\big)$$
$$-32(\vartheta_{01}^2+\vartheta_2^2)\big(\Theta_5(v_1,v_2).\Theta_4(v_1,v_2)+\Theta_{23}(v_1,v_2).\Theta_{01}(v_1,v_2)\big)$$
$$\cdot\big(\Theta_5(v_1,v_2).\Theta_{23}(v_1,v_2)+\Theta_{01}(v_1,v_2).\Theta_4(v_1,v_2)\big).$$

Durch Substitution halber Perioden, indem an Stelle von v_1, v_2 resp. $v_1-\frac{1}{2}$, $v_2-\frac{1}{2}$ gesetzt wird, folgt hieraus die Gleichung:

$$(4)\qquad \vartheta_2.(\vartheta_{01}^4-\vartheta_2^4).\vartheta_{02}(v_1,v_2)$$
$$=16(\vartheta_{01}^2-\vartheta_2^2).\big(\Theta_0(v_1,v_2)^2+\Theta_1(v_1,v_2)^2+\Theta_{04}(v_1,v_2)^2+\Theta_{14}(v_1,v_2)^2\big)$$
$$\cdot\big(\Theta_0(v_1,v_2).\Theta_1(v_1,v_2)+\Theta_{04}(v_1,v_2).\Theta_{14}(v_1,v_2)\big)$$
$$-32(\vartheta_{01}^2+\vartheta_2^2)\big(\Theta_0(v_1,v_2).\Theta_{04}(v_1,v_2)+\Theta_{14}(v_1,v_2).\Theta_1(v_1,v_2)\big)$$
$$\cdot\big(\Theta_0(v_1,v_2).\Theta_{14}(v_1,v_2)+\Theta_1(v_1,v_2).\Theta_{04}(v_1,v_2)\big).$$

Genau so folgt die Gleichung:

$$(5)\qquad \vartheta_{01}(\vartheta_{01}^4-\vartheta_2^4)\vartheta_1(v_1,v_2)$$
$$=16(\vartheta_{01}^2-\vartheta_2^2)\big(\Theta_0(v_1,v_2)^2+\Theta_1(v_1,v_2)^2+\Theta_{04}(v_1,v_2)^2+\Theta_{14}(v_1,v_2)^2\big)$$
$$\cdot\big(\Theta_0(v_1,v_2).\Theta_1(v_1,v_2)+\Theta_{04}(v_1,v_2).\Theta_{14}(v_1,v_2)\big)$$
$$+32(\vartheta_{01}^2+\vartheta_2^2)\big(\Theta_0(v_1,v_2).\Theta_{04}(v_1,v_2)+\Theta_{14}(v_1,v_2).\Theta_1(v_1,v_2)\big)$$
$$\cdot\big(\Theta_0(v_1,v_2).\Theta_{14}(v_1,v_2)+\Theta_1(v_1,v_2).\Theta_{04}(v_1,v_2)\big).$$

Bilden wir die Funktionaldeterminante von $\vartheta_{02}(v_1,v_2)$, $\vartheta_1(v_1,v_2)$, setzen $v_1=v_2=0$ und führen die Abkürzungen ein:

$$\vartheta_\alpha'(v_1)_0.\vartheta_\beta'(v_2)_0-\vartheta_\alpha'(v_2)_0.\vartheta_\beta'(v_1)_0=(\alpha,\beta)$$
$$\Theta_\alpha'(v_1)_0.\Theta_\beta'(v_2)_0-\Theta_\alpha'(v_2)_0.\Theta_\beta'(v_1)_0=(\alpha,\beta)',$$

so folgt:

$$\vartheta_2.\vartheta_{01}(\vartheta_{01}^4-\vartheta_2^4)(02,1)=16.16.4.\Theta_0.\Theta_{14}(\Theta_0^4-\Theta_{14}^4)(1,04)'.$$

Unter Berücksichtigung der Thetarelation:

$$\Theta_4.\Theta_{23}.\Theta_{04}(v_1,v_2).\Theta_{14}(v_1,v_2)$$
$$=\Theta_{01}.\Theta_5.\Theta_1(v_1,v_2).\Theta_0(v_1,v_2)-\Theta_2.\Theta_{34}.\Theta_{02}(v_1,v_2).\Theta_{12}(v_1,v_2)$$

kann die letzte Gleichung geschrieben werden:

$$(6)\quad \vartheta_2.\vartheta_{01}.(\vartheta_{01}^4-\vartheta_2^4)(02,1)$$
$$=16.16.4.\Theta_0.\Theta_{14}.\Theta_{34}.\Theta_{12}.\Theta_{03}.\Theta_2.(\Theta_0^4-\Theta_{14}^4)\frac{(02,1)'}{\Theta_{14}.\Theta_{03}.\Theta_4.\Theta_{23}}.$$

Nun folgt aus Gleichung (3), wenn wir an Stelle von v_2: $v_2-\frac{1}{2}$ setzen für $v_1=v_2=0$:

$$\vartheta_2.\vartheta_{01}(\vartheta_{01}^2+\vartheta_2^2)=16.\Theta_2.\Theta_{34}(\Theta_{34}^2+\Theta_2^2).$$

Genau so wird:

$$\vartheta_{03}.\vartheta_4(\vartheta_4^2+\vartheta_{03}^2)=16\Theta_{03}.\Theta_{12}(\Theta_{12}^2+\Theta_{03}^2),$$
$$\vartheta_{14}.\vartheta_{23}(\vartheta_{23}^2+\vartheta_{14}^2)=16\Theta_0.\Theta_{14}(\Theta_{14}^2+\Theta_0^2).$$

Mithin kann Gleichung (6) in die Form gebracht werden:

$$\frac{(02,1)}{\vartheta_{14}.\vartheta_{03}.\vartheta_4.\vartheta_{23}}=\frac{(02,1)'}{\Theta_{14}.\Theta_{03}.\Theta_4.\Theta_{23}}\cdot\frac{(\Theta_0^2-\Theta_{14}^2)(\vartheta_{23}^2+\vartheta_{14}^2)(\vartheta_4^2+\vartheta_{03}^2)}{4.(\vartheta_{01}^2-\vartheta_2^2)(\Theta_{12}^2+\Theta_{03}^2)(\Theta_{34}^2+\Theta_2^2)}$$

oder da:

$$\frac{(\vartheta_{23}^2+\vartheta_{14}^2).(\vartheta_4^2+\vartheta_{03}^2)}{\vartheta_{01}^2-\vartheta_2^2}=\vartheta_5^2+\vartheta_{34}^2+\vartheta_{12}^2+\vartheta_0^2$$
$$=4(\Theta_5^2+\Theta_{01}^2+\Theta_4^2+\Theta_{23}^2),$$

$$\frac{(02,1)}{\vartheta_{14}.\vartheta_{03}.\vartheta_4.\vartheta_{23}}=\frac{(02,1)'}{\Theta_{14}.\Theta_{03}.\Theta_4.\Theta_{23}}\cdot\frac{(\Theta_5^2+\Theta_{01}^2+\Theta_4^2+\Theta_{23}^2)(\Theta_0^2-\Theta_{14}^2)}{(\Theta_{12}^2+\Theta_{03}^2)(\Theta_{34}^2+\Theta_2^2)}$$

oder also:

$$(7)\quad \frac{(02,1)}{\vartheta_{14}.\vartheta_{03}.\vartheta_4.\vartheta_{23}}=\frac{(02,1)'}{\Theta_{14}.\Theta_{03}.\Theta_4.\Theta_{23}}.$$

Die linke Seite bleibt demnach ungeändert, wenn an Stelle von τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} resp. gesetzt: $4^n\tau_{11}$, $4^n\tau_{12}$, $4^n\tau_{22}$. Lassen wir n immer gröfser und gröfser werden, so folgt:

$$(8)\quad (02,1)=\pi^2.\vartheta_{14}.\vartheta_{03}.\vartheta_4.\vartheta_{23}.$$

Derartige Formeln existieren noch weitere 14, welche lauten:

$$(9)\quad \begin{aligned}
(3,24)&=\pi^2.\vartheta_{12}.\vartheta_0.\vartheta_{03}.\vartheta_{14},\\
(04,3)&=\pi^2.\vartheta_{01}.\vartheta_2.\vartheta_{23}.\vartheta_{14},\\
(1,3)&=\pi^2.\vartheta_5.\vartheta_0.\vartheta_4.\vartheta_2,\\
(02,3)&=\pi^2.\vartheta_{12}.\vartheta_{34}.\vartheta_{01}.\vartheta_4,\\
(13,3)&=\pi^2.\vartheta_5.\vartheta_{34}.\vartheta_{03}.\vartheta_{23},\\
(1,04)&=\pi^2.\vartheta_{34}.\vartheta_{12}.\vartheta_2.\vartheta_{03},\\
(02,04)&=\pi^2.\vartheta_5.\vartheta_0.\vartheta_{03}.\vartheta_{01},\\
(13,04)&=\pi^2.\vartheta_{12}.\vartheta_0.\vartheta_4.\vartheta_{23},
\end{aligned}$$

$$
(9)\qquad
\begin{aligned}
(04,\ 24) &= \pi^2 \,.\, \vartheta_5 \,.\, \vartheta_{34} \,.\, \vartheta_4 \,.\, \vartheta_{14}, \\
(13,\ 1) &= \pi^2 \,.\, \vartheta_5 \,.\, \vartheta_{12} \,.\, \vartheta_{01} \,.\, \vartheta_{14}, \\
(02,\ 1) &= \pi^2 \,.\, \vartheta_{23} \,.\, \vartheta_4 \,.\, \vartheta_{03} \,.\, \vartheta_{14}, \\
(1,\ 24) &= \pi^2 \,.\, \vartheta_{01} \,.\, \vartheta_0 \,.\, \vartheta_{34} \,.\, \vartheta_{23}, \\
(13,\ 02) &= \pi^2 \,.\, \vartheta_{34} \,.\, \vartheta_0 \,.\, \vartheta_2 \,.\, \vartheta_{14}, \\
(02,\ 24) &= \pi^2 \,.\, \vartheta_{12} \,.\, \vartheta_5 \,.\, \vartheta_2 \,.\, \vartheta_{23}, \\
(13,\ 24) &= \pi^2 \,.\, \vartheta_2 \,.\, \vartheta_{03} \,.\, \vartheta_4 \,.\, \vartheta_{01}.
\end{aligned}
$$

Es sind diese Differentialformeln zuerst von Rosenhain aufgestellt worden.

§ 16.

Die Rosenhainschen Differentialformeln. Zweiter Beweis.

Aus den partiellen Differentialgleichungen, welchen die Thetafunktionen Genüge leisten, folgt durch nochmalige Differentiation:

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial^3 \vartheta_\alpha(v_1,\ v_2)}{\partial v_\varepsilon^{\,2} . \partial v_{\varepsilon_1}} &= 4\pi i \cdot \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1,\ v_2)}{\partial \tau_{\varepsilon\varepsilon} . \partial v_{\varepsilon_1}}, \\
\frac{\partial^3 \vartheta_\alpha(v_1,\ v_2)}{\partial v_1 . \partial v_2 . \partial v_{\varepsilon_1}} &= 2\pi i \cdot \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1,\ v_2)}{\partial \tau_{12} . \partial v_{\varepsilon_1}}.
\end{aligned}
\qquad {\scriptstyle \varepsilon,\ \varepsilon_1 = 1,\ 2.}
$$

Ferner ergiebt sich aus den Formeln des § 13 unmittelbar:

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
&\vartheta_2 . \vartheta_{23} \left(\vartheta_5(v_1,\ v_2) \cdot \frac{\partial \vartheta_3(v_1,\ v_2)}{\partial v_\varepsilon} - \vartheta_3(v_1,\ v_2) \cdot \frac{\partial \vartheta_5(v_1,\ v_2)}{\partial v_\varepsilon} \right) \\
&= \vartheta_{14} \,.\, \vartheta_{02}'(v_\varepsilon)_0 \,.\, \vartheta_0(v_1,\ v_2) \,.\, \vartheta_{03}(v_1,\ v_2) \\
&\qquad + \vartheta_{01} \,.\, \vartheta_{24}'(v_\varepsilon)_0 \,.\, \vartheta_4(v_1,\ v_2) \,.\, \vartheta_{34}(v_1,\ v_2).
\end{aligned}
$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^m \vartheta_\alpha(v_1,\ v_2)}{\partial v_1^{\,r} . \partial v_2^{\,m-r}} \right)_{v_1 = v_2 = 0} &= \vartheta_\alpha^{\,m}(v_1^{\,r},\ v_2^{\,m-r})_0, \\
\left(\frac{\partial^m \vartheta_\alpha(v_1,\ v_2)}{\partial v_\varepsilon^{\,m}} \right)_{v_1 = v_2 = 0} &= \vartheta_\alpha^{\,m}(v_\varepsilon^{\,m})_0,
\end{aligned}
$$

so folgen durch zweimalige Differentiation die folgenden sechs Formeln (2):

$$
\begin{aligned}
&\vartheta_2 . \vartheta_{23} . \vartheta_5 . \vartheta_3'''(v_1^{\,3})_0 \\
&= \vartheta_2 . \vartheta_{23} . \vartheta_5''(v_1^{\,2})_0 . \vartheta_3'(v_1)_0 + \vartheta_{14} . \vartheta_{02}'(v_1)_0 . (\vartheta_0 . \vartheta_{03}''(v_1^{\,2})_0 + \vartheta_{03} . \vartheta_0''(v_1^{\,2})_0) \\
&\quad + \vartheta_{01} . \vartheta_{24}'(v_1)_0 \, (\vartheta_4 . \vartheta_{34}''(v_1^{\,2})_0 + \vartheta_{34} . \vartheta_4''(v_1^{\,2})_0),
\end{aligned}
$$

$$\vartheta_2.\vartheta_{23}.\vartheta_5.\vartheta_3'''(v_1^2,\ v_2)_0$$
$$=\vartheta_2.\vartheta_{23}.\vartheta_5''(v_1^2)_0.\vartheta_3'(v_2)_0+\vartheta_{14}.\vartheta_{02}'(v_1)_0(\vartheta_0.\vartheta_{03}''(v_1,\ v_2)_0+\vartheta_{03}.\vartheta_0''(v_1,v_2)_0)$$
$$+\vartheta_{01}.\vartheta_{24}'(v_1)_0(\vartheta_4.\vartheta_{34}''(v_1,\ v_2)_0+\vartheta_{34}.\vartheta_4''(v_1,\ v_2)_0),$$

$$\vartheta_2.\vartheta_{23}.\vartheta_5.\vartheta_3'''(v_1,\ v_2^2)_0$$
$$=\vartheta_2.\vartheta_{23}(2\vartheta_5''(v_1,\ v_2)_0.\vartheta_5'(v_2)_0-\vartheta_5''(v_2^2)_0.\vartheta_3'(v_1)_0)$$
$$+\vartheta_{14}.\vartheta_{02}'(v_1)_0(\vartheta_0.\vartheta_{03}''(v_2^2)_0+\vartheta_{03}.\vartheta_0''(v_2^2)_0)$$
$$+\vartheta_{01}.\vartheta_{24}'(v_1)_0(\vartheta_4.\vartheta_{34}''(v_2^2)_0+\vartheta_{34}.\vartheta_4''(v_2^2)_0),$$

$$\vartheta_2.\vartheta_{23}.\vartheta_5.\vartheta_3'''(v_1^2,\ v_2)_0$$
$$=\vartheta_2.\vartheta_{23}(2\vartheta_5''(v_1,\ v_2)_0.\vartheta_3'(v_1)_0-\vartheta_5''(v_1^2)_0.\vartheta_3'(v_2)_0)$$
$$+\vartheta_{14}.\vartheta_{02}'(v_2)_0.(\vartheta_0.\vartheta_{03}''(v_1^2)_0+\vartheta_{03}.\vartheta_0''(v_1^2)_0)$$
$$+\vartheta_{01}.\vartheta_{24}'(v_2)_0.(\vartheta_4.\vartheta_{34}''(v_1^2)_0+\vartheta_{34}.\vartheta_4''(v_1^2)_0),$$

$$\vartheta_2.\vartheta_{23}.\vartheta_5.\vartheta_3'''(v_1,\ v_2^2)_0$$
$$=\vartheta_2.\vartheta_{23}.\vartheta_5''(v_2^2)_0.\vartheta_3'(v_1)_0+\vartheta_{14}.\vartheta_{02}'(v_2)_0.(\vartheta_0.\vartheta_{03}''(v_1,v_2)_0+\vartheta_{03}.\vartheta_0''(v_1,v_2)_0)$$
$$+\vartheta_{01}.\vartheta_{24}'(v_2)_0(\vartheta_4.\vartheta_{34}''(v_1,\ v_2)_0+\vartheta_{34}.\vartheta_4''(v_1,\ v_2)_0),$$

$$\vartheta_2.\vartheta_{23}.\vartheta_5.\vartheta_3'''(v_2^3)_0$$
$$=\vartheta_2.\vartheta_{23}.\vartheta_5''(v_2^2)_0.\vartheta_3'(v_2)_0+\vartheta_{14}.\vartheta_{02}'(v_2)_0.(\vartheta_0.\vartheta_{03}''(v_2^2)_0+\vartheta_{03}.\vartheta_0''(v_2^2)_0)$$
$$+\vartheta_{01}.\vartheta_{24}'(v_2)_0(\vartheta_4.\vartheta_{34}''(v_2^2)_0+\vartheta_{34}.\vartheta_4''(v_2^2)_0).$$

Vermöge dieser Gleichungen bilden wir die Ausdrücke:

$$\vartheta_{24}'(v_2)_0.\vartheta_3'''(v_1^3)_0-\vartheta_{24}'(v_1)_0.\vartheta_3'''(v_1^2,\ v_2)_0,$$
$$\vartheta_{24}'(v_2)_0.\vartheta_3'''(v_1^2,\ v_2)_0-\vartheta_{24}'(v_1)_0.\vartheta_3'''(v_1,\ v_2^2)_0,$$
$$\vartheta_{24}'(v_2)_0.\vartheta_3'''(v_1,\ v_2^2)_0-\vartheta_{24}'(v_1)_0.\vartheta_3'''(v_2^3)_0.$$

Es ergiebt sich dann für den ersten der Wert:

$$\vartheta_5''(v_1^2)_0(\vartheta_3'(v_1)_0.\vartheta_{24}'(v_2)_0+\vartheta_3'(v_2)_0.\vartheta_{24}'(v_1)_0)$$
$$-2\vartheta_5''(v_1,\ v_2)_0.\vartheta_3'(v_1)_0.\vartheta_{24}'(v_1)_0$$
$$+\frac{\vartheta_0.\vartheta_{03}.\vartheta_{14}}{\vartheta_2.\vartheta_{23}.\vartheta_5}\left(\frac{\vartheta_{03}''(v_1^2)_0}{\vartheta_{03}}+\frac{\vartheta_0''(v_1^2)_0}{\vartheta_0}\right)$$
$$(\vartheta_{02}'(v_1)_0.\vartheta_{24}'(v_2)_0-\vartheta_{02}'(v_2)_0.\vartheta_{24}'(v_1)_0),$$

oder da:

$$\frac{\vartheta_0.\vartheta_{03}.\vartheta_{14}}{\vartheta_2.\vartheta_{23}.\vartheta_5}(\vartheta_{02}'(v_1)_0.\vartheta_{24}'(v_2)_0-\vartheta_{02}'(v_2)_0.\vartheta_{24}'(v_1)_0)$$
$$=\vartheta_3'(v_1)_0.\vartheta_{24}'(v_2)_0-\vartheta_3'(v_2)_0.\vartheta_{24}'(v_1)_0$$

ist, so ergiebt sich derselbe, wenn wir die frühere Bezeichnung aufnehmen, gleich:

$$\vartheta_5''(v_1^2)_0 \cdot (\vartheta_3'(v_1)_0 . \vartheta_{24}'(v_2)_0 + \vartheta_3'(v_2)_0 . \vartheta_{24}'(v_1)_0)$$
$$- 2\vartheta_5''(v_1,\ v_2)_0 . \vartheta'_3(v_1)_0 . \vartheta_{24}'(v_1)_0 + \left(\frac{\vartheta_{03}''(v_1^2)_0}{\vartheta_{03}} + \frac{\vartheta_0''(v_1^2)_0}{\vartheta_0}\right)(3,24).$$

Die beiden andern Ausdrücke sind analog zu bilden.

Andrerseits wird:

$$(3) \qquad \vartheta_{23} . \vartheta_{34}\left(\vartheta_5(v_1,\ v_2) \cdot \frac{\partial \vartheta_{24}(v_1,\ v_2)}{\partial v_\varkappa} - \vartheta_{24}(v_1,\ v_2) \cdot \frac{\partial \vartheta_5(v_1,\ v_2)}{\partial v_\varkappa}\right)$$
$$= \vartheta_{01} . \vartheta'_3(v_\varepsilon)_0 . \vartheta_2(v_1, v_2) . \vartheta_4(v_1, v_2) - \vartheta_0 . \vartheta_{13}'(v_\varepsilon)_0 . \vartheta_{12}(v_1, v_2) . \vartheta_{14}(v_1, v_2).$$

Wir operieren mit diesem Ausdruck wie mit dem vorigen und bilden die drei Ausdrücke:

$$\vartheta_3'(v_2)_0 \cdot \vartheta_{24}'''(v_1^3)_0 - \vartheta_3'(v_1)_0 \cdot \vartheta_{24}'''(v_1^2,\ v_2)_0,$$
$$\vartheta_3'(v_2)_0 \cdot \vartheta_{24}'''(v_1^2,\ v_2)_0 - \vartheta_3'(v_1)_0 . \vartheta_{24}'''(v_1,\ v_2^2)_0,$$
$$\vartheta_3'(v_2)_0 \cdot \vartheta_{24}'''(v_1,\ v_2^2)_0 - \vartheta_3'(v_1)_0 . \vartheta_{24}'''(v_2^3)_0 .$$

Der erste wird gleich:

$$\vartheta_5''(v_1^2)_0(\vartheta'_3(v_1)_0 . \vartheta_{24}'(v_2)_0 + \vartheta_3'(v_2)_0 . \vartheta_{24}'(v_1)_0)$$
$$- 2\vartheta_5''(v_1,\ v_2)_0 . \vartheta_3'(v_1)_0 . \vartheta_{24}'(v_1)_0$$
$$- \frac{\vartheta_{12} . \vartheta_{14} . \vartheta_0}{\vartheta_{34} . \vartheta_{23} . \vartheta_5}\left(\frac{\vartheta_{14}''(v_1^2)_0}{\vartheta_{14}} + \frac{\vartheta_{12}''(v_1^2)_0}{\vartheta_{12}}\right)(13,3)$$

oder da:

$$\frac{\vartheta_{12} . \vartheta_{14} . \vartheta_0}{\vartheta_{34} . \vartheta_{23} . \vartheta_5} \cdot (13,\ 3) = (3,\ 24)$$

ist, gleich:

$$\vartheta_5''(v_1^2)_0 . (\vartheta_3'(v_1)_0 . \vartheta_{24}'(v_2)_0 + \vartheta_3'(v_2)_0 . \vartheta_{24}'(v_1)_0)$$
$$- \vartheta_5''(v_1,\ v_2)_0 . \vartheta_3'(v_1)_0 . \vartheta_{24}'(v_1)_0 - \left(\frac{\vartheta_{14}''(v_1^2)_0}{\vartheta_{14}} + \frac{\vartheta_{12}''(v_1^2)_0}{\vartheta_{12}}\right)(3,\ 24).$$

Wir bilden nun die drei Ausdrücke:

$$\vartheta_{24}'(v_2)_0 . \vartheta_3'''(v_1^3)_0 - \vartheta_{24}'(v_1)_0 . \vartheta_3'''(v_1^2,\ v_2)_0 - \vartheta_3'(v_2)_0 . \vartheta_{24}'''(v_1^3)_0$$
$$+ \vartheta_3'(v_1)_0 . \vartheta_{24}'''(v_1^2,\ v_2)_0,$$
$$\vartheta_{24}'(v_2)_0 . \vartheta_3'''(v_1^2, v_2)_0 - \vartheta_{24}'(v_1)_0 . \vartheta_3'''(v_1, v_2^2)_0 - \vartheta_3'(v_2)_0 . \vartheta_{24}'''(v_1^2, v_2)_0$$
$$+ \vartheta_3'(v_1)_0 . \vartheta_{24}'''(v_1, v_2^2)_0,$$
$$\vartheta_{24}'(v_2)_0 . \vartheta_3'''(v_1, v_2^2)_0 - \vartheta_{24}'(v_1)_0 . \vartheta_3'''(v_2^3)_0 - \vartheta_3'(v_2)_0 . \vartheta_{24}'''(v_1,\ v_2^2)_0$$
$$+ \vartheta_3'(v_1)_0 . \vartheta_{24}'''(v_2^3)_0 .$$

Aus den Gleichungen (1) folgt, daſs diese Ausdrücke die partiellen Differentialquotienten der Gröſse:

$$\vartheta_{24}'(v_2)_0 . \vartheta_3'(v_1)_0 - \vartheta_{24}'(v_1)_0 . \vartheta_3'(v_2)_0$$

nach den Moduln τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} sind, ferner lehren die zuletzt angestellten Betrachtungen, daſs die Gleichungen gelten:

$$\frac{\partial \log\left(\vartheta_{24}'(v_2)_0 . \vartheta_3'(v_1)_0 - \vartheta_{24}'(v_1)_0 . \vartheta_3'(v_2)_0\right)}{\partial \tau_{kl}} = \frac{\partial \log(\vartheta_{12} . \vartheta_0 . \vartheta_{14} . \vartheta_{03})}{\partial \tau_{kl}},$$

oder also:

$$d \log(3, 24) = d \log(\vartheta_{12} . \vartheta_0 . \vartheta_{03} \cdot \vartheta_{14}),$$

oder schlieſslich:

$$(3, 24) = \pi^2 . \vartheta_{12} . \vartheta_0 . \vartheta_{03} . \vartheta_{14}.$$

Die beiden Ableitungen stützen sich auf das Additionstheorem der Thetafunktionen. Es braucht kaum bemerkt zu werden, daſs die Ausgangsformeln auch ohne das Additionstheorem direkt durch das Transformationsprinzip hätten aufgestellt werden können.

§ 17.

Die Differentialquotienten der Thetafunktionen für die Nullwerte der Argumente. Parameterdarstellung derselben.

Aus den Bedingungsgleichungen, die zwischen den Thetafunktionen bestehen, folgt unmittelbar, daſs von den 12 ersten Differentialquotienten der Thetafunktionen für die Nullwerte der Argumente nur vier von einander unabhängig sein können, durch welche die acht übrigen sich linear ausdrücken lassen. Setzen wir wie vorher:

$$\left[\frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\partial v_\varepsilon}\right]_{v_1 = v_2 = 0} = \vartheta_\alpha'(v_\varepsilon)_0 \qquad \varepsilon = 1, 2,$$

und greifen die vier Gröſsen heraus: $\vartheta_3'(v_\varepsilon)_0$ und $\vartheta_{24}'(v_\varepsilon)_0$, so erhalten wir die Ausdrücke:

$$(1) \quad \begin{aligned}
\vartheta_{02}'(v_\varepsilon)_0 &= \frac{\vartheta_5 . \vartheta_2 . \vartheta_{23} . \vartheta_3'(v_\varepsilon)_0 - \vartheta_{34} . \vartheta_{01} . \vartheta_4 . \vartheta_{24}'(v_\varepsilon)_0}{\vartheta_0 . \vartheta_{03} . \vartheta_{14}}, \\
\vartheta_{13}'(v_\varepsilon)_0 &= \frac{\vartheta_2 . \vartheta_4 . \vartheta_{01} . \vartheta_3'(v_\varepsilon)_0 - \vartheta_5 . \vartheta_{34} . \vartheta_{23} . \vartheta_{24}'(v_\varepsilon)_0}{\vartheta_0 . \vartheta_{12} . \vartheta_{14}}, \\
\vartheta_{04}'(v_\varepsilon)_0 &= \frac{\vartheta_5 . \vartheta_{34} . \vartheta_4 . \vartheta_3'(v_\varepsilon)_0 - \vartheta_{01} . \vartheta_2 . \vartheta_{23} . \vartheta_{24}'(v_\varepsilon)_0}{\vartheta_{12} . \vartheta_0 . \vartheta_{03}}, \\
\vartheta_1'(v_\varepsilon)_0 &= \frac{\vartheta_{01} . \vartheta_{34} . \vartheta_{12} . \vartheta_3'(v_\varepsilon)_0 - \vartheta_5 . \vartheta_4 . \vartheta_2 . \vartheta_{24}'(v_\varepsilon)_0}{\vartheta_{12} . \vartheta_{03} . \vartheta_{14}}.
\end{aligned}$$

Zwischen den vier Gröſsen $\vartheta_3'(v_\epsilon)_0$, $\vartheta_{24}'(v_\epsilon)_0$ besteht dann überdies die Rosenhainsche Differentialbeziehung:

$$(2)\qquad (3,24) = \pi^2.\vartheta_{12}.\vartheta_0.\vartheta_{03}.\vartheta_{14}.$$

Die Parameterdarstellung kann aber auch so gegeben werden, daſs alle 12 Gröſsen durch vier neüe ausgedrückt werden, zwischen denen dann noch eine Relation besteht. In der Wahl dieser neu einzuführenden Gröſsen bleibt eine groſse Willkür. Wir wählen eine Darstellung, die unmittelbar aus der Rosenhainschen Arbeit folgt und deren Vorzüge später klar werden werden. Wir setzen:*)

$$(3)\qquad \begin{aligned}
\vartheta_3'(v_1)_0 &= \quad K_{21}.\frac{\vartheta_{01}.\vartheta_{12}.\vartheta_{23}.\vartheta_2.\vartheta_{03}.\vartheta_0.\vartheta_{14}}{\vartheta_{34}^2.\vartheta_4^2.\vartheta_5^2},\\
\vartheta_3'(v_2)_0 &= \quad K_{22}.\frac{\vartheta_{01}.\vartheta_{12}.\vartheta_{23}.\vartheta_2.\vartheta_{03}.\vartheta_0.\vartheta_{14}}{\vartheta_{34}^2.\vartheta_4^2.\vartheta_5^2},\\
\vartheta_{24}'(v_1)_0 &= -K_{11}.\frac{\vartheta_{03}.\vartheta_{12}.\vartheta_0.\vartheta_{14}}{\vartheta_{34}.\vartheta_4.\vartheta_5},\\
\vartheta_{24}'(v_2)_0 &= -K_{12}.\frac{\vartheta_{03}.\vartheta_{12}.\vartheta_0.\vartheta_{14}}{\vartheta_{34}.\vartheta_4.\vartheta_5}.
\end{aligned}$$

Dann folgen die Ausdrücke (4):

$$\begin{aligned}
\vartheta_{04}'(v_1)_0 &= \quad (K_{11}+K_{21})\frac{\vartheta_{14}.\vartheta_{01}.\vartheta_2.\vartheta_{23}}{\vartheta_{34}.\vartheta_4.\vartheta_5},\\
\vartheta_{04}'(v_2)_0 &= \quad (K_{22}+K_{12})\frac{\vartheta_{14}.\vartheta_{01}.\vartheta_2.\vartheta_{23}}{\vartheta_{34}.\vartheta_4.\vartheta_5},\\
\vartheta_1'(v_1)_0 &= (K_{11}+\varkappa^2.K_{21})\frac{\vartheta_5.\vartheta_4.\vartheta_2.\vartheta_0}{\vartheta_{34}.\vartheta_4.\vartheta_5},\\
\vartheta_1'(v_2)_0 &= (\varkappa^2.K_{22}+K_{12})\frac{\vartheta_5.\vartheta_4.\vartheta_2.\vartheta_0}{\vartheta_{34}.\vartheta_4.\vartheta_5},\\
\vartheta_{02}'(v_1)_0 &= (K_{11}+\lambda^2.K_{21})\frac{\vartheta_{12}.\vartheta_{34}.\vartheta_{01}.\vartheta_4}{\vartheta_{34}.\vartheta_4.\vartheta_5},\\
\vartheta_{02}'(v_2)_0 &= (\lambda^2.K_{22}+K_{12})\frac{\vartheta_{12}.\vartheta_{34}.\vartheta_{01}.\vartheta_4}{\vartheta_{34}.\vartheta_4.\vartheta_5},\\
\vartheta_{13}'(v_1)_0 &= (K_{11}+\mu^2.K_{21})\frac{\vartheta_{23}.\vartheta_{03}.\vartheta_5.\vartheta_{34}}{\vartheta_{34}.\vartheta_4.\vartheta_5},\\
\vartheta_{13}'(v_2)_0 &= (\mu^2.K_{22}+K_{12})\frac{\vartheta_{23}.\vartheta_{03}.\vartheta_5.\vartheta_{34}}{\vartheta_{34}.\vartheta_4.\vartheta_5}.
\end{aligned}$$

Dabei ist dann:

$$(5)\qquad K_{11}.K_{22}-K_{12}.K_{21} = \pi^2.\frac{\vartheta_{34}^3.\vartheta_4^3.\vartheta_5^3}{\vartheta_{01}.\vartheta_{12}.\vartheta_{23}.\vartheta_2.\vartheta_{03}.\vartheta_0.\vartheta_{14}} = K.$$

---

*) Cf. u. a. die Arbeit des Verfassers im 3ten Bande der Acta mathematica.

Es soll die soeben angegebene Parameterdarstellung im wesentlichen beibehalten werden. Auf diese Weise sind die zwölf Gröfsen $\vartheta_\alpha'(v_\varepsilon)_0$ durch vier Gröfsen ausgedrückt, zwischen denen eine Relation besteht. In den Koefficienten treten die Thetafunktionen für die Nullwerte der Argumente auf. Diese können durch eine unter ihnen wie z. B. ϑ_5 und die drei Gröfsen $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 ersetzt werden. Die eine Gröfse ϑ_5 kann als bekannt angesehen werden, wenn die Gröfse K gegeben ist, so dafs wir das Resultat erhalten, dafs sich die zwölf Gröfsen $\vartheta_\alpha'(v_\varepsilon)_0$ durch die vier Gröfsen $K_{11}, \ldots K_{22}$ und durch die drei Ausdrücke $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 darstellen lassen. Es wird in der Folge gezeigt werden, dafs auch die vier Gröfsen $K_{11}, \ldots K_{22}$ als Funktionen von $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 aufgefafst werden können.

Eine wesentlich allgemeinere Darstellung rührt von Staude*) her. Wir setzen dazu (6):

$$A\,.\,\vartheta_{24}'(v_1)_0 = \eta_{24}\,\frac{(a_0-g_2)\alpha_{22}+(a_0-g_1)\alpha_{21}}{g_2-g_1},$$

$$A\,.\,\vartheta_{24}'(v_2)_0 = \eta_{24}\,\frac{(a_0-g_2)\alpha_{12}+(a_0-g_1)\alpha_{11}}{g_1-g_2},$$

$$A\,.\,\vartheta_3'(v_1)_0 = \eta_3\,\frac{(a_1-g_2)\alpha_{22}+(a_1-g_1)\alpha_{21}}{g_2-g_1},$$

$$A\,.\,\vartheta_3'(v_2)_0 = \eta_3\,\frac{(a_1-g_2)\alpha_{12}+(a_1-g_1)\alpha_{11}}{g_1-g_2},$$

$$A = \alpha_{11}\,.\,\alpha_{22} - \alpha_{12}\,.\,\alpha_{21}.$$

Dabei sollen g_1 und g_2 willkürlich gewählte Constanten bedeuten, a_0, a_1 sind zwei der früher definierten Gröfsen $a_0, \ldots a_5$, mit deren Hülfe die Parameterdarstellung der Thetafunktionen für die Nullwerte der Argumente gegeben worden ist. Ferner bedeutet η_{24} den Ausdruck:

$$\eta_{24} = \alpha\,.\,\sqrt[4]{\Pi(a_i-a_k)} \quad i>\varkappa;\ i,\ \varkappa = 1,\ 2, \ldots 5.$$

Ebenso (7)

$$\eta_3 = \alpha\,.\,\sqrt[4]{\Pi(a_i-a_k)} \quad i>\varkappa;\ i,\ \varkappa = 0,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

Über das Vorzeichen der vierten Wurzel soll das früher bemerkte gelten.

Wir hatten in § 11 die Parameterdarstellung der Quotienten der Thetafunktionen für die Nullwerte der Argumente gegeben. Die Thetafunktionen selbst sind dann bis auf einen allen gemeinsamen Faktor bestimmt. Es soll α diesen gemeinsamen Faktor bedeuten.

---

*) Math. Annalen 24 pag. 288 seq. Es möge auch auf das Werk von Thomae verwiesen werden: Sammlung von Formeln etc. Halle 1876.

Nehmen wir an, dafs eine der Thetafunktionen gegeben ist, z. B. die Thetafunktion ϑ_5, so folgt für α der Wert:

$$(8) \quad \alpha = \frac{\vartheta_5}{\sqrt{(a_2 - a_4)(a_4 - a_0)(a_0 - a_2)(a_3 - a_5)(a_5 - a_1)(a_1 - a_3)}}.$$

Die vier Gröfsen $\alpha_{11}, \ldots \alpha_{22}$ sind diejenigen, mit deren Hülfe die zwölf Gröfsen $\vartheta_\alpha'(v_\epsilon)_0$ ausgedrückt werden sollen. Dann folgt zunächst, dafs die Gröfse α gegeben ist, sobald A, g_2, g_1 bekannt sind. In der That, aus den obigen Gleichungen folgt:

$$A(\vartheta_{24}'(v_1)_0 \cdot \vartheta_3'(v_2)_0 - \vartheta_{24}'(v_2)_0 \cdot \vartheta_3'(v_1)_0) = \frac{a_1 - a_0}{g_2 - g_1} \cdot \eta_{24} \cdot \eta_3$$

oder:

$$-\pi^2 . A . \vartheta_{12} . \vartheta_0 . \vartheta_{03} . \vartheta_{14} = \frac{a_1 - a_0}{g_2 - g_1} \cdot \eta_{24} \cdot \eta_3$$

oder:

$$(9) \qquad \alpha = \frac{1}{\pi\sqrt{A(g_2 - g_1)}}.$$

Unter diesen Voraussetzungen erhalten wir (10):

$$A \cdot \vartheta_{04}'(v_1)_0 = \eta_{04} \cdot \frac{(a_2 - g_2)\alpha_{22} + (a_2 - g_1)\alpha_{21}}{g_2 - g_1},$$

$$A \cdot \vartheta_{04}'(v_2)_0 = \eta_{04} \cdot \frac{(a_2 - g_2)\alpha_{12} + (a_2 - g_1)\alpha_{11}}{g_1 - g_2},$$

$$A . \vartheta_1'(v_1)_0 = \eta_1 \cdot \frac{(a_3 - g_2)\alpha_{22} + (a_3 - g_1)\alpha_{21}}{g_2 - g_1},$$

$$A \cdot \vartheta_1'(v_2)_0 = \eta_1 \cdot \frac{(a_3 - g_2)\alpha_{12} + (a_3 - g_1)\alpha_{11}}{g_1 - g_2},$$

$$A \cdot \vartheta_{02}'(v_1)_0 = \eta_{02} \cdot \frac{(a_4 - g_2)\alpha_{22} + (a_4 - g_1)\alpha_{21}}{g_2 - g_1},$$

$$A \cdot \vartheta_{02}'(v_2)_0 = \eta_{02} \cdot \frac{(a_4 - g_2)\alpha_{12} + (a_4 - g_1)\alpha_{11}}{g_1 - g_2},$$

$$A \cdot \vartheta_{13}'(v_1)_0 = \eta_{13} \cdot \frac{(a_5 - g_2)\alpha_{22} + (a_5 - g_1)\alpha_{21}}{g_2 - g_1},$$

$$A \cdot \vartheta_{13}'(v_2)_0 = \eta_{13} \cdot \frac{(a_5 - g_2)\alpha_{12} + (a_5 - g_1)\alpha_{11}}{g_1 - g_2}.$$

Dabei ist:

$$\eta_{04} = \alpha . \sqrt{\Pi(a_i - a_\varkappa)} \qquad i > \varkappa;\ i, \varkappa = 0, 1, 3, 4, 5,$$

$$\eta_1 = \alpha . \sqrt{\Pi(a_i - a_\varkappa)} \qquad i > \varkappa;\ i, \varkappa = 0, 1, 2, 4, 5,$$

$$\eta_{02} = \alpha . \sqrt{\Pi(a_i - a_\varkappa)} \qquad i > \varkappa;\ i, \varkappa = 0, 1, 2, 3, 5,$$

$$\eta_{13} = \alpha . \sqrt{\Pi(a_i - a_\varkappa)} \qquad i > \varkappa;\ i, \varkappa = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Auf diese Weise sind die zwölf ersten Differentialquotienten durch die ursprünglich zu Grunde gelegten Gröfsen $a_0, a_1, \ldots a_5$ und durch vier neue Gröfsen $\alpha_{11} \ldots \alpha_{22}$ dargestellt. Auch hier kann nachgewiesen werden, dafs diese vier Gröfsen $\alpha_{11} \ldots \alpha_{22}$ von den sechs Gröfsen $a_0, a_1, \ldots a_5$ abhängen.

§ 18.

Die Darstellung der Thetafunktionen n^{ter} Ordnung durch die gewöhnlichen Thetafunktionen.

Es sollen jetzt auf Grund der voraufgegangenen Untersuchungen die allgemeinen Thetafunktionen n^{ter} Ordnung durch die gewöhnlichen dargestellt werden. Wir nehmen dazu erstens an, dafs n eine ungerade Zahl sei. Auch dieser Fall zerfällt dann in zwei Unterfälle. Sei eine Thetafunktion n^{ter} Ordnung vorgelegt, die den Bedingungsgleichungen Genüge leistet:

$$f(v_1 + 1, v_2) = (-1)^{g_1} . f(v_1, v_2),$$
$$f(v_1, v_2 + 1) = (-1)^{g_2} . f(v_1, v_2),$$
$$f(v_1 + \tau_{11}, v_2 + \tau_{12}) = (-1)^{h_1} . f(v_1, v_2) . e^{-\pi i n (2 v_1 + \tau_{11})},$$
$$f(v_1 + \tau_{12}, v_2 + \tau_{22}) = (-1)^{h_2} . f(v_1, v_2) . e^{-\pi i n (2 v_2 + \tau_{22})},$$
$$f(-v_1, -v_2) = (-1)^{g_1 \cdot h_1 + g_2 \cdot h_2} . f(v_1, v_2),$$

dann enthält diese nach den früheren Untersuchungen höchstens $\frac{n^2+1}{2}$ willkürliche Konstanten in sich.

Seien nun $[\omega_1]$, $[\omega_2]$, $[\omega_3]$, $[\omega_4]$ vier Charakteristiken, und zwar sei hierbei gesetzt:

$$[\omega_\varepsilon] = \begin{bmatrix} g_1^{(\varepsilon)} & g_2^{(\varepsilon)} \\ h_1^{(\varepsilon)} & h_2^{(\varepsilon)} \end{bmatrix},$$

welche den Kongruenzen Genüge leisten:

$$\sum g_1^{(\varepsilon)} \equiv \sum g_2^{(\varepsilon)} \equiv \sum h_1^{(\varepsilon)} \equiv \sum h_2^{(\varepsilon)} \equiv 0 \bmod 2,$$
$$\sum g_1^{(\varepsilon)} . h_1^{(\varepsilon)} + g_2^{(\varepsilon)} . h_2^{(\varepsilon)} \equiv 0 \bmod 2.$$

Es bilden dann die dazu gehörenden Thetafunktionen ein gerades Quadrupel. Dann ist klar, dafs sämtliche Produkte:

$$\vartheta[\omega_1]((v))^a . \vartheta[\omega_2]((v))^b . \vartheta[\omega_3]((v))^c . \vartheta[\omega_4]((v))^d$$

denselben Bedingungsgleichungen Genüge leisten, wie die ursprünglich zu Grunde gelegte Thetafunktion n^{ter} Ordnung, vorausgesetzt, dafs die Bedingungen erfüllt sind:

$$a + b + c + d = n, \quad b + c \equiv c + d \equiv 0 \bmod 2.$$

Nehmen wir die Bedingung hinzu, dafs $d \leq 3$ ist, so ist klar, dafs die Zahl der auf diese Weise zu bildenden Produkte gerade gleich $\frac{n^2+1}{2}$ ist. Ferner folgt leicht, dafs dieselben von einander linear unabhängig sein müfsen. In der That, im entgegengesetzten Falle würden zwischen den Funktionen eines geraden Vierersystemes zwei Relationen bestehen, die von einander unabhängig sind, was nicht möglich ist.

Mithin erhalten wir im angegebenen Falle die Gleichung:

$$(3)\quad f(v_1, v_2) = \sum e_{abcd}\,.\,\vartheta[\omega_1]((v))^a \cdot \vartheta[\omega_2]((v))^b\,.\,\vartheta[\omega_3]((v))^c\,.\,\vartheta[\omega_4]((v))^d,$$

wobei die Summation über alle a, b, c, d zu nehmen ist, für welche die Bedingungen erfüllt sind:

$$a + b + c + d = n, \qquad b + c \equiv c + d \equiv 0 \bmod 2.$$

Die Gröfsen e_{abcd} sind Konstanten.

Wir nehmen jetzt den zweiten Unterfall. Es möge die Thetafunktion n^{ter} Ordnung den Bedingungen Genüge leisten:

$$\begin{aligned}
&f(v_1 + 1, v_2) = (-1)^{g_1}\,.\,f(v_1, v_2),\\
&f(v_1, v_2 + 1) = (-1)^{g_2}\,.\,f(v_1, v_2),\\
(4)\quad &f(v_1 + \tau_{11}, v_2 + \tau_{12}) = (-1)^{h_1}\,.\,f(v_1, v_2)\,.\,e^{-\pi i n(2v_1+\tau_{11})},\\
&f(v_1 + \tau_{12}, v_2 + \tau_{22}) = (-1)^{h_2}\,.\,f(v_1, v_2\,.\,e^{-\pi i n(2v_2+\tau_{22})},\\
&f(-v_1, -v_2) = -(-1)^{g_1h_1+g_2h_2}\,.\,f(v_1, v_2).
\end{aligned}$$

Die Charakteristik bezeichnen wir durch $[\omega]$. Dann greifen wir folgende ungerade Vierersysteme heraus:

$$\begin{array}{llll}
[\omega], & [\omega+\beta_1+\beta_2], & [\omega+\beta_1+\beta_3], & [\omega+\beta_2+\beta_3],\\
[\omega], & [\omega+\beta_1+\beta_2], & [\omega+\beta_1+\beta_4], & [\omega+\beta_2+\beta_4],\\
[\omega], & [\omega+\beta_3+\beta_4], & [\omega+\beta_1+\beta_3], & [\omega+\beta_1+\beta_4],\\
[\omega], & [\omega+\beta_3+\beta_4], & [\omega+\beta_2+\beta_3], & [\omega+\beta_2+\beta_4].
\end{array}$$

Dieselben sind so gewählt, dafs die in ihnen vorkommenden je vier Funktionen:

$$\begin{array}{llll}
[\omega+\beta_1+\beta_3], & [\omega+\beta_2+\beta_3], & [\omega+\beta_1+\beta_4], & [\omega+\beta_2+\beta_4],\\
[\omega+\beta_1+\beta_2], & [\omega+\beta_3+\beta_4], & [\omega+\beta_1+\beta_3], & [\omega+\beta_2+\beta_4],\\
[\omega+\beta_1+\beta_2], & [\omega+\beta_3+\beta_4], & [\omega+\beta_2+\beta_3], & [\omega+\beta_1+\beta_4],
\end{array}$$

ein gerades Vierersystem bilden. Für die vorgelegte Funktion $f(v_1, v_2)$ ergiebt sich unter diesen Annahmen die Darstellung:

$$
\begin{aligned}
f(v_1, v_2) = & \vartheta[\omega + \beta_1 + \beta_2]((v)) \cdot \vartheta[\omega + \beta_1 + \beta_3]((v)) \cdot \vartheta[\omega + \beta_2 + \beta_3]((v)) \\
& \cdot f_1(\vartheta[\omega+\beta_1+\beta_3]((v))^2, \vartheta[\omega+\beta_2+\beta_3]((v))^2, \vartheta[\omega+\beta_1+\beta_4]((v))^2) \\
& + \vartheta[\omega + \beta_1 + \beta_2]((v)) \cdot \vartheta[\omega + \beta_1 + \beta_4]((v)) \cdot \vartheta[\omega + \beta_2 + \beta_4]((v)) \\
& \cdot f_2(\vartheta[\omega+\beta_1+\beta_3]((v))^2, \vartheta[\omega+\beta_2+\beta_3]((v))^2, \vartheta[\omega+\beta_1+\beta_4]((v))^2) \\
(5) \qquad & + \vartheta[\omega + \beta_1 + \beta_3]((v)) \cdot \vartheta[\omega + \beta_1 + \beta_4]((v)) \cdot \vartheta[\omega + \beta_3 + \beta_4]((v)) \\
& \cdot f_3(\vartheta[\omega+\beta_1+\beta_3]((v))^2, \vartheta[\omega+\beta_2+\beta_3]((v))^2, \vartheta[\omega+\beta_1+\beta_4]((v))^2) \\
& + \vartheta[\omega + \beta_2 + \beta_3]((v)) \cdot \vartheta[\omega + \beta_2 + \beta_4]((v)) \cdot \vartheta[\omega + \beta_3 + \beta_4]((v)) \\
& \cdot f_4(\vartheta[\omega+\beta_1+\beta_3]((v))^2, \vartheta[\omega+\beta_2+\beta_3]((v))^2, \vartheta[\omega+\beta_1+\beta_4]((v))^2),
\end{aligned}
$$

wobei unter den Funktionen f_1, f_2, f_3, f_4 ganze homogene Funktionen ihrer Argumente von der Ordnung $\frac{n-1}{2} - 1$ zu verstehen sind. Die Richtigkeit der Behauptung folgt leicht. In der That zunächst zeigt es sich, dafs die Zahl der Konstanten die gewünschte ist, dafs zweitens die einzelnen Glieder auf der rechten Seite denselben Bedingungsgleichungen Genüge leisten, wie die zu Grunde gelegte Thetafunktion n^{ter} Ordnung, drittens endlich folgt, dafs die Konstanten von einander unabhängig sein müssen. Angenommen nämlich, die letzte Behauptung wäre falsch, so könnten wir die linke Seite unserer Gleichung der Null gleich setzen. Multiplizieren wir dann beide Seiten mit

$$\vartheta[\omega + \beta_1 + \beta_2]((v)),$$

so folgt leicht, dafs auf der rechten Seite lediglich die vier Funktionen

$$[\omega + \beta_1 + \beta_3], \quad [\omega + \beta_2 + \beta_3], \quad [\omega + \beta_1 + \beta_4], \quad [\omega + \beta_2 + \beta_4]$$

vorhanden sind, da sich die Produkte:

$$\vartheta[\omega + \beta_1 + \beta_2]((v)) \cdot \vartheta[\omega + \beta_1 + \beta_2]((v))$$

und

$$\vartheta[\omega + \beta_1 + \beta_2]((v)) \cdot \vartheta[\omega + \beta_3 + \beta_4]((v))$$

durch dieselben ausdrücken lassen. Überdies aber kommt auf der rechten Seite die Funktion $\vartheta[\omega + \beta_2 + \beta_4]((v))$ höchstens in der dritten Potenz vor. Hieraus ist mit wenigen Schlüssen zu folgern, dafs die rechte Seite nur dann der Null gleich werden kann, wenn die Koefficienten einzeln verschwinden.

Wir nehmen jetzt den zweiten Fall, dafs die Ordnung der vorgelegten allgemeinen Thetafunktion eine gerade sei und wollen für diesen Fall setzen:

$$n = 2k.$$

Es sind dann eine Reihe von Unterfällen zu unterscheiden. Zunächst schliefsen wir den Fall aus, dafs die Charakteristik der vorgelegten Thetafunktion von der Ordnung $2k$ der Null gleich sei.

Sei dann erstens die vorgelegte Charakteristik, die durch $[\omega]$ bezeichnet werden möge, eine gerade, ferner die Thetafunktion selbst auch eine gerade. Dann kann $[\omega]$ auf drei Arten als Summe zweier gerader, auf eine Art als Summe zweier ungerader Charakteristiken dargestellt werden. Die ungeraden Charakteristiken wollen wir wie früher durch $[\beta_1]\dots[\beta_6]$ bezeichnen, die geraden durch $[\gamma_1]\dots[\gamma_{10}]$. Dann folgt:

$$[\omega]=[\gamma_1]+[\gamma_2]=[\gamma_3]+[\gamma_4]=[\gamma_5]+[\gamma_6]=[\beta_1]+[\beta_2].$$

Je zwei dieser vier Paare bilden zusammen ein gerades Vierersystem, so dafs wir im ganzen sechs solcher Systeme erhalten. Greifen wir eines derselben heraus z. B. $[\gamma_1]$, $[\gamma_2]$, $[\gamma_3]$, $[\gamma_4]$, so findet sich für die vorgelegte Thetafunktion $f(v_1, v_2)$ die Darstellung:

$$(6)\quad f(v_1,v_2)=\sum e_{abcd}\,.\,\vartheta[\gamma_1]((v))^a\,.\,\vartheta[\gamma_2]((v))^b\,.\,\vartheta[\gamma_3]((v))^c\,.\,\vartheta[\gamma_4]((v))^d,$$
$$a+b+c+d=2k,\quad b+d\equiv 1 \bmod 2,\quad c+d\equiv 0 \bmod 2,\quad d\lessgtr 3.$$

Sei jetzt zweitens die vorgelegte Charakteristik eine ungerade, die Funktion selbst auch ungerade. Dann läfst sich die Charakteristik auf vier von einander verschiedene Arten als Summe einer geraden und einer ungeraden Charakteristik darstellen und zwar möge sein:

$$[\omega]=[\beta_1]+[\gamma_1]=[\beta_2]+[\gamma_2]=[\beta_3]+[\gamma_3]=[\beta_4]+[\gamma_4].$$

Je zwei dieser Paare bilden wiederum ein Göpelsches Quadrupel. Greifen wir eines derselben heraus, z. B. das Quadrupel:

$$[\beta_1],\quad [\gamma_1],\quad [\beta_2],\quad [\gamma_2],$$

so erhalten wir für die vorgelegte Thetafunktion $f(v_1, v_2)$ die Darstellung:

$$(7)\quad f(v_1,v_2)=\sum e_{abcd}\cdot\vartheta[\beta_1]((v))^a\,.\,\vartheta[\gamma_1]((v))^b\,.\,\vartheta[\beta_2]((v))^c\,.\,\vartheta[\gamma_2]((v))^d,$$
$$a+b+c+d=2k,\quad b+d\equiv 1 \bmod 2,\quad c+d\equiv 0 \bmod 2,\quad d\lessgtr 3.$$

Es möge jetzt drittens die vorgelegte Thetafunktion $2k^{\text{ter}}$ Ordnung eine gerade Charakteristik $[\omega]$ besitzen und selbst ungerade sein. Dann zerlegen wir $[\omega]$ auf die vier möglichen Arten in die Summe einer geraden und einer ungeraden Charakteristik und zwar möge sein:

$$[\omega]=[\beta_1]+[\gamma_1]=[\beta_2]+[\gamma_2]=[\beta_3]+[\gamma_3]=[\beta_4]+[\gamma_4].$$

Dann können wir wie im vorigen Falle schliefsen und erhalten eine Darstellung von der Form:

$$(8)\quad f(v_1, v_2) = \sum e_{abcd} . \vartheta[\beta_1]((v))^a . \vartheta[\gamma_1]((v))^b . \vartheta[\beta_2]((v))^c . \vartheta[\gamma_2]((v))^d,$$

$$a + b + c + d = 2k,\quad b + d \equiv 1 \bmod 2,\quad c + d \equiv 0 \bmod 2,\quad d \leq 3.$$

Ist viertens $f(v_1, v_2)$ eine gerade Funktion und besitzt eine ungerade Charakteristik $[\omega]$, so nehmen wir die Zerlegungen vor:

$$[\omega] = [\gamma_1] + [\gamma_2] = [\gamma_3] + [\gamma_4] = [\gamma_5] + [\gamma_6] = [\beta_1] + [\beta_2],$$

um die Darstellung zu erhalten:

$$(9)\quad f(v_1, v_2) = \sum e_{abcd} . \vartheta[\gamma_1]((v))^a . \vartheta[\gamma_2]((v))^b . \vartheta[\gamma_3]((v))^c . \vartheta[\gamma_4]((v))^d,$$

$$a + b + c + d = 2k,\quad b + d \equiv 1 \bmod 2,\quad c + d \equiv 0 \bmod 2,\quad d \leq 3.$$

Wir nehmen jetzt den bisher ausgeschlossenen Fall, dafs die Charakteristik der Null gleich sei. Ist dann die vorgelegte Thetafunktion eine gerade Funktion, bilden ferner die Funktionen $[\omega_1]$, $[\omega_2]$, $[\omega_3]$, $[\omega_4]$ ein beliebiges gerades Vierersystem, so folgt:

$$(10)\quad f(v_1, v_2) = \sum e_{abcd} . \vartheta[\omega_1]((v))^a . \vartheta[\omega_2]((v))^b . \vartheta[\omega_3]((v))^c . \vartheta[\omega_4]((v))^d,$$

$$a + b + c + d = 2k,\quad d + c \equiv d + b \equiv 0 \bmod 2,\quad d \leq 3.$$

Schwieriger gestaltet sich der Fall, wenn die Thetafunktion mit der Charakteristik Null eine ungerade Funktion ihrer Argumente ist. Wir wollen dann der Einfachheit halber nicht die allgemeine Darstellung, sondern nur eine spezielle nehmen. Es ist dann z. B.

$$\begin{aligned}(11)\quad f(v_1, v_2) = {} & \vartheta_2((v)) . \vartheta_{24}((v)) . \vartheta_{02}((v)) . \vartheta_{13}((v)) . f_1(\vartheta_2((v))^2, \vartheta_{04}((v))^2, \vartheta_{24}((v))^2) \\ & + \vartheta_0((v)) . \vartheta_{02}((v)) . \vartheta_{04}((v)) . \vartheta_{13}((v)) . f_2(\vartheta_2((v))^2, \vartheta_{04}((v))^2, \vartheta_{24}((v))^2) \\ & + \vartheta_5((v)) . \vartheta_2((v)) . \vartheta_4((v)) . \vartheta_{24}((v)) . f_3(\vartheta_2((v))^2, \vartheta_{04}((v))^2, \vartheta_{24}((v))^2) \\ & + \vartheta_5((v)) . \vartheta_0((v)) . \vartheta_4((v)) . \vartheta_{04}((v)) . f_4(\vartheta_2((v))^2, \vartheta_{04}((v))^2, \vartheta_{24}((v))^2) \\ & + \vartheta_5((v)) . \vartheta_{02}((v)) . \vartheta_{04}((v)) . \vartheta_{24}((v)) . f_5(\vartheta_{04}((v))^2, \vartheta_{24}((v))^2) \\ & + \vartheta_4((v)) . \vartheta_{13}((v)) . \vartheta_{04}((v)) . \vartheta_{24}((v)) . f_6(\vartheta_{04}((v))^2, \vartheta_{24}((v))^2).\end{aligned}$$

Hierbei sind die Funktionen $f_1, \dots f_6$ ganze homogene Funktionen ihrer Argumente von der Ordnung $\frac{2k-4}{2}$. Die Richtigkeit der Darstellung zeigt eine leichte Betrachtung. Es sind zur Konstruktion wesentlich die ungeraden Vierersysteme gewählt worden.

Damit sind alle Fälle erschöpft. Wir erhalten jedenfalls den

Lehrsatz.

Eine jede Thetafunktion n^{ter} Ordnung läfst sich sowohl, wenn n gerade, als auch wenn n ungerade ist, als ganze homogene Funktion n^{ter} Ordnung der ursprünglichen Thetafunktionen darstellen, welche eine eindeutig bestimmte Anzahl von Konstanten linear in sich enthält.

§ 19.

Die Einführung der σ-Funktionen und der hyperelliptischen Funktionen erster Ordnung.

Bei Gelegenheit der Parameterdarstellung der ersten Differentialquotienten der Thetafunktionen für die Nullwerte der Argumente waren vier Gröfsen K_{11}, K_{12}, K_{21}, K_{22} eingeführt worden. Mit ihrer Hülfe definieren wir zwei neue Veränderliche u_1 und u_2 durch:

$$\begin{aligned} u_1 &= K_{11} \cdot v_1 + K_{12} \cdot v_2, \\ u_2 &= K_{21} \cdot v_1 + K_{22} \cdot v_2. \end{aligned} \tag{1}$$

Denken wir uns in der Funktion $\vartheta_\alpha(v_1, v_2)$ die neuen Veränderlichen u_1 und u_2 eingeführt, so möge dieselbe durch $f_\alpha(u_1, u_2)$ bezeichnet werden. Dann ist:

$$\begin{aligned} K \cdot \frac{\partial f_\alpha(u_1, u_2)}{\partial u_1} &= K_{22} \cdot \frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\partial v_1} - K_{21} \cdot \frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\partial v_2}, \\ K \cdot \frac{\partial f_\alpha(u_1, u_2)}{\partial u_2} &= - K_{12} \cdot \frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\partial v_1} + K_{11} \cdot \frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\partial v_2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Setzen wir jetzt $u_1 = u_2 = v_1 = v_2 = 0$ und berücksichtigen die früher gefundenen Resultate, so folgt, dafs die ersten Differentialquotienten der ungeraden Funktionen $f_\alpha(u_1, u_2)$ nach u_1 und u_2 für die Nullwerte der Argumente sich rational durch die Thetafunktionen für die Nullwerte der Argumente darstellen lassen.

Bezeichnen wir die Differentialquotienten für die Nullwerte der Argumente durch den Index 0, so ergeben sich die Resultate:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_3(u_1, u_2)_0}{\partial u_1} &= 0, \\ \frac{\partial f_3(u_1, u_2)_0}{\partial u_2} &= \frac{\vartheta_{01} \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_{03} \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{14}}{\vartheta_{34}^2 \cdot \vartheta_4^2 \cdot \vartheta_5^2}, \\ \frac{\partial f_{24}(u_1, u_2)_0}{\partial u_1} &= - \frac{\vartheta_{03} \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{14}}{\vartheta_{34} \cdot \vartheta_4 \cdot \vartheta_5}, \\ \frac{\partial f_{24}(u_1, u_2)_0}{\partial u_2} &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

$$
(3)\quad
\begin{aligned}
\frac{\partial f_{04}(u_1, u_2)_0}{\partial u_1} &= \frac{\vartheta_{14} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_{23}}{\vartheta_{34} \cdot \vartheta_4 \cdot \vartheta_5}, \\
\frac{\partial f_{04}(u_1, u_2)_0}{d u_2} &= \frac{\vartheta_{14} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_{23}}{\vartheta_{34} \cdot \vartheta_4 \cdot \vartheta_5}, \\
\frac{\partial f_1(u_1, u_2)_0}{\partial u_1} &= \frac{\vartheta_5 \cdot \vartheta_4 \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_0}{\vartheta_{34} \cdot \vartheta_4 \cdot \vartheta_5}, \\
\frac{\partial f_1(u_1, u_2)_0}{\partial u_2} &= \varkappa^2 \cdot \frac{\vartheta_5 \cdot \vartheta_4 \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_0}{\vartheta_{34} \cdot \vartheta_4 \cdot \vartheta_5}, \\
\frac{\partial f_{02}(u_1, u_2)_0}{\partial u_1} &= \frac{\vartheta_{12} \cdot \vartheta_{34} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_4}{\vartheta_{34} \cdot \vartheta_4 \cdot \vartheta_5}, \\
\frac{\partial f_{02}(u_1, u_2)_0}{\partial u_2} &= \lambda^2 \cdot \frac{\vartheta_{12} \cdot \vartheta_{34} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_4}{\vartheta_{34} \cdot \vartheta_4 \cdot \vartheta_5}, \\
\frac{\partial f_{13}(u_1, u_2)_0}{\partial u_1} &= \frac{\vartheta_{23} \cdot \vartheta_{03} \cdot \vartheta_5 \cdot \vartheta_{34}}{\vartheta_{34} \cdot \vartheta_4 \cdot \vartheta_5}, \\
\frac{\partial f_{13}(u_1, u_2)_0}{\partial u_2} &= \mu^2 \cdot \frac{\vartheta_{23} \cdot \vartheta_{03} \cdot \vartheta_5 \cdot \vartheta_{34}}{\vartheta_{34} \cdot \vartheta_4 \cdot \vartheta_5}.
\end{aligned}
$$

Bezeichnen wir die geraden Funktionen $f_\alpha(u_1, u_2)$ für die Nullwerte der Argumente durch f_α, so wollen wir, wenn α den Index einer geraden Funktion bedeutet, setzen:

$$
(4)\qquad \frac{f_\alpha(u_1, u_2)}{f_\alpha} = \sigma_\alpha(u_1, u_2);\ ^{*)}
$$

bedeutet dagegen α den Index einer ungeraden Funktion, so setzen wir:

$$
(5)\qquad \frac{f_\alpha(u_1, u_2)}{\dfrac{\partial f_\alpha(u_1, u_2)_0}{\partial u_1} + \dfrac{\partial f_\alpha(u_1, u_2)_0}{\partial u_2}} = \sigma_\alpha(u_1, u_2)
$$

und bezeichnen diese Funktionen wenn nötig auf analoge Weise wie die Thetafunktionen mit Hülfe von Charakteristiken. Diese σ-Funktionen besitzen dann die Eigentümlichkeit, daſs ihre ersten Differentialquotienten nach u_1 und u_2 für die Nullwerte der Argumente entweder verschwinden, oder aber sich rational durch $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 ausdrücken lassen und zwar wird:

$$
(6)\quad
\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_3(u_1, u_2)_0}{\partial u_1} &= 0, & \frac{\partial \sigma_3(u_1, u_2)_0}{\partial u_2} &= 1, \\
\frac{\partial \sigma_{24}(u_1, u_2)_0}{\partial u_1} &= 1, & \frac{\partial \sigma_{24}(u_1, u_2)_0}{\partial u_2} &= 0, \\
\frac{\partial \sigma_{04}(u_1, u_2)_0}{\partial u_1} &= \frac{1}{2}, & \frac{\partial \sigma_{04}(u_1, u_2)_0}{\partial u_2} &= \frac{1}{2},
\end{aligned}
$$

*) Cf. u. a. Staude, Math. Annalen 24.

$$(6)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_1(u_1, u_2)_0}{\partial u_1} = \frac{1}{1+\varkappa^2}, && \frac{\partial \sigma_1(u_1, u_2)_0}{\partial u_2} = \frac{\varkappa^2}{1+\varkappa^2}, \\ &\frac{\partial \sigma_{02}(u_1, u_2)_0}{\partial u_1} = \frac{1}{1+\lambda^2}, && \frac{\partial \sigma_{02}(u_1, u_2)_0}{\partial \sigma_2} = \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}, \\ &\frac{\partial \sigma_{13}(u_1, u_2)_0}{\partial u_1} = \frac{1}{1+\mu^2}, && \frac{\partial \sigma_{13}(u_1, u_2)_0}{\partial u_2} = \frac{\mu^2}{1+\mu^2}. \end{aligned}$$

Einer jeden Relation der Thetafunktionen wird dann eine Relation der σ-Funktionen entsprechen. Hierbei zeigt sich das Resultat, dafs in allen diesen Relationen die Koefficienten sich rational aus $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 zusammensetzen lassen. Die Richtigkeit der Behauptung kann durch direkte Transformation der früheren Formeln bewiesen werden; sie folgt auch aus den Untersuchungen, die später über die Differentialquotienten der hyperelliptischen Funktionen angestellt werden.

Den Quotienten zweier σ-Funktionen nennen wir eine hyperelliptische Funktion. Nehmen wir als Nenner die Funktion $\sigma_5(u_1, u_2)$ so wollen wir setzen:

$$(7)\qquad \frac{\sigma_\alpha(u_1, u_2)}{\sigma_5(u_1, u_2)} = al_\alpha(u_1, u_2)$$

und auch hier wenn nötig die frühere Charakteristikenbezeichnung gebrauchen. Dann folgen aus den Beziehungen, die wir für die Thetafunktionen gefunden haben, eine grofse Reihe von Beziehungen für die hyperelliptischen Funktionen. Auch in ihnen werden die Koefficienten sich rational aus $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 zusammensetzen lassen.

Wir greifen aus diesen Beziehungen folgende heraus:

Sämtliche Funktionen mit den Argumenten $u_1 + u_1'$, $u_2 + u_2'$ lassen sich rational durch die Funktionen mit den Argumenten u_1, u_2 und u_1', u_2' ausdrücken, d. h. die Funktionen $al_\alpha(u_1 + u_1', u_2 + u_2')$ sind rationale Funktionen der Gröfsen $al_\alpha(u_1, u_2)$ und $al_\alpha(u_1', u_2')$.

Ferner folgt:

Die Produkte $al_\alpha(u_1 + u_1', u_2 + u_2') \,.\, al_\alpha(u_1 - u_1', u_2 - u_2')$ lassen sich rational durch die Gröfsen $al[\omega_\varepsilon](u_1, u_2)$, $al[\omega_\varepsilon](u_1', u_2')$ ausdrücken, wenn $[\omega_\varepsilon]$ drei Charakteristiken bedeutet, deren zugehörende Thetafunktionen mit der fundamentalen Thetafunktion ein gerades Vierersystem bilden.

Setzen wir ferner:

$$(8)\quad \begin{aligned} &2K_{11} \,.\, \tau_{11} + 2K_{12} \,.\, \tau_{12} = 2K_{11}', && 2K_{11} \,.\, \tau_{12} + 2K_{12} \,.\, \tau_{22} = 2K_{12}', \\ &2K_{21} \,.\, \tau_{11} + 2K_{22} \,.\, \tau_{12} = 2K_{21}', && 2K_{21} \,.\, \tau_{12} + 2K_{22} \,.\, \tau_{22} = 2K_{22}', \end{aligned}$$

so folgt leicht, dafs die sämtlichen hyperelliptischen Funktionen vierfach periodische Funktionen sind, da sie, vom Zeichen abgesehen, sich nicht ändern, wenn wir an Stelle von u_1, u_2 der Reihe nach setzen:

$$\begin{array}{ll} u_1 + K_{11}, & u_2 + K_{21}, \\ u_1 + K_{12}, & u_2 + K_{22}, \\ u_1 + K_{11}', & u_2 + K_{21}', \\ u_1 + K_{12}', & u_2 + K_{22}'. \end{array}$$

Die Einführung der σ- und der hyperelliptischen Funktionen beruht wesentlich auf der Parameterdarstellung der ersten Differentialquotienten der Thetafunktionen für die Nullwerte der Argumente. Wir haben dabei eine ganz bestimmte Parameterdarstellung zu Grunde gelegt. Aufser derselben ist noch eine bedeutend allgemeinere mit Hülfe der Gröfsen α_{11}, α_{12}, α_{21}, α_{22} gegeben worden. Es ist klar, dafs auf Grund dieser Gröfsen α eine allgemeinere Definition der σ- und der hyperelliptischen Funktionen gegeben werden kann. Es möge dieses nur angedeutet sein, da in der Folge lediglich von der oben gegebenen Definition der neuen Funktionen ausgegangen werden soll. In Bezug auf alles übrige möge auf die Arbeit von Staude im 24ten Bande der Mathematischen Annalen verwiesen worden.

§ 20.

Über das gleichzeitige Verschwinden der ungeraden Thetafunktionen.*)

Wir stellen jetzt das Problem:

Es sollen alle Werte von v_1, v_2 bestimmt werden, welche die Gleichungen erfüllen:

$$(1) \qquad \vartheta_1(v_1, v_2) = 0, \qquad \vartheta_3(v_1, v_2) = 0, \qquad \vartheta_{13}(v_1, v_2) = 0.$$

Wir wollen alle diese Werte bezeichnen durch $v_1 = e_1$, $v_2 = e_2$.

Es kann dann gezeigt werden, dafs jedenfalls die Gleichungen bestehen müssen:

$$(2) \qquad \begin{aligned} \frac{\vartheta_1(v_1 + e_1, v_2 + e_2)^2}{\vartheta_5(v_1 + e_1, v_2 + e_2)^2} &= \frac{\vartheta_1(v_1, v_2)^2}{\vartheta_5(v_1, v_2)^2}, \\ \frac{\vartheta_3(v_1 + e_1, v_2 + e_2)^2}{\vartheta_5(v_1 + e_1, v_2 + e_2)^2} &= \frac{\vartheta_3(v_1, v_2)^2}{\vartheta_5(v_1, v_2)^2}, \\ \frac{\vartheta_{13}(v_1 + e_1, v_2 + e_2)^2}{\vartheta_5(v_1 + e_1, v_2 + v_2)^2} &= \frac{\vartheta_{13}(v_1, v_2)^2}{\vartheta_5(v_1, v_2)^2}. \end{aligned}$$

*) Cf. Königsberger, Crelle 65.

In der That, zunächst folgt, dafs für diejenigen Werte der Veränderlichen, für welche die drei Funktionen $\vartheta_1(v_1, v_2)$, $\vartheta_3(v_1, v_2)$, $\vartheta_{13}(v_1, v_2)$ verschwinden, nicht auch die Funktion $\vartheta_5(v_1, v_2)$ verschwinden kann.

Es folgt das aus der Formel des Additionstheoremes:

$$(3)\qquad \begin{aligned} &\vartheta_5^2 \,.\, \vartheta_5(v_1 + e_1, v_2 + e_2) \,.\, \vartheta_5(v_1 - e_1, v_2 - e_2) \\ &= \vartheta_5(v_1, v_2)^2 \,.\, \vartheta_5(e_1, e_2)^2 + \vartheta_1(v_1, v_2)^2 \,.\, \vartheta_1(e_1, e_2)^2 \\ &+ \vartheta_3(v_1, v_2)^2 \,.\, \vartheta_3(e_1, e_2)^2 + \vartheta_{13}(v_1, v_2)^2 \,.\, \vartheta_{13}(e_1, e_2)^2. \end{aligned}$$

Wenn also die drei ungeraden Thetafunktionen auf der rechten Seite mit den Argumenten e_1 und e_2 verschwinden, so müfste auch die linke Seite für beliebige Werte von v_1 und v_2 verschwinden, was nicht geht.

Anderseits ist nun für beliebige Werte von e_1 und e_2:

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\vartheta_5 \,.\, \vartheta_2 \,.\, \vartheta_2(v_1 + e_1, v_2 + e_2) \,.\, \vartheta_5(v_1 - e_1, v_2 - e_2) \\ &= \vartheta_5(v_1, v_2) \,.\, \vartheta_2(v_1, v_2) \,.\, \vartheta_5(e_1, e_2) \,.\, \vartheta_2(e_1, e_2) \\ &- \vartheta_1(v_1, v_2) \,.\, \vartheta_{12}(v_1, v_2) \,.\, \vartheta_1(e_1, e_2) \,.\, \vartheta_{12}(e_1, e_2) \\ &+ \vartheta_3(v_1, v_2) \,.\, \vartheta_{23}(v_1, v_2) \,.\, \vartheta_3(e_1, e_2) \,.\, \vartheta_{23}(e_1, e_2) \\ &- \vartheta_{13}(v_1, v_2) \,.\, \vartheta_{04}(v_1, v_2) \,.\, \vartheta_{13}(e_1, e_2) \,.\, \vartheta_{04}(e_1, e_2). \end{aligned}$$

Für die speziellen Werte e_1 und e_2 ergiebt sich dann:

$$(5)\qquad \frac{\vartheta_2(v_1 + e_1, v_2 + e_2)}{\vartheta_5(v_1 + e_1, v_2 + e_2)} = \frac{\vartheta_5}{\vartheta_2} \,.\, \frac{\vartheta_2(e_1, e_2)}{\vartheta_5(e_1, e_2)} \,.\, \frac{\vartheta_2(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)}.$$

Genau so würde folgen:

$$(6)\qquad \frac{\vartheta_{12}(v_1 + e_1, v_2 + e_2)}{\vartheta_5(v_1 + e_1, v_2 + e_2)} = \frac{\vartheta_5}{\vartheta_{12}} \,.\, \frac{\vartheta_{12}(e_1, e_2)}{\vartheta_5(e_1, e_2)} \,.\, \frac{\vartheta_{12}(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)},$$

also durch Division:

$$(7)\qquad \frac{\vartheta_{12}(v_1 + e_1, v_2 + e_2)}{\vartheta_2(v_1 + e_1, v_2 + e_2)} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_{12}} \,.\, \frac{\vartheta_{12}(e_1, e_2)}{\vartheta_2(e_1, e_2)} \,.\, \frac{\vartheta_{12}(v_1, v_2)}{\vartheta_2(v_1, v_2)}.$$

Durch Substitution halber Perioden ergiebt sich hieraus die Beziehung:

$$(8)\qquad \frac{\vartheta_1(v_1 + e_1, v_2 + e_2)}{\vartheta_5(v_1 + e_1, v_2 + e_2)} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_{12}} \,.\, \frac{\vartheta_{12}(e_1, e_2)}{\vartheta_2(e_1, e_2)} \,.\, \frac{\vartheta_1(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)}.$$

Setzt man aber in Gl. (7) $v_1 = -e_1$, $v_2 = -e_2$, so ergiebt sich:

$$(9)\qquad \frac{\vartheta_{12}(e_1, e_2)^2}{\vartheta_2(e_1, e_2)^2} = \frac{\vartheta_{12}^2}{\vartheta_2^2},$$

so dafs wir in der That die Beziehung erhalten:

$$(10)\qquad \frac{\vartheta_1(v_1 + e_1, v_2 + e_2)^2}{\vartheta_5(v_1 + e_1, v_2 + e_2)^2} = \frac{\vartheta_1(v_1, v_2)^2}{\vartheta_5(v_1, v_2)^2}.$$

Das analoge würde für die Indices 3 und 13 folgen.

Nehmen wir ferner den Ausdruck:

$$\vartheta_5(v_1, v_2)^2 \cdot \frac{\partial^2 \log \vartheta_5(v_1, v_2)}{\partial v_\varepsilon^2}, \quad \varepsilon = 1, 2,$$

so ist dieser eine Thetafunktion 2ter Ordnung mit der Charakteristik Null, kann also nach früher angegebenen Regeln durch die ursprünglichen Thetafunktionen dargestellt werden.

Es ergiebt sich dann, wie unmittelbar klar, die Beziehung:

$$(11)\quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \log \vartheta_5(v_1, v_2)}{\partial v_\varepsilon^2} &= \frac{\partial^2 \vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial v_\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{\vartheta_5} \\ &+ \left(\frac{\partial \vartheta_1(v_1, v_2)_0}{\partial v_\varepsilon}\right)^2 \cdot \frac{1}{\vartheta_5^2} \cdot \frac{\vartheta_1(v_1, v_2)^2}{\vartheta_5(v_1, v_2)^2} \\ &+ \left(\frac{\partial \vartheta_3(v_1, v_2)_0}{\partial v_\varepsilon}\right)^2 \cdot \frac{1}{\vartheta_5^2} \cdot \frac{\vartheta_3(v_1, v_2)^2}{\vartheta_5(v_1, v_2)^2} \\ &+ \left(\frac{\partial \vartheta_{13}(v_1, v_2)_0}{\partial v_\varepsilon}\right)^2 \cdot \frac{1}{\vartheta_5^2} \cdot \frac{\vartheta_{13}(v_1, v_2)^2}{\vartheta_5(v_1, v_2)^2}. \qquad \varepsilon = 1, 2. \end{aligned}$$

Ebenso folgt:

$$(12)\quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \log \vartheta_5(v_1, v_2)}{\partial v_1 \,.\, \partial v_2} &= \frac{\partial^2 \vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial v_1 \,.\, \partial v_2} \cdot \frac{1}{\vartheta_5} \\ &+ \frac{\partial \vartheta_1(v_1, v_2)_0}{\partial v_1} \cdot \frac{\partial \vartheta_1(v_1, v_2)_0}{\partial v_2} \cdot \frac{1}{\vartheta_5^2} \cdot \frac{\vartheta_1(v_1, v_2)^2}{\vartheta_5(v_1, v_2)^2} \\ &+ \frac{\partial \vartheta_3(v_1, v_2)_0}{\partial v_1} \cdot \frac{\partial \vartheta_3(v_1, v_2)_0}{\partial v_2} \cdot \frac{1}{\vartheta_5^2} \cdot \frac{\vartheta_3(v_1, v_2)^2}{\vartheta_5(v_1, v_2)^2} \\ &+ \frac{\partial \vartheta_{13}(v_1, v_2)_0}{\partial v_1} \cdot \frac{\partial \vartheta_{13}(v_1, v_2)_0}{\partial v_2} \cdot \frac{1}{\vartheta_5^2} \cdot \frac{\vartheta_{13}(v_1, v_2)^2}{\vartheta_5(v_1, v_2)^2}. \end{aligned}$$

Die Indices Null auf den rechten Seiten bedeuten, daſs die Differentialquotienten für die Nullwerte der Veränderlichen zu bilden sind.

Hieraus folgt, daſs die zu bestimmenden Werte e_1 und e_2 jedenfalls den Gleichungen Genüge leisten müssen:

$$(13)\quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \log \vartheta_5(v_1 + e_1, v_2 + e_2)}{\partial v_\varepsilon^2} &= \frac{\partial^2 \log \vartheta_5(v_1, v_2)}{\partial v_\varepsilon^2}, \\ \frac{\partial^2 \log \vartheta_5(v_1 + e_1, v_2 + e_2)}{\partial v_1 \,.\, \partial v_2} &= \frac{\partial^2 \log \vartheta_5(v_1, v_2)}{\partial v_1 \,.\, \partial v_2}. \end{aligned}$$

Durch Integration ergiebt sich hieraus die Beziehung:

$$(14)\qquad \vartheta_5(v_1 + e_1, v_2 + e_2) = e^{p \cdot v_1 + q \cdot v_2 + r} \,.\, \vartheta_5(v_1, v_2),$$

wobei p, q, r Konstanten bedeuten.

Seien nun e_1', e_2' andere Werte, für welche $\vartheta_1(v_1, v_2)$, $\vartheta_3(v_1, v_2)$, $\vartheta_{13}(v_1, v_2)$ zu gleicher Zeit verschwinden, so erhält man analog:

$$(15)\qquad \vartheta_5(v_1 + e_1', v_2 + e_2') = e^{p_1 \cdot v_1 + q_1 \cdot v_2 + r_1} \,.\, \vartheta_5(v_1, v_2).$$

Also:

$$\vartheta_5(e_1+e_1', e_2+e_2')=e^{p\cdot e_1'+q\cdot e_2'+r}.\vartheta_5(e_1', e_2')=e^{p\cdot e_1'+q\cdot e_2'+r+r_1}.\vartheta_5$$
$$=e^{p_1\cdot e_1+q_1\cdot e_2+r_1}.\vartheta_5(e_1, e_2)=e^{p_1\cdot e_1+q_1\cdot e_2+r+r_1}.\vartheta_5.$$

Mithin erhalten wir:

(16) $$pe_1'+qe_2'-p_1e_1-q_1e_2=2s\pi i.$$

Nun entsprechen den speziellen Werten:

$e_1'=0,\ e_2'=1;\ e_1'=1,\ e_2'=0;\ e_1'=\tau_{11},\ \ e_2'=\tau_{12};\ e_1'=\tau_{12},\ e_2'=\tau_{22}$

die Werte

$p_1=0,\ q_1=0;\ p_1=0,\ q_1=0;\ p_1=-2\pi i,\ q_1=0;\ p_1=0,\ q_1=-2\pi i.$

Hieraus ergeben sich dann die gesuchten Werte in der Form:

(17) $$e_1=m+n_1\tau_{11}+n_2\tau_{12};\ \ e_2=m_1+n_1\tau_{12}+n_2\tau_{22}.$$

Da nun für diese Werte die drei übrigen ungeraden Thetafunktionen auch verschwinden, so erhalten wir den

Lehrsatz.

Die sämtlichen Werte der Argumente, für welche die sechs ungeraden Thetafunktionen verschwinden, sind von der Form:

$$v_1=e_1=m+n_1\tau_{11}+n_2\tau_{12};\ \ v_2=e_2=m_1+n_1\tau_{12}+n_2\tau_{22}.$$

Aus diesem Lehrsatz folgt dann mit Hülfe weniger Schlüsse der

Lehrsatz.

Die hinreichenden und notwendigen Bedingungen dafür, dafs die 15 hyperelliptischen Funktionen mit den Argumenten u_1, u_2 d. h. die Funktionen $al_\alpha(u_1, u_2)$ gleich den entsprechenden hyperelliptischen Funktionen mit den Argumenten u_1', u_2' d. h. gleich den Funktionen $al_\alpha(u_1', u_2')$ sind, bestehen in der Existenz der Gleichungen:

$$u_1=u_1'+2mK_{11}+2m_1K_{12}+2n_1K_{11}'+2n_2K_{12}',$$
$$u_2=u_2'+2mK_{21}+2m_1K_{22}+2n_1K_{21}'+2n_2K_{22}'.$$

§ 21.*)

Die rationale Transformation der hyperelliptischen Funktionen erster Ordnung.

Denken wir uns die 16 ursprünglichen Thetafunktionen für neue Argumente v_1', v_2' und neue Moduln τ_{11}', τ_{12}', τ_{22}' gebildet, die den Konvergenzbedingungen Genüge leisten, so können mit ihrer Hülfe neue hyperelliptische Funktionen gebildet werden, deren Argumente durch u_1' und u_2' bezeichnet werden sollen. Die den Gröfsen K entsprechenden Gröfsen bezeichnen wir durch die Buchstaben C. Das Problem der rationalen Transformation der hyperelliptischen Funktionen erster Ordnung lautet dann:

Es sollen die hinreichenden und notwendigen Bedingungen dafür aufgestellt werden, dafs die Funktionen mit den Argumenten u_1', u_2' und den Gröfsen τ_{11}', τ_{12}', τ_{22}' sich rational durch die Funktionen mit den Argumenten u_1, u_2 und den Gröfsen τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} ausdrücken lassen, unter der Voraussetzung, dafs die Relationen bestehen:

$$u_1' = M_0 \,.\, u_1 + M_1 \,.\, u_2,$$
$$u_2' = M_2 \,.\, u_1 + M_3 \,.\, u_2.$$

Es ist hiermit die Bedingung gesetzt, dafs den Werten $u_1 = u_2 = 0$ auch die Werte $u_1' = 0$, $u_2' = 0$ entsprechen. Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dafs mit Hülfe des Additionstheoremes der allgemeine Fall, dafs $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ beliebige Werte $u_1' = u_1^{(0)}$, $u_2' = u_2^{(0)}$ entsprechen, auf den speziellen zurückgeführt werden kann.

Es ist nicht schwer, eine Reihe notwendiger Bedingungen aufzustellen. Wenn die Funktionen mit den Argumenten u_1', u_2' sich rational durch die Funktionen mit den Argumenten u_1, u_2 ausdrücken lassen, so müssen nach den Erörterungen des vorigen Paragraphen die Relationen bestehen (1):

$$M_0 \,.\, K_{11} + M_1 \,.\, K_{21} = a_0 \,.\, C_{11} + a_1 \,.\, C_{12} + a_2 \,.\, C_{12}' + a_3 \,.\, C_{11}',$$
$$M_0 \,.\, K_{12} + M_1 \,.\, K_{22} = b_0 \,.\, C_{11} + b_1 \,.\, C_{12} + b_2 \,.\, C_{12}' + b_3 \,.\, C_{11}',$$
$$M_0 \,.\, K_{12}' + M_1 \,.\, K_{22}' = c_0 \,.\, C_{11} + c_1 \,.\, C_{12} + c_2 \,.\, C_{12}' + c_3 \,.\, C_{11}',$$
$$M_0 \,.\, K_{11}' + M_1 \,.\, K_{21}' = d_0 \,.\, C_{11} + d_1 \,.\, C_{12} + d_2 \,.\, C_{12}' + d_3 \,.\, C_{11}',$$

*) Cf. Hermite l. c., Königsberger Crelle 65.

$$
\begin{aligned}
M_2 \,.\, K_{11} + M_3 \,.\, K_{21} &= a_0 \,.\, C_{21} + a_1 \,.\, C_{22} + a_2 \,.\, C_{22}' + a_3 \,.\, C_{21}', \\
M_2 \,.\, K_{12} + M_3 \,.\, K_{22} &= b_0 \,.\, C_{21} + b_1 \,.\, C_{22} + b_2 \,.\, C_{22}' + b_3 \,.\, C_{21}', \\
M_2 \,.\, K_{12}' + M_3 \,.\, K_{22}' &= c_0 \,.\, C_{21} + c_1 \,.\, C_{22} + c_2 \,.\, C_{22}' + c_3 \,.\, C_{21}', \\
M_2 \,.\, K_{11}' + M_3 \,.\, K_{21}' &= d_0 \,.\, C_{21} + d_1 \,.\, C_{22} + d_2 \,.\, C_{22}' + d_3 \,.\, C_{21}'.
\end{aligned}
$$

Setzen wir:

$$
(2) \qquad a_0 + a_3 \,.\, \tau_{11}' + a_2 \,.\, \tau_{12}' = A_0, \quad a_1 + a_3 \,.\, \tau_{12}' + a_2 \,.\, \tau_{22}' = A_1
$$

und führen analoge Gröfsen B, C, D ein, so können vermöge der Relationen, die zwischen den Gröfsen τ' und C' bestehen, die Gleichungen in die Form gebracht werden:

$$
(3) \qquad
\begin{aligned}
M_0 \,.\, K_{11} + M_1 \,.\, K_{21} &= C_{11} \,.\, A_0 + C_{12} \,.\, A_1, \\
M_0 \,.\, K_{12} + M_1 \,.\, K_{22} &= C_{11} \,.\, B_0 + C_{12} \,.\, B_1, \\
M_0 \,.\, K_{12}' + M_1 \,.\, K_{22}' &= C_{11} \,.\, C_0 + C_{12} \,.\, C_1, \\
M_0 \,.\, K_{11}' + M_1 \,.\, K_{21}' &= C_{11} \,.\, D_0 + C_{12} \,.\, D_1, \\
M_2 \,.\, K_{11} + M_3 \,.\, K_{21} &= C_{21} \,.\, A_0 + C_{22} \,.\, A_1, \\
M_2 \,.\, K_{12} + M_3 \,.\, K_{22} &= C_{21} \,.\, B_0 + C_{22} \,.\, B_1, \\
M_2 \,.\, K_{12}' + M_3 \,.\, K_{22}' &= C_{21} \,.\, C_0 + C_{22} \,.\, C_1, \\
M_2 \,.\, K_{11}' + M_3 \,.\, K_{21}' &= C_{21} \,.\, D_0 + C_{22} \,.\, D_1.
\end{aligned}
$$

Denken wir uns in diesen Gleichungen die Gröfsen K' ersetzt durch die Gröfsen K und τ, so ergeben sich die Gleichungen:

$$
(4) \qquad
\begin{aligned}
A_0 \,.\, \tau_{11} + B_0 \,.\, \tau_{12} &= D_0, & A_0 \,.\, \tau_{12} + B_0 \,.\, \tau_{22} &= C_0, \\
A_1 \,.\, \tau_{11} + B_1 \,.\, \tau_{12} &= D_1, & A_1 \,.\, \tau_{12} + B_1 \,.\, \tau_{22} &= C_1,
\end{aligned}
$$

oder also:

$$
(5) \qquad
\begin{aligned}
(A_0 \,.\, B_1 - B_0 \,.\, A_1)\,\tau_{11} &= D_0 \,.\, B_1 - B_0 \,.\, D_1, \\
(A_0 \,.\, B_1 - B_0 \,.\, A_1)\,\tau_{12} &= A_0 \,.\, D_1 - D_0 \,.\, A_1 = C_0 B_1 - B_0 C_1, \\
(A_0 \,.\, B_1 - B_0 \,.\, A_1)\,\tau_{22} &= A_0 \,.\, C_1 - C_0 \,.\, A_1.
\end{aligned}
$$

Aus den Ausdrücken, die sich hiernach für τ_{12} ergeben, folgt, dafs die Zahlen a, b, c, d nicht völlig unabhängig von einander sind, sondern den Gleichungen Genüge leisten müssen:

$$
(6) \qquad
\begin{aligned}
a_0 \,.\, d_1 + b_0 \,.\, c_1 - c_0 \,.\, b_1 - d_0 \,.\, a_1 &= 0, \\
a_0 \,.\, d_2 + b_0 \,.\, c_2 - c_0 \,.\, b_2 - d_0 \,.\, a_2 &= 0, \\
a_0 \,.\, d_3 + b_0 \,.\, c_3 - c_0 \,.\, b_3 - d_0 \,.\, a_3 &= n,
\end{aligned}
$$

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
a_1 \,.\, d_2 + b_1 \,.\, c_2 - c_1 \,.\, b_2 - d_1 \,.\, a_2 &= n,\\
a_1 \,.\, d_3 + b_1 \,.\, c_3 - c_1 \,.\, b_3 - d_1 \,.\, a_3 &= 0,\\
a_2 \,.\, d_3 + b_2 \,.\, c_3 - c_2 \,.\, b_3 - d_2 \,.\, a_3 &= 0.
\end{aligned}
$$

In diesen Gleichungen bedeutet n eine willkürliche ganze Zahl, die wir den **Grad** der Transformation nennen.

Führt man die Bezeichnungen ein:

$$
(7)\qquad (a_i b_k - a_k b_i) = (ab)_{ik},
$$

so können die vorhin aufgestellten Ausdrücke von τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} in folgende Form gebracht werden:

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
N \,.\, \tau_{11} &= (db)_{01} + (db)_{31} \,.\, \tau_{11}' + 2(db)_{03} \,.\, \tau_{12}' + (db)_{02} \,.\, \tau_{22}'\\
&\qquad + (db)_{23}(\tau_{12}'^2 - \tau_{11}' \,.\, \tau_{22}'),\\
N \,.\, \tau_{12} &= (ad)_{01} + (ad)_{31} \,.\, \tau_{11}' + (2(ad)_{03} - n)\tau_{12}' + (ad)_{02} \,.\, \tau_{22}'\\
&\qquad + (ad)_{23}(\tau_{12}'^2 - \tau_{11}' \,.\, \tau'_{22}),\\
N \,.\, \tau_{22} &= (ac)_{01} + (ac)_{31} \,.\, \tau_{11}' + 2(ac)_{03} \,.\, \tau_{12}' + (ac)_{02} \,.\, \tau_{22}'\\
&\qquad + (ac)_{23}(\tau_{12}'^2 - \tau_{11}' \,.\, \tau_{22}'),\\
N &= (ab)_{01} + (ab)_{31} \,.\, \tau_{11}' + 2(ab)_{03} \,.\, \tau_{12}' + (ab)_{02} \,.\, \tau_{22}'\\
&\qquad + (ab)_{23}(\tau_{12}'^2 - \tau_{11}' \,.\, \tau_{22}').
\end{aligned}
$$

Ferner ergeben sich die Ausdrücke:

$$
(9)\qquad
\begin{aligned}
K \,.\, M_0 &= (C_{11} \,.\, A_0 + C_{12} \,.\, A_1) K_{22} - (C_{11} \,.\, B_0 + C_{12} \,.\, B_1) K_{21},\\
K \,.\, M_1 &= (C_{11} \,.\, B_0 + C_{12} \,.\, B_1) K_{11} - (C_{11} \,.\, A_0 + C_{12} \,.\, A_1) K_{12},\\
K \,.\, M_2 &= (C_{21} \,.\, A_0 + C_{22} \,.\, A_1) K_{22} - (C_{21} \,.\, B_0 + C_{22} \,.\, B_1) K_{21},\\
K \,.\, M_3 &= (C_{21} \,.\, B_0 + C_{22} \,.\, B_1) K_{11} - (C_{21} \,.\, A_0 + C_{22} \,.\, A_1) K_{12}.\\
K &= K_{11} \,.\, K_{22} - K_{12} \,.\, K_{21}.
\end{aligned}
$$

Denkt man sich die für die Gröfsen M gefundenen Ausdrücke in die Relationen eingesetzt, die zwischen den Veränderlichen u und den Veränderlichen u' bestehen, ferner die Veränderlichen u ersetzt durch die Veränderlichen v, die Gröfsen u' durch die Gröfsen v', so ergeben sich die Beziehungen:

$$
(10)\qquad
\begin{aligned}
v_1' &= A_0 \,.\, v_1 + B_0 \,.\, v_2,\\
v_2' &= A_1 \,.\, v_1 + B_1 \,.\, v_2.
\end{aligned}
$$

Aus dem Gleichungssysteme (3) ergeben sich unmittelbar die Gleichungen (11):

$$d_3(M_0.K_{11}+M_1.K_{21})+c_3(M_0.K_{12}+M_1.K_{22})-b_3(M_0.K_{12}'+M_1.K_{22}')$$
$$-a_3(M_0.K_{11}'+M_1.K_{21}')=n.C_{11},$$
$$d_2(M_0.K_{11}+M_1.K_{21})+c_2(M_0.K_{12}+M_1.K_{22})-b_2(M_0.K_{12}'+M_1.K_{22}')$$
$$-a_2(M_0.K_{11}'+M_1.K_{21}')=n.C_{12},$$
$$-d_1(M_0.K_{11}+M_1.K_{21})-c_1(M_0.K_{12}+M_1.K_{22})+b_1(M_0.K_{12}'+M_1.K_{22}')$$
$$+a_1(M_0.K_{11}'+M_1.K_{21}')=n.C_{12}',$$
$$-d_0(M_0.K_{11}+M_1.K_{21})-c_0(M_0.K_{12}+M_1.K_{22})+b_0(M_0.K_{12}'+M_1.K_{22}')$$
$$+a_0(M_0.K_{11}'+M_1.K_{21}')=n.C_{11}',$$

und vier ähnliche, in denen an Stelle von

$$M_0,\ M_1,\ C_{11},\ C_{12},\ C_{12}',\ C_{11}'$$

die Größen treten:

$$M_2,\ M_3,\ C_{21},\ C_{22},\ C_{22}',\ C_{21}'.$$

Aus diesen Gleichungen folgt die Existenz des weiteren Systems (12):

$$\frac{n}{M}(\quad M_3.C_{11}-M_1.C_{21})=\quad d_3.K_{11}+c_3.K_{12}-b_3.K_{12}'-a_3.K_{11}',$$

$$\frac{n}{M}(\quad M_3.C_{12}-M_1.C_{22})=\quad d_2.K_{11}+c_2.K_{12}-b_2.K_{12}'-a_2.K_{11}',$$

$$\frac{n}{M}(\quad M_3.C_{12}'-M_1.C_{22}')=-d_1.K_{11}-c_1.K_{12}+b_1.K_{12}'+a_1.K_{11}',$$

$$\frac{n}{M}(\quad M_3.C_{11}'-M_1.C_{21}')=-d_0.K_{11}-c_0.K_{12}+b_0.K_{12}'+a_0.K_{11}',$$

$$\frac{n}{M}(-M_2.C_{11}+M_0.C_{21})=\quad d_3.K_{21}+c_3.K_{22}-b_3.K_{22}'-a_3.K_{21}',$$

$$\frac{n}{M}(-M_2.C_{12}+M_0.C_{22})=\quad d_2.K_{21}+c_2.K_{22}-b_2.K_{22}'-a_2.K_{21}',$$

$$\frac{n}{M}(-M_2.C_{12}'+M_0.C_{22}')=-d_1.K_{21}-c_1.K_{22}+b_1.K_{22}'+a_1.K_{21}',$$

$$\frac{n}{M}(-M_2.C_{11}'+M_0.C_{21}')=-d_0.K_{21}-c_0.K_{22}+b_0.K_{22}'+a_0.K_{21}'.$$

Dasselbe ist aus dem ursprünglichen entstanden, indem an Stelle der Größen C die Größen K und umgekehrt gesetzt sind, ferner an Stelle der Größen:

$$M_0,\ M_1,\ M_2,\ M_3$$

die Größen

$$\frac{nM_3}{M},\ \frac{-nM_1}{M},\ \frac{-nM_2}{M},\ \frac{nM_0}{M};$$

endlich an Stelle der Größen:

$$\begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{matrix}$$

resp. die Gröfsen:

$$\begin{matrix} d_3 & c_3 & -b_3 & -a_3 \\ d_2 & c_2 & -b_2 & -a_2 \\ -d_1 & -c_1 & b_1 & a_1 \\ -d_0 & -c_0 & b_0 & a_0. \end{matrix}$$

Hieraus aber ergiebt sich mit leichter Mühe, dafs die weiteren Beziehungen bestehen (13):

$$\begin{aligned} &\tau_{11}'(-d_3 + a_3.\tau_{11} + b_3.\tau_{12}) + \tau_{12}'(-d_2 + a_2.\tau_{11} + b_2.\tau_{12}) \\ &\qquad\qquad = d_0 - a_0.\tau_{11} - b_0.\tau_{12}, \\ &\tau_{11}'(-c_3 + a_3.\tau_{12} + b_3.\tau_{22}) + \tau_{12}'(-c_2 + a_2.\tau_{12} + b_2.\tau_{22}) \\ &\qquad\qquad = c_0 - a_0.\tau_{12} - b_0.\tau_{22}, \\ &\tau_{12}'(-d_3 + a_3.\tau_{11} + b_3.\tau_{12}) + \tau_{22}'(-d_2 + a_2.\tau_{11} + b_2.\tau_{12}) \\ &\qquad\qquad = d_1 - a_1.\tau_{11} - b_1.\tau_{12}, \\ &\tau_{12}'(-c_3 + a_3.\tau_{12} + b_3.\tau_{22}) + \tau_{22}'(-c_2 + a_2.\tau_{12} + b_2.\tau_{22}) \\ &\qquad\qquad = c_1 - a_1.\tau_{12} - b_1.\tau_{22}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen liefern die Ausdrücke:

$$(14)\quad \begin{aligned} N_1.\tau_{11}' &= (cd)_{02} + (ac)_{02}.\tau_{11} + 2(bc)_{02}.\tau_{12} + (db)_{02}.\tau_{22} \\ &\qquad + (ab)_{02}(\tau_{12}^2 - \tau_{11}.\tau_{22}), \\ N_1.\tau_{12}' &= (cd)_{12} + (ac)_{12}.\tau_{11} + (2(bc)_{12} - n)\,\tau_{12} + (db)_{12}.\tau_{22}, \\ &\qquad + (ab)_{12}(\tau_{12}^2 - \tau_{11}.\tau_{22}), \\ N_1.\tau_{22}' &= (cd)_{31} + (ac)_{31}.\tau_{11} + 2(bc)_{31}.\tau_{12} + (db)_{31}.\tau_{22} \\ &\qquad + (ab)_{31}(\tau_{12}^2 - \tau_{11}.\tau_{22}), \\ N_1 \quad &= (cd)_{23} + (ac)_{23}.\tau_{11} + 2(bc)_{23}.\tau_{12} + (cb)_{23}.\tau_{22} \\ &\qquad + (ab)_{23}(\tau_{12}^2 - \tau_{11}.\tau_{22}). \end{aligned}$$

Ferner ergeben sich zwischen den Zahlen a, b, c, d, die wir mit dem Namen der Transformationszahlen bezeichnen wollen, die Beziehungen:

$$(15)\quad \begin{aligned} a_0.b_3 + a_1.b_2 - a_2.b_1 - a_3.b_0 &= 0, \\ a_0.c_3 + a_1.c_2 - a_2.c_1 - a_3.c_0 &= 0, \\ a_0.d_3 + a_1.d_2 - a_2.d_1 - a_3.d_0 &= n, \\ b_0.c_3 + b_1.c_2 - b_2.c_1 - b_3.c_0 &= n, \\ b_0.d_3 + b_1.d_2 - b_2.d_1 - b_3.d_0 &= 0, \\ c_0.d_3 + c_1.d_2 - c_2.d_1 - c_3.d_0 &= 0. \end{aligned}$$

Eine leichte Betrachtung zeigt, dafs diese Gleichungen auch unmittelbar aus dem Systeme (6) hätten gewonnen werden können und umgekehrt.

Endlich ergeben sich die Beziehungen:

$$(16)\quad \begin{aligned} v_1' &= \frac{n(c_2 - a_2.\tau_{21} - b_2.\tau_{22})}{N_1}\, v_1 - \frac{n(d_2 - a_2.\tau_{11} - b_2.\tau_{12})}{N_1}\, v_2, \\ v_2' &= \frac{n(-c_3 + a_3.\tau_{21} + b_3.\tau_{22})}{N_1}\, v_1 - \frac{n(-d_3 + a_3.\tau_{11} + b_3.\tau_{12})}{N_1}\, v_2. \end{aligned}$$

Alle die aufgestellten Gleichungen stellen notwendige Bedingungen der rationalen Transformation dar. Es soll gezeigt werden, dafs es auch die hinreichenden sind.

§ 22.*)

Betrachtung der allgemeinen Transformation n^{ten} Grades. Reduktion derselben auf gewisse einfache Transformationen.

Wir wollen uns jetzt zwei Transformationen nach einander ausgeübt denken. Die Transformationszahlen der ersten bezeichnen wir durch die Zahlen a, b, c, d und behalten für dieselbe die früheren Bezeichnungen bei. Die Transformationszahlen der zweiten bezeichnen wir durch α, β, γ, δ, nennen ferner die den Gröfsen M und C entsprechenden M', L, dann bestehen einerseits die Gleichungen (3) des vorigen Paragraphen, anderseits die aus ihnen hervorgehenden, wenn die genannten Vertauschungen vorgenommen werden. Hieraus folgt unmittelbar, dafs die beiden Transformationen sich zu einer dritten zusammensetzen, gleichbedeutend mit einer dritten sind, die auf die ursprünglichen Gröfsen angewandt wird und deren Zahlen lauten:

$$(1)\quad \begin{aligned} A_s &= a_0.\alpha_s + a_1.\beta_s + a_2.\gamma_s + a_3.\delta_s, \\ B_s &= b_0.\alpha_s + b_1.\beta_s + b_2.\gamma_s + b_3.\delta_s, \end{aligned}$$

*) Cf. u. a. des Verfassers Arbeit im 3ten Bande der Acta mathematica.

$$(1)\qquad \begin{aligned} C_s &= c_0 . \alpha_s + c_1 . \beta_s + c_2 . \gamma_s + c_3 . \delta_s, \\ D_s &= d_0 . \alpha_s + d_1 . \beta_s + d_2 . \gamma_s + d_3 . \delta_s. \end{aligned}$$

Wir wollen uns nun allgemein eine jede Transformation, deren Zahlen die Gröfsen a, b, c, d sind, durch die Determinante dargestellt denken:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

und diese mit dem Namen der Transformationsdeterminante bezeichnen. Dann entsteht durch Anwendung zweier beliebiger Transformationen eine dritte, deren Determinante gleich dem Produkte der beiden ursprünglichen ist. Hierbei ist aber die Multiplikation so auszuführen, dafs die Horizontalreihen der bei der ersten Transformation auftretenden Determinante mit den Vertikalreihen der zweiten multipliziert werden. Diese Art der Multiplikation soll in der Folge beibehalten werden.

Mit Hülfe dieses Satzes ist die Reduktion der allgemeinen Transformationen n^{ter} Ordnung auf gewisse einfache Fälle auf das Problem zurückgeführt, gewisse Determinanten vierter Ordnung als Produkt einfacher Determinanten darzustellen. Mit diesen Determinanten, zwischen deren Elementen die früher angegebenen Gleichungen bestehen, deren Wert überdies gleich n^2 ist, wollen wir uns zunächst beschäftigen.

Lehrsatz.

Sei $n = pk$, wobei p eine Primzahl bedeutet. Dann kann eine jede Determinante $(A_0\ B_1\ C_2\ D_3)$, die zu einer Transformation n^{ten} Grades gehört, in die Form gebracht werden:

$$(A_0\ B_1\ C_2\ D_3) = (a_0\ b_1\ c_2\ d_3)(\alpha_0\ \beta_1\ \gamma_2\ \delta_3).$$

Hierbei gehört die Determinante $(a_0\ b_1\ c_2\ d_3)$ zu einer Transformation p^{ten}, die Determinante $(\alpha_0\ \beta_1\ \gamma_2\ \delta_3)$ zu einer Transformation k^{ten} Grades, ferner sind die Elemente

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad b_2,\quad b_3,\quad c_3$$

sämtlich gleich Null.

Zum Beweise mufs nachgewiesen werden, dafs die folgenden Gleichungen zusammen bestehen können:

$$
(2)\quad
\begin{aligned}
&a_0.\alpha_0 = A_0,\ b_0.\alpha_0 + b_1.\beta_0 = B_0,\ c_0.\alpha_0 + c_1.\beta_0 + c_2.\gamma_0 = C_0,\\
&\qquad d_0.\alpha_0 + d_1.\beta_0 + d_2.\gamma_0 + d_3.\delta_0 = D_0,\\
&a_0.\alpha_1 = A_1,\ b_0.\alpha_1 + b_1.\beta_1 = B_1,\ c_0.\alpha_1 + c_1.\beta_1 + c_2.\gamma_1 = C_1,\\
&\qquad d_0.\alpha_1 + d_1.\beta_1 + d_2.\gamma_1 + d_3.\delta_1 = D_1,\\
&a_0.\alpha_2 = A_2,\ b_0.\alpha_2 + b_1.\beta_2 = B_2,\ c_0.\alpha_2 + c_1.\beta_2 + c_2.\gamma_2 = C_2,\\
&\qquad d_0.\alpha_2 + d_1.\beta_2 + d_2.\gamma_2 + d_3.\delta_2 = D_2,\\
&a_0.\alpha_3 = A_3,\ b_0.\alpha_3 + b_1.\beta_3 = B_3,\ c_0.\alpha_3 + c_1.\beta_3 + c_2.\gamma_3 = C_3,\\
&\qquad d_0.\alpha_3 + d_1.\beta_3 + d_2.\gamma_3 + d_3.\delta_3 = D_3.
\end{aligned}
$$

Zu gleicher Zeit müssen für die Elemente einer jeden der drei Determinanten die früher entwickelten Bedingungsgleichungen bestehen. Für die Zahlen a, b, c, d nehmen dieselben die Gestalt an:

$$
(3)\quad
\begin{aligned}
&a_0 . d_1 + b_0 . c_1 - c_0 . b_1 = 0,\\
&a_0 . d_2 + b_0 . c_2 \qquad\quad = 0,\\
&a_0 . d_3 = b_1 . c_2 \qquad\quad\ = p.
\end{aligned}
$$

Wir nehmen zunächst an, dafs die Gröfsen A_0, A_1, A_2, A_3 nicht sämtlich durch p teilbar sind. Dann folgt:

$$a_0 = 1,\ d_3 = p,\ A_0 = \alpha_0,\ A_1 = \alpha_1,\ A_2 = \alpha_2,\ A_3 = \alpha_3.$$

Wir machen ferner innerhalb der angegebenen Grenzen die Voraussetzung, dafs keine Zahl b_0 derart bestimmt werden kann, dafs zu gleicher Zeit den vier Kongruenzen Genüge geleistet wird:

$$B_s - b_0 . A_s \equiv 0 \bmod p \qquad {\scriptstyle s=0,\,1,\,2,\,3.}$$

Dann wird den Gleichungen:

$$b_0 . \alpha_s + b_1 . \beta_s = B_s$$

jedenfalls Genüge geleistet, wenn wir setzen:

$$b_0 = 0,\ b_1 = 1,\ B_0 = \beta_0,\ B_1 = \beta_1,\ B_2 = \beta_2,\ B_3 = \beta_3.$$

Die Bedingungsgleichungen, die zwischen den übrigen noch nicht bestimmten Gröfsen a, b, c, d bestehen, lauten dann:

$$c_2 = p,\ d_2 = 0,\ c_0 \equiv d_1.$$

Nach Annahme ist mindestens eine der Gröfsen A, z. B. A_0, durch p nicht teilbar. Dann folgt aus der zweiten Annahme, dafs unter den Gröfsen B mindestens eine, z. B. B_1, existieren mufs, die von B_0 verschieden ist und für welche nach dem Modul p

$$A_0 B_1 - B_0 A_1$$

einen von Null verschiedenen Wert annimmt.

Dann folgt, dafs die Zahlen c_0 und c_1 stets so zu bestimmen sind, dafs sie den Kongruenzen Genüge leisten:

$$c_0 \cdot A_0 + c_1 \cdot B_0 \equiv C_0 \mod p,$$
$$c_0 \cdot A_1 + c_1 \cdot B_1 \equiv C_1 \mod p;$$

ferner folgt, dafs dann zu gleicher Zeit die Kongruenzen erfüllt werden:

$$c_0 \cdot A_2 + c_1 . B_2 \equiv C_2 \mod p,$$
$$c_0 \cdot A_3 + c_1 \cdot B_3 \equiv C_3 \mod p.$$

In der That, setzen wir:

$$C_2 = c_0 . A_2 + c_1 . B_2 + \sigma_2,$$
$$C_3 = c_0 . A_3 + c_1 . B_3 + \sigma_3,$$

und berücksichtigen, dafs die Gleichungen stattfinden:

$$A_0 . C_3 + A_1 . C_2 - A_2 . C_1 - A_3 . C_0 = 0,$$
$$B_0 . C_3 + B_1 . C_2 - B_2 . C_1 - B_3 . C_0 = n,$$
$$A_0 . B_3 + A_1 . B_2 - A_2 . B_1 - A_3 . B_0 = 0,$$

so folgen die Congruenzen:

$$A_0 . \sigma_3 + A_1 . \sigma_2 \equiv 0 \mod p,$$
$$B_0 . \sigma_3 + B_1 . \sigma_2 \equiv 0 \mod p,$$

d. h.

$$\sigma_2 \equiv \sigma_3 \equiv 0 \mod p.$$

Zu gleicher Zeit folgt aus der Bestimmung der Gröfsen c_0 und c_1 unmittelbar die Bestimmung der Gröfsen $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. d_0 ist aus der Kongruenz bestimmt:

$$d_0 . A_0 + d_1 . B_0 \equiv D_0 \mod p,$$

wenn noch hinzugenommen wird, dafs

$$d_1 = c_0$$

ist. Setzen wir:

$$D_1 = d_0 . A_1 + d_1 . B_1 + s_1,$$
$$D_2 = d_0 . A_2 + d_1 . B_2 + s_2,$$
$$D_3 = d_0 . A_3 + d_1 . B_3 + s_3,$$

und berücksichtigen die Bedingungsgleichungen, denen die Gröfsen A, B, C, D Genüge leisten müssen, so folgt:

$$s_1 \equiv s_2 \equiv s_3 \equiv 0 \mod p,$$

d. h. auch die noch übrigen Gleichungen sind leicht zu erfüllen.

Wir nehmen jetzt den zweiten Unterfall.

Nicht alle Gröfsen A_0, A_1, A_2, A_3 sind durch p teilbar, z. B.

nicht A_0, dagegen läfst sich eine Gröfse b_0 derart bestimmen, dafs die vier Kongruenzen zusammen bestehen:

$$B_s - b_0 . A_s \equiv 0 \bmod p \qquad {\scriptstyle s=0,\,1,\,2,\,3.}$$

In diesem Falle wird allen Gleichungen Genüge geleistet, wenn wir setzen:

$$a_0 = 1,\ b_1 = p,\ c_0 = 0,\ c_1 = 0,\ c_2 = 1,\ d_1 = 0,\ d_2 = -b_0,\ d_3 = p,$$

$$\alpha_0 = A_0,\ \alpha_1 = A_1,\ \alpha_2 = A_2,\ \alpha_3 = A_3,\ \gamma_0 = C_0,\ \gamma_1 = C_1,\ \gamma_2 = C_2,\ \gamma_3 = C_3,$$

$$p.\beta_0 = B_0 - b_0 . A_0,\ p.\beta_1 = B_1 - b_0 . A_1,\ p.\beta_2 = B_2 - b_0 . A_2,$$

$$p.\beta_3 = B_3 - b_0 . A_3,$$

und d_0, δ_0, δ_1, δ_2, δ_3 aus den Gleichungen bestimmt werden:

$$d_0 . A_s - b_0 . C_s + p . \delta_s = D_s.$$

Wir kommen zu dem zweiten Fall, dafs alle Gröfsen A_0, A_1, A_2, A_3 durch p teilbar sind.

Nimmt man dann den ersten Unterfall, dafs nicht alle Gröfsen B_0, B_1, B_2, B_3 durch p teilbar sind, so wird allen Gleichungen Genüge geleistet, wenn wir setzen:

$$a_0 = p,\ b_0 = 0,\ b_1 = 1,\ c_0 = 0,\ c_2 = p,\ d_0 = 0,\ d_1 = 0,\ d_2 = 0,\ d_3 = 1,$$

und c_1 aus der Kongruenz

$$c_1 . B_s \equiv C_s \bmod p$$

bestimmen. Die Bestimmung der Gröfsen α, β, γ, δ ist eine ebenso einfache. In dem letzten Falle endlich, dafs auch sämtliche Gröfsen B durch p teilbar sind, ergiebt sich:

$$a_0 = p,\ b_0 = 0,\ b_1 = p,\ c_0 = 0,\ c_2 = 1,\ d_0 = 0,\ d_1 = 0,\ d_2 = 0,\ d_3 = 1.$$

Die Bestimmung der Gröfsen α, β, γ, δ folgt unmittelbar hieraus. Damit ist der Satz bewiesen. Nennen wir zwei Transformationsdeterminanten einander **äquivalent**, wenn die eine aus der andern durch Multiplikation mit einer Determinante entstanden ist, die zu einer linearen Transformation d. h. zu einer Transformation ersten Grades gehört, so folgt der weitere

Lehrsatz.

Eine jede Determinante $(A_0\ B_1\ C_2\ D_3)$, die zu einer Transformation n^{ten} Grades gehört, ist mit einer andern Determinante $(a_0\ b_1\ c_2\ d_3)$ äquivalent, bei welcher die Elemente rechts von der Diagonale Null sind, die Diagonalelemente positiv, ferner ein jedes der übrig bleibenden Elemente absolut kleiner als das entspechende Diagonalelement, so zwar, dafs b_0, c_0, d_0, c_1 positiv oder Null sind.

Endlich leisten die Elemente den beiden Gleichungssystemen Genüge:

$$\begin{array}{llll} c_0 . d_3 + c_1 . d_2 - c_2 d_1 & = 0, & a_0 . d_1 + b_0 . c_1 - c_0 . b_1 & = 0, \\ b_0 . d_3 + b_1 . d_2 & = 0, & a_0 . d_2 + b_0 . c_2 & = 0, \\ a_0 . d_3 = b_1 . c_2 & = n, & a_0 . d_3 = b_1 . c_2 & = n. \end{array}$$

Zwei Determinanten der angegebenen Formen können nie einander äquivalent sein, ohne identisch zu sein.

Zunächst folgt aus dem vorigen Satze unmittelbar, daſs eine jede Determinante $(A_0\ B_1\ C_2\ D_3)$ einer Determinante $(a_0\ b_1\ c_2\ d_3)$ äquivalent ist, bei welcher die Elemente rechts von der Diagonale Null sind und ebenso einfach können wir beweisen, daſs die Elemente in der Diagonalreihe positiv angenommen werden können. Daſs die Zahl b_0 positiv oder Null und kleiner als b_1 angenommen werden kann, folgt aus der Gleichung:

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & 0 & 0 \\ c_0 & c_1 & c_2 & 0 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 \\ b_0 - r b_1 & b_1 & 0 & 0 \\ \gamma_0 & c_1 & c_2 & 0 \\ \delta_0 & d_1 & \delta_2 & d_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ r & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -r & 1 \end{vmatrix}.$$

Analog ist der Beweis für die Zahlen c_0, d_0, c_1 zu geben. Aus den Gleichungen, denen die Elemente einer jeden Transformationsdeterminante Genüge leisten, folgt dann, daſs die beiden Zahlen d_1 und d_2 von selbst dem absoluten Betrage nach kleiner als d_3 sind. In der That, die eine dieser Gleichungen lautet:

$$b_0 . d_3 + b_1 . d_2 = 0$$

oder also:

$$\frac{b_0}{b_1} = -\frac{d_2}{d_3}.$$

Hieraus folgt, daſs d_2 negativ oder Null, jedenfalls dem absoluten Betrage nach kleiner als d_3 sein muſs.

Ferner besteht die Gleichung:

$$c_0 . d_3 + c_1 . d_2 - c_2 . d_1 = 0,$$

$c_1 . d_2$ ist negativ. Ist $c_0 . d_3 + c_1 . d_2$ positiv, so können wir es gleich $\varepsilon . c_0 . d_3$ setzen, wobei $\varepsilon < 1$ ist, also:

$$\frac{d_1}{d_3} = \frac{\varepsilon c_0}{c_2}.$$

Damit ist der Fall erledigt. Ebenso einfach gestaltet sich die Be-

trachtung in dem zweiten Falle, so dafs der verlangte Beweis geliefert ist.

Wir wollen den aufgestellten Satz noch auf eine zweite Art beweisen, mit deren Hülfe sich unmittelbar die Zusammensetzung der allgemeinen linearen Transformationen aus vier speciellen nachweisen läfst.

In der That, versteht man unter $\varkappa$ eine positive ganze Zahl und setzt:

$$\begin{aligned}
a_0^{(\varkappa-1)} &= a_0^{(\varkappa)}.l_\varkappa + a_0^{(\varkappa+1)}, & a_0^{(\varkappa+1)} &= a_3^{(\varkappa)}, & a_0^{(0)} &= a_0, & a_3^{(0)} &= a_3,\\
b_0^{(\varkappa-1)} &= b_0^{(\varkappa)}.l_\varkappa + b_0^{(\varkappa+1)}, & b_0^{(\varkappa+1)} &= b_3^{(\varkappa)}, & b_0^{(0)} &= b_0, & b_3^{(0)} &= b_3,\\
c_0^{(\varkappa-1)} &= c_0^{(\varkappa)}.l_\varkappa + c_0^{(\varkappa+1)}, & c_0^{(\varkappa+1)} &= c_3^{(\varkappa)}, & c_0^{(0)} &= c_0, & c_3^{(0)} &= c_3,\\
d_0^{(\varkappa-1)} &= d_0^{(\varkappa)}.l_\varkappa + d_0^{(\varkappa+1)}, & d_0^{(\varkappa+1)} &= d_3^{(\varkappa)}, & d_0^{(0)} &= d_0, & d_3^{(0)} &= d_3,
\end{aligned}$$

so wird, wenn überdies $\varkappa$ als gerade Zahl vorausgesetzt wird, eine jede Transformationsdeterminante gleich:

$$(5)\quad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0^{(\varkappa)} & a_1 & a_2 & a_0^{(\varkappa+1)} \\ b_0^{(\varkappa)} & b_1 & b_2 & b_0^{(\varkappa+1)} \\ c_0^{(\varkappa)} & c_1 & c_2 & c_0^{(\varkappa+1)} \\ d_0^{(\varkappa)} & d_1 & d_2 & d_0^{(\varkappa+1)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} l_\varkappa & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} l_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Wir wählen jetzt die Gröfsen l so, dafs für ein gerades r:

$$a_0^{(r+1)} = 0$$

wird. Die Bestimmung ist stets möglich. In der That, wählen wir die Gröfsen l zunächst so, dafs die Gröfsen $a_0^{(\varkappa)}$ mit wachsendem $\varkappa$ fallen, so bricht die Entwickelung im Endlichen ab und zwar möge

$$a_0^{(r+1)} = 0$$

sein. Ist dann r eine gerade Zahl, so ist die Richtigkeit der Behauptung nachgewiesen. Im entgegengesetzten Falle setzen wir an Stelle der beiden letzten Gleichungen:

$$\begin{aligned}
a_0^{(r-2)} &= a_0^{(r-1)}.l_{r-1} + a_0^{(r)},\\
a_0^{(r-1)} &= a_0^{(r)}.l_r
\end{aligned}$$

die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}
a_0^{(r-2)} &= a_0^{(r-1)}(l_{r-1} - 1) + a_0^{(r-1)} + a_0^{(r)},\\
a_0^{(r-1)} &= a_0^{(r-1)} + a_0^{(r)} - a_0^{(r)},\\
a_0^{(r-1)} + a_0^{(r)} &= -a_0^{(r)}(-l_r - 1).
\end{aligned}$$

Damit ist auch in diesem Falle der verlangte Beweis geliefert. Mithin folgt für ein gerades r die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0^{(r)} & a_1 & a_2 & 0 \\ b_0^{(r)} & b_1 & b_2 & b_3^{(r)} \\ c_0^{(r)} & c_1 & c_2 & c_3^{(r)} \\ d_0^{(r)} & d_1 & d_2 & d_3^{(r)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} l_r & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} l_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Da aber die Gleichung besteht:

$$(6)\quad \begin{vmatrix} l & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} l_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l_1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

so folgt, dafs wird:

$$(7)\quad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0^{(r)} & a_1 & a_2 & 0 \\ b_0^{(r)} & b_1 & b_2 & b_3^{(r)} \\ c_0^{(r)} & c_1 & c_2 & c_3^{(r)} \\ d_0^{(r)} & d_1 & d_2 & d_3^{(r)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & l_r \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l_1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ferner ergiebt sich unmittelbar:

$$(8)\quad \begin{vmatrix} a_0^{(r)} & a_1 & a_2 & 0 \\ b_0^{(r)} & b_1 & b_2 & b_3^{(r)} \\ c_0^{(r)} & c_1 & c_2 & c_3^{(r)} \\ d_0^{(r)} & d_1 & d_2 & d_3^{(r)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_0^{(r)} & 0 & a_2 \\ b_1 & b_0^{(r)} & b_3^{(r)} & b_2 \\ c_1 & c_0^{(r)} & c_3^{(r)} & c_2 \\ d_1 & d_0^{(r)} & d_3^{(r)} & d_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Mit der linken Determinante auf der linken Seite können wir wie mit der ursprünglichen operieren. Dann folgt:

$$(9)\quad \begin{vmatrix} a_1 & a_0^{(r)} & 0 & a_2 \\ b_1 & b_0^{(r)} & b_3^{(r)} & b_2 \\ c_1 & c_0^{(r)} & c_3^{(r)} & c_2 \\ d_1 & d_0^{(r)} & d_3^{(r)} & d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^{(s)} & a_0^{(r)} & 0 & 0 \\ b_1^{(s)} & b_0^{(r)} & b_3^{(r)} & b_2^{(s)} \\ c_1^{(s)} & c_0^{(r)} & c_3^{(r)} & c_2^{(s)} \\ d_1^{(s)} & d_0^{(r)} & d_3^{(r)} & d_2^{(s)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & l'_s \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l'_1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Betrachtungen analoger Art, wie die vorhin angestellten, zeigen, dafs durch Anwendung einer geraden Anzahl von Determinanten der Form:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & m \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -m & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

die links stehende Determinante auf der linken Seite reduciert werden kann auf eine solche, bei welcher nur das zweite Element der ersten Horizontalreihe von Null verschieden ist.

Dabei findet die Relation statt:

$$(10)\quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & m \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -m & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & m' \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -m' & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ m & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -m & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -m' & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & m' \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -m \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -m' & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & m' \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Setzen wir ferner ganz allgemein:

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \delta_0 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_0^{(1)} & \alpha_1^{(1)} & \alpha_2^{(1)} & \alpha_3^{(1)} \\ \beta_0^{(1)} & \beta_1^{(1)} & \beta_2^{(1)} & \beta_3^{(1)} \\ \gamma_0^{(1)} & \gamma_1^{(1)} & \gamma_2^{(1)} & \gamma_3^{(1)} \\ \delta_0^{(1)} & \delta_1^{(1)} & \delta_2^{(1)} & \delta_3^{(1)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -m \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & m & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

so folgen die Beziehungen:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \alpha_3^{(1)}, & \alpha_1 &= m\alpha_3^{(1)} + \alpha_2^{(1)}, & \alpha_2 &= \alpha_1^{(1)}, & \alpha_3 &= -m\alpha_1^{(1)} + \alpha_0^{(1)}, \\
\beta_0 &= \beta_3^{(1)}, & \beta_1 &= m\beta_3^{(1)} + \beta_2^{(1)}, & \beta_2 &= \beta_1^{(1)}, & \beta_3 &= -m\beta_1^{(1)} + \beta_0^{(1)}, \\
\gamma_0 &= \gamma_3^{(1)}, & \gamma_1 &= m\gamma_3^{(1)} + \gamma_2^{(1)}, & \gamma_2 &= \gamma_1^{(1)}, & \gamma_3 &= -m\gamma_1^{(1)} + \gamma_0^{(1)}, \\
\delta_0 &= \delta_3^{(1)}, & \delta_1 &= m\delta_3^{(1)} + \delta_2^{(1)}, & \delta_2 &= \delta_1^{(1)}, & \delta_3 &= -m\delta_1^{(1)} + \delta_0^{(1)}.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt dann unmittelbar, daſs durch Anwendung der Transformationsdeterminanten:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -m \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

eine jede Transformationsdeterminante reduziert werden kann auf eine Determinante von der Form:

$$\begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & 0 & 0 \\ c_0 & c_1 & c_2 & 0 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix},$$

wobei dann die Relationen bestehen:

$$(11)\qquad a_0.d_3 = b_1.c_2 = n,\; a_0.d_2 + b_0.c_2 = 0,\; a_0 d_1 + b_0 c_1 - c_0 b_1 = 0.$$

Hiermit aber ist die gewünschte Reduction wieder vollendet.

Für den Fall einer linearen Transformation kann das Problem noch weiter geführt werden. In diesem Falle müssen die Diagonalglieder der positiven oder negativen Einheit gleich sein.

Nun ist ferner:

$$(12)\quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

und ähnlich läfst sich die Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ m & 0 & 1 & 0 \\ 0 & m & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

auf die vorhin aufgestellten Determinanten reduzieren.

Hieraus folgt mit Hülfe weniger Schlüsse, dafs alle Transformationsdeterminanten, die zu einer linearen Transformation gehören, aus den Determinanten zusammengesetzt werden können:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mp 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

In der Wahl dieser einfachsten Determinanten, aus denen sich die übrigen zusammensetzen lassen, bleibt eine gewisse Willkür. So kann z. B. die zweite Determinante ersetzt werden durch:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

da die Relation besteht:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mp 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{*)} .$$

§ 23.**)

Die Bestimmung der Klassenanzahl und Einführung der repräsentierenden Transformationen.

Es möge von jetzt an die Bezeichnung gebraucht werden, daſs alle Transformationen n^{ten} Grades in eine Klasse gehören, deren Determinanten einander äquivalent sind.

Dann folgt, daſs die Anzahl dieser Klassen eine endliche Zahl ist und daſs wir als Repräsentanten einer jeden derselben eine Determinante der im letzten Satze definierten Art setzen können. Ist n eine Primzahl, so werden diese Determinanten die Form haben:

$$\overset{\text{I.}}{\begin{vmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}} \quad \overset{\text{II.}}{\begin{vmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}} \quad \overset{\text{III.}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ i & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i_1 & 0 & -i & n \end{vmatrix}} \quad \overset{\text{IV.}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ i_1 & i_2 & n & 0 \\ i & i_1 & 0 & n \end{vmatrix}} .$$

Für dieselben nehmen die Gröſsen v' und τ' resp. folgende Werte an:

I.

$$v_1' = nv_1,\ v_2' = nv_2,\ \tau_{11}' = n\tau_{11},\ \tau_{12}' = n\tau_{12},\ \tau_{22}' = n\tau_{22}.$$

II.

$$v_1' = nv_1,\ v_2' = v_2,\ \tau_{11}' = n\tau_{11},\ \tau_{12}' = \tau_{12},\ \tau_{22}' = \frac{-i+\tau_{22}}{n}.$$

III.

$$v_1' = v_1 + iv_2,\ v_2' = nv_2,\ \tau_{11}' = \frac{-i_1 + \tau_{11} + 2i\tau_{12} + i^2\tau_{22}}{n},$$

$$\tau_{12}' = \tau_{12} + i\tau_{22},\ \tau_{22}' = n\tau_{22}.$$

IV.

$$v_1' = v_1,\ v_2' = v_2,\ \tau_{11}' = \frac{-i+\tau_{11}}{n},\ \tau_{12}' = \frac{-i_1+\tau_{12}}{n},\ \tau_{22}' = \frac{-i_2+\tau_{22}}{n}.$$

---

*) Cf. Henoch: De Abelianarum Functionum Periodis. Berolini 1867.

**) Cf. Krause: Acta math. 3. Dorn: Math. Annalen 7.

Ganz allgemein gilt nun der Satz:
Ist der Transformationsgrad n in seine Primfaktoren zerlegt von der Form:

$$n = a_1^{\alpha_1} \cdot a_2^{\alpha_2} \cdots a_k^{\alpha_k}$$

und sieht man von denjenigen Klassen ab, bei welchen alle Zahlen a, b, c, d durch eine und dieselbe Zahl teilbar sind, so ist die Zahl der einander nicht äquivalenten Repräsentanten gleich:

$$\prod_{1}^{k} {}^{r} \frac{a_r^{2\alpha_r - 3}(1 + a_r^2)\left(a_r^{\alpha_r + 2} + a_r^{\alpha_r - 1} - a_r - 1\right)}{a_r - 1}.$$

Der Beweis dieses Satzes kann durch folgende Bemerkung von vornherein sehr vereinfacht werden. Seien k und l zwei zu einander relativ prime Zahlen, k_1 und l_1 die Anzahl der Repräsentanten, die zu ihnen gehören, so gehören zu der Transformation $k.l^{\text{ten}}$ Grades genau $k_1 . l_1$ Repräsentanten. In der That, dazu braucht nur nachgewiesen zu werden, dafs, wenn die Gleichung besteht:

$$(1)\quad \begin{vmatrix} u_{01} & 0 & 0 & 0 \\ v_{01} & v_{11} & 0 & 0 \\ w_{01} & w_{11} & w_{21} & 0 \\ x_{01} & x_{11} & x_{21} & x_{31} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_{02} & 0 & 0 & 0 \\ v_{02} & v_{12} & 0 & 0 \\ w_{02} & w_{12} & w_{22} & 0 \\ x_{02} & x_{12} & x_{22} & x_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_{03} & 0 & 0 & 0 \\ v_{03} & v_{13} & 0 & 0 \\ w_{03} & w_{13} & w_{23} & 0 \\ x_{03} & x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_{04} & 0 & 0 & 0 \\ v_{04} & v_{14} & 0 & 0 \\ w_{04} & w_{14} & w_{24} & 0 \\ x_{04} & x_{14} & x_{24} & x_{34} \end{vmatrix}$$

und es ist:

$$(2)\qquad u_{01} . x_{31} = u_{03} . x_{33} = k, \quad u_{02} . x_{32} = u_{04} . x_{34} = l,$$

die Buchstaben mit zweitem ungeraden resp. geraden Index rechts den entsprechenden Buchstaben mit zweitem ungeraden resp. geraden Index links gleich sein müssen.

In der That, zunächst müssen die Diagonalglieder einander gleich sein. Die Gleichung

$$u_{01} \cdot u_{02} = u_{03} \cdot u_{04}$$

z. B. ist nicht anders möglich, als wenn:

$$u_{01} = u_{03}, \quad u_{02} = u_{04}$$

ist.

In Betreff der übrigen Glieder folgt das nämliche. Greifen wir die Gleichung heraus:

$$v_{01} \cdot u_{02} + v_{11} \cdot v_{02} = v_{03} \cdot u_{04} + v_{13} \cdot v_{04},$$

so folgt aus ihr:

$$v_{11}(v_{02} - v_{04}) = u_{02}(v_{03} - v_{01}).$$

v_{03} und v_{01} sind positiv und kleiner als v_{11}, daher mufs:

$$v_{03} = v_{01}, \quad v_{02} = v_{04}$$

sein etc.

Unter solchen Umständen können wir uns auf einen Transformationsgrad von der Form a^α beschränken, wo a eine Primzahl ist.

Die Frage nach der Anzahl der Repräsentanten ist dann damit identisch, die Zahl der Auflösungen der Gleichungen:

$$\begin{aligned} & a_0 . d_3 = b_1 . c_2 = a^\alpha \\ (3) \qquad & a_0 . d_2 + b_0 . c_2 = 0 \\ & a_0 . d_1 + b_0 . c_1 - c_0 . b_1 = 0 \end{aligned}$$

zu bestimmen, wenn überdies die früher angegebenen Bedingungen bestehen.

Wir wollen nun setzen:

$$(4) \qquad a_0 = a^{t_0}, \quad b_1 = a^{t_1}, \quad c_2 = a^{t_2}, \quad d_3 = a^{t_3},$$

und die Annahme hinzufügen, dafs:

$$t_0 \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq t_3$$

sei. Dann mufs sein:

$$t_0 + t_3 = t_1 + t_2.$$

Ein solches System denken wir uns herausgegriffen und fixiert. Dann folgt die Gleichung:

$$d_2 = - b_0 . a^{t_2 - t_0} = - b_0 . a^{t_3 - t_1}.$$

Die Gleichung lehrt, dafs b_0 a^{t_1} willkürliche Werte annehmen kann, die Werte $0, 1, \dots a^{t_1} - 1$, sie lehrt ferner, dafs einer jeden Gröfse b_0 eine und nur eine Gröfse d_2 entspricht.

Einen der soeben definierten Werte von b_0 denken wir uns fixiert. Für denselben mufs die Gleichung bestehen:

$$a^{t_0} . d_1 + b_0 . c_1 - c_0 . a^{t_1} = 0.$$

Mögen a^{t_0} und b_0 den gröfsten gemeinsamen Teiler φ besitzen, so lehrt diese Gleichung, dafs c_1 ein Multiplum von $\frac{a^{t_0}}{\varphi}$ sein mufs, dafs dasselbe im Ganzen also $\varphi . a^{t_2 - t_0}$ Werte annehmen kann. Zu einem jeden dieser Werte gehören a^{t_1} Werte von c_0, zu einem jeden Werte von c_0 ein Wert von d_1, d_0 kann endlich a^{t_3} Werte für ein vorgelegtes b_0 annehmen.

Hieraus folgt, dafs bei einem festen b_0:

$$\varphi . a^{t_2 - t_0} . a^{t_1} . a^{t_3}$$

Wertsysteme möglich sind. Hält man somit die Gröfsen t fest, so

existieren im Ganzen, wie leicht folgt:

$$a^{t_1-t_0} \,.\, a^{t_2-t_0} \,.\, a^{t_2} \,.\, a^{t_3} \sum_{1}^{\alpha^{t_0}-1}{}_{\varrho}\, \varphi(\varrho)$$

dazu gehörige Repräsentanten, wenn unter $\varphi(\varrho)$ der gröfste gemeinsame Teiler von a^{t_0} und ϱ verstanden wird.

Die Summation ist leicht durchzuführen. Es ergiebt sich die Zahl der Repräsentanten gleich:

$$a^{t_2+2t_3}\left(1+\frac{t_0(a-1)}{a}\right).$$

Hierbei ist die Voraussetzung gemacht worden, dafs:

$$t_0 \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq t_3$$

sei. Lassen wir diese fallen und bezeichnen ganz allgemein die kleinste unter den vier Zahlen t_0, t_1, t_2, t_3 durch t, so ist die Zahl der zu ihnen gehörenden Repräsentanten gleich:

$$a^{t_2+2t_3}\left(1+\frac{t(a-1)}{a}\right).$$

Dieser Ausdruck ist für alle möglichen Werte der Gröfsen t zu bilden. Die Summe der Ausdrücke ist gleich der Zahl der Repräsentanten.

Wir wollen nun zunächst annehmen, dafs die Transformationszahl die Form $a^{2\alpha'}$ hat und dann zunächst die Summe aller derjenigen Ausdrücke bilden, für welche t einen und denselben Wert hat. Diese Summe kann geschrieben werden:

$$\left(1+\frac{t(a-1)}{a}\right)\Sigma a^{t_2+2t_3}.$$

Sie ist auszudehnen über alle diejenigen Werte von t_2 und t_3, für welche der gröfste gemeinsame Teiler von:

$$a^{t_2},\; a^{t_3},\; a^{2\alpha'-t_2},\; a^{2\alpha'-t_3}$$

die Gröfse a^t ist.

Ist nun t von α' verschieden, so ergeben sich folgende Wertsysteme:

$$\left.\begin{array}{lll} 1)\; t_3 = t, & t_2 = t+\lambda \\ 2)\; t_3 = 2\alpha'-t, & t_2 = t+\lambda \end{array}\right\}\; \lambda = 0, 1, \ldots 2(\alpha'-t).$$

$$\left.\begin{array}{lll} 3)\; t_3 = t+\mu, & t_2 = t \\ 4)\; t_3 = t+\mu, & t_2 = 2\alpha'-t \end{array}\right\}\; \mu = 1, 2, \ldots 2(\alpha'-t)-1.$$

Ist $\alpha' = \mathfrak{t}$, so giebt es nur einen möglichen Fall:

$$\mathfrak{t}_2 = \alpha', \qquad \mathfrak{t}_3 = \alpha'.$$

Hieraus folgt, wenn $\mathfrak{t}$ von α' verschieden ist:

$$\sum a^{\mathfrak{t}_2+2\mathfrak{t}_3} = (a^{3\mathfrak{t}} + a^{4\alpha'-\mathfrak{t}}) \sum_{0}^{2(\alpha'-\mathfrak{t})} {}^{\lambda} a^{\lambda} + (a^{3\mathfrak{t}} + a^{2\alpha'-\mathfrak{t}}) \sum_{1}^{2(\alpha'-\mathfrak{t})-1} {}^{\mu} a^{2\mu},$$

oder also:

$$\sum a^{\mathfrak{t}_2+2\mathfrak{t}_3} = \frac{a^{3\mathfrak{t}}}{a^2-1} [(a^{6(\alpha'-\mathfrak{t})}-1)(1+a+a^2) - a^{4(\alpha'-\mathfrak{t})+1} + a^{2(\alpha'-\mathfrak{t})+1}].$$

Wenn $\alpha' = \mathfrak{t}$ ist, so folgt:

$$\sum a^{\mathfrak{t}_2+2\mathfrak{t}_3} = a^{3\alpha'}.$$

Diese Ausdrücke sind mit $\left(1 + \frac{\mathfrak{t}(a-1)}{a}\right)$ resp. $\left(1 + \frac{\alpha'(a-1)}{a}\right)$ zu multiplizieren. $\mathfrak{t}$ kann der Reihe nach die Werte annehmen: $0, 1, \ldots \alpha' - 1$. Bildet man die dazu gehörenden Ausdrücke, so ist ihre Summe der Anzahl der Repräsentanten gleich. Dieselbe ist leicht auszuführen, da in ihr nur Teilsummen von der Form enthalten sind:

$$\sum_{0}^{\alpha'-1} {}^{\mathfrak{t}} a^{\varrho \mathfrak{t}} = \frac{a^{\varrho\alpha'}-1}{a^{\varrho}-1},$$

$$\sum_{0}^{\alpha'-1} {}^{\mathfrak{t}} \mathfrak{t}.a^{\varrho \mathfrak{t}} = \frac{(\alpha'-1)a^{\varrho\alpha'}}{a^{\varrho}-1} - \frac{a^{\varrho\alpha'}-a^{\varrho}}{(a^{\varrho}-1)^2}.$$

Nach einigen Reduktionen ergiebt sich die gesuchte Zahl von Repräsentanten gleich:

$$a^{3\alpha'} + \frac{1}{a-1}\left[\frac{a^{3\alpha'}-1}{a^3-1}[a^{3\alpha'+2}(a^2+1)-1] - \frac{a^{\alpha'}-1}{a-1} a^{3\alpha'+1}\right].$$

Wir wollen nun alle diejenigen Repräsentanten ausschliefsen, bei denen alle Transformationszahlen einen und denselben Teiler gemeinsam haben. Dieselben können dadurch entstanden gedacht werden, dafs alle Transformationszahlen in den repräsentirenden Determinanten, die zur Transformation $a^{2(\alpha'-1)}$ten Grades gehören, mit dem Faktor a multipliziert werden.

Daraus folgt die gesuchte Zahl gleich:

$$a^{3\alpha'} - a^{3\alpha'-3} + \frac{1}{a-1}\left[\frac{(a^{3\alpha'}-1)}{a^3-1}(a^{3\alpha'+4} + a^{3\alpha'+2} - 1) - \frac{(a^{3\alpha'-3}-1)}{a^3-1}(a^{3\alpha'+1} + a^{3\alpha'-1} - 1)\right]$$
$$- \frac{1}{(a-1)^2}[(a^{\alpha'} - 1)(a^{3\alpha'} + 1) - (a^{\alpha'-1} - 1)(a^{3\alpha'-3} + 1)].$$

Nach einigen Reduktionen ergiebt sich dieser Ausdruck gleich:

$$\frac{a^{4\alpha'-3}(1 + a^2)(a^{2\alpha'-1} + a^{2\alpha'+2} - a - 1)}{a-1}. \tag{5}$$

Ganz analog ist die Untersuchung in dem Falle durchzuführen, dafs der Transformationsgrad die Form hat:

$$a^{2\varepsilon+1}.$$

Dann wird die Zahl aller von einander verschiedener Repräsentanten, d. h. die Klassenanzahl, gleich:

$$a^{3\varepsilon}(1+a+a^2+a^3) + \frac{1}{a-1}\left[\frac{a^{3\varepsilon}-1}{a^3-1}(a^{3\varepsilon+7} + a^{3\varepsilon+5} - 1 - \frac{a^{\varepsilon}-1}{a-1}a^{3\varepsilon+3}\right].$$

Die Zahl der von einander verschiedenen Repräsentanten dagegen, deren zugehörende Transformationszahlen keinen gemeinsamen Teiler besitzen, wird gleich:

$$\frac{a^{4\varepsilon-1}(1 + a^2)(a^{2\varepsilon+3} + a^{2\varepsilon} - a - 1)}{a-1}.$$

Setzen wir daher im ersten Falle $2\alpha' = \alpha$, im zweiten Falle $2\varepsilon + 1 = \alpha$, so folgt, dafs zu der Transformation vom Grade a^{α}:

$$\frac{a^{2\alpha-3}(1 + a^2)(a^{\alpha+2} + a^{\alpha-1} - a - 1)}{a-1} \tag{6}$$

Klassen gehören, bei denen die Transformationszahlen keinen gemeinsamen Teiler besitzen.

§ 24.

Die lineare Transformation der Thetafunktionen. Allgemeine Betrachtungen.

Setzen wir in den sechzehn ursprünglichen Thetafunktionen an Stelle der Argumente und der Moduln die transformierten Argumente und Moduln, so lassen sich die auf diese Weise entstehenden Funktionen nicht unmittelbar durch die ursprünglichen ausdrücken. Es geschieht dieses aber, wenn wir die transformierten Gröfsen mit

einer Exponentialfunktion multiplizieren. Wir sind dabei berechtigt, uns auf die lineare Transformation und die repräsentierenden Transformationen im allgemeinen Falle zu beschränken. Wir untersuchen zunächst die lineare Transformation und setzen:

$$\Pi_\lambda(v_1, v_2) = e^{i\pi\omega}\cdot\vartheta_\lambda(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}'), \tag{1}$$

wobei ist:

$$\begin{aligned}\omega = &(a_0.v_1 + b_0.v_2)(a_3.v_1 + b_3.v_2) + (a_1.v_1 + b_1.v_2)(a_2.v_1 + b_2.v_2) \\ &+ (a_3.v_1 + b_3.v_2)^2\,\tau_{11}' + 2(a_3.v_1 + b_3.v_2)(a_2.v_1 + b_2.v_2)\,\tau_{12}' \\ &+ (a_2.v_1 + b_2.v_2)^2\,\tau_{22}',\end{aligned} \tag{2}$$

oder auch unter Wiederaufnahme der Bezeichnungen des Paragraphen (21):

$$\begin{aligned}\omega = &v_1^2(A_0.a_3 + A_1.a_2) + v_1.v_2(B_0.a_3 + B_1.a_2 + A_0.b_3 + A_1.b_2) \\ &+ v_2^2(B_0.b_3 + B_1.b_2).\end{aligned} \tag{3}$$

Wir fassen zunächst den Fall $\lambda = 5$ ins Auge.

Vermehrt man dann v_1 um 1, während v_2 ungeändert bleibt, so wird v_1' um A_0, v_2' um A_1 vermehrt; vermehrt man v_2 um 1, während v_1 ungeändert bleibt, so wird v_1' um B_0, v_2' um B_1 vermehrt; vermehrt man drittens v_1 um τ_{11}, v_2 um τ_{12}, so wird v_1' um D_0, v_2' um D_1 vermehrt, und endlich entspricht der Vermehrung von v_1 und v_2 um τ_{12} resp. τ_{22} die Vermehrung von v_1' und v_2' um resp. C_0 und C_1.

Hieraus ergeben sich unmittelbar die Beziehungen:

$$\begin{aligned}\Pi_5(v_1 + 1, v_2) &= (-1)^{a_0.a_3 + a_1.a_2}.\Pi_5(v_1, v_2), \\ \Pi_5(v_1, v_2 + 1) &= (-1)^{b_0.b_3 + b_1.b_2}.\Pi_5(v_1, v_2), \\ \Pi_5(v_1 + \tau_{11}, v_2 + \tau_{12}) &= (-1)^{d_0.d_3 + d_1.d_2}.\Pi_5(v_1, v_2).e^{-i\pi(2v_1 + \tau_{11})}, \\ \Pi_5(v_1 + \tau_{12}, v_2 + \tau_{22}) &= (-1)^{c_0.c_3 + c_1.c_2}.\Pi_5(v_1, v_2).e^{-i\pi(2v_2 + \tau_{22})}.\end{aligned} \tag{4}$$

Diese Gleichungen lehren, daſs die Funktion $\Pi_5(v_1, v_2)$ eine Thetafunktion erster Ordnung ist, so daſs die Gleichung besteht:

$$\Pi_5(v_1, v_2) = c.\vartheta\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix}(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}), \tag{5}$$

wobei c eine von den Gröſsen v_1 und v_2 unabhängige Constante bedeutet und ferner die Gleichungen stattfinden:

$$\begin{aligned} g_1 &= a_0.a_3 + a_1.a_2, \quad g_2 = b_0.b_3 + b_1.b_2, \\ h_2 &= c_0.c_3 + c_1.c_2, \quad h_1 = d_0.d_3 + d_1.d_2.\end{aligned} \tag{6}$$

In analoger Weise könnten die übrigen Thetafunktionen untersucht

werden, indessen empfiehlt es sich, die allgemeine Formel aus der soeben gefundenen durch Substitution halber Perioden abzuleiten.

Aus den früheren Betrachtungen folgen die Beziehungen:

$$v_1 = (d_3 - a_3.\tau_{11} - b_3.\tau_{12})v_1' + (d_2 - a_2.\tau_{11} - b_2.\tau_{12})v_2',$$
$$v_2 = (c_3 - a_3.\tau_{12} - b_3.\tau_{22})v_1' + (c_2 - a_2.\tau_{12} - b_2.\tau_{22})v_2'.$$

Vermehren wir daher v_1' und v_2' um resp.:

$$\frac{g_1.\tau_{11}' + g_2.\tau_{12}' + h_1}{2}, \quad \frac{g_1.\tau_{12}' + g_2.\tau_{22}' + h_2}{2},$$

so werden die Gröfsen v_1 und v_2 vermehrt um resp.:

$$\frac{g_1'.\tau_{11} + g_2'.\tau_{12} + h_1'}{2} \quad \text{und} \quad \frac{g_1'.\tau_{12} + g_2'.\tau_{22} + h_2'}{2},$$

wobei die Beziehungen stattfinden:

$$(7) \qquad \begin{aligned} g_1' &= \quad g_1.a_0 + g_2.a_1 - h_2.a_2 - h_1.a_3, \\ g_2' &= \quad g_1.b_0 + g_2.b_1 - h_2.b_2 - h_1.b_3, \\ h_2' &= - g_1.c_0 - g_2.c_1 + h_2.c_2 + h_1.c_3, \\ h_1' &= - g_1.d_0 - g_2.d_1 + h_2.d_2 + h_1.d_3. \end{aligned}$$

Bei dieser Vermehrung erhalten wir nach einigen Reduktionen die Formel: *)

$$(8) \qquad \Pi\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix}(v_1, v_2)$$
$$= c.e^{\frac{i\pi}{2}((g_1.h_1 + g_2.h_2) - (\mathfrak{g}_1.\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{g}_2.\mathfrak{h}_2)) - \frac{i\pi}{4}.\omega'} . \vartheta\begin{bmatrix} \mathfrak{g}_1 & \mathfrak{g}_2 \\ \mathfrak{h}_1 & \mathfrak{h}_2 \end{bmatrix}(v_1, v_2),$$

wobei folgende Beziehungen stattfinden:

$$a = a_0.a_3 + a_1.a_2, \quad b = b_0.b_3 + b_1.b_2,$$
$$\begin{aligned} \omega' = {} & g_1^2(a_0.d_0 + b_0.c_0) + g_2^2(a_1.d_1 + b_1.c_1) + h_2^2(a_2.d_2 + b_2.c_2) \\ & + h_1^2(a_3.d_3 + b_3.c_3) + 2g_1g_2(c_0.b_1 + d_0.a_1) \\ & + 2g_1h_2(c_0.b_2 + d_0.a_2) + 2g_1h_1(c_0.b_3 + d_0.a_3) + 2g_2h_2(c_1.b_2 + d_1.a_2) \\ & + 2g_2h_1(c_1.b_3 + d_1.a_3) + 2h_1h_2(c_2.b_3 + d_2.a_3) \\ & + 2g_1(c_0.b + d_0.a) + 2g_2(c_1.b + d_1.a) + 2h_2(c_2.b + d_2.a) \\ & + 2h_1(c_3.b + d_3.a), \end{aligned}$$

---

*) Cf. u. a. Krause: Math. Annalen 17.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_1 &= g_1 . a_0 + g_2 . a_1 + h_2 . a_2 + h_1 . a_3 + a_0 . a_3 + a_1 . a_2 ,\\
\mathfrak{g}_2 &= g_1 . b_0 + g_2 . b_1 + h_2 . b_2 + h_1 . b_3 + b_0 . b_3 + b_1 . b_2 ,\\
\mathfrak{h}_2 &= g_1 . c_0 + g_2 . c_1 + h_2 . c_2 + h_1 . c_3 + c_0 . c_3 + c_1 . c_2 ,\\
\mathfrak{h}_1 &= g_1 . d_0 + g_2 . d_1 + h_2 . d_2 + h_1 . d_3 + d_0 . d_3 + d_1 . d_2 .
\end{aligned}$$

Die Gröfse c ist eine von v_1 und v_2 unabhängige Konstante, welche für alle Thetafunktionen denselben Wert besitzt. Die Bezeichnungsweise auf der linken Seite ist analog der Bezeichnungsweise bei den Thetafunktionen gebildet.

Die Zahlen $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$ können einen jeden ganzzahligen Wert annehmen; setzt man

$$\mathfrak{g}_1 \equiv \mathfrak{g}_1', \ \mathfrak{g}_2 \equiv \mathfrak{g}_2', \ \mathfrak{h}_1 \equiv \mathfrak{h}_1', \ \mathfrak{h}_2 \equiv \mathfrak{h}_2' \bmod 2$$

und nimmt etwa an, dafs die Zahlen $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{h}'$ die Werte 0 und 1 annehmen sollen, so wird der Faktor von

$$c . e^{-\frac{i\pi}{4}\omega'} . \vartheta \begin{bmatrix} \mathfrak{g}_1', & \mathfrak{g}_2' \\ \mathfrak{h}_1', & \mathfrak{h}_2' \end{bmatrix} (v_1, v_2)$$

auf der rechten Seite den Wert annehmen:

$$e^{\frac{i\pi}{2}[\mathfrak{h}_1(\mathfrak{g}_1' - \mathfrak{g}_1) + \mathfrak{h}_2(\mathfrak{g}_2' - \mathfrak{g}_2)] + \frac{i\pi}{2}[(g_1 . h_1 + g_2 . h_2) - (\mathfrak{g}_1' . \mathfrak{h}_1' + \mathfrak{g}_2' . \mathfrak{h}_2')]}$$

oder auch:

$$e^{\frac{i\pi}{2}[\mathfrak{h}_1' . \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{h}_2' . \mathfrak{g}_2 - g_1 . h_1 - g_2 . h_2]} .$$

Die Bestimmung des allen Thetafunktionen gemeinsamen Faktors c ist eine umständliche und von Herrn Weber*) durchgeführt worden. Wir beschränken uns darauf, in einfacher Weise das Quadrat desselben zu bilden.

Sei nun für eine beliebige lineare Transformation:

$$(9) \qquad \begin{aligned}
\frac{\vartheta_3(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')}{\vartheta_0(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')} &= \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\vartheta_{\alpha_3}(v_1, v_2)}{\vartheta_{\alpha_0}(v_1, v_2)}\\
\frac{\vartheta_{02}(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')}{\vartheta_0(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')} &= \frac{\varepsilon_{02}}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\vartheta_{\alpha_{02}}(v_1, v_2)}{\vartheta_{\alpha_0}(v_1, v_2)} .
\end{aligned}$$

Differenzieren wir beide Seiten nach v_1 und v_2, setzen nach der Differentiation $v_1 = v_2 = 0$ und bilden links und rechts die Funktionaldeterminante, so ergiebt sich:

---

*) Crelle 74.

$$(10) \qquad A = \frac{\varepsilon_3 \cdot \varepsilon_{02}}{\varepsilon_0^2} \cdot \frac{D . \Theta_0^2}{\pi^2 . \Theta_{12} . \Theta_{34} \Theta_{01} . \Theta_4} \, .$$

Dabei bedeutet D die Funktionaldeterminante der Thetaquotienten auf der rechten Seite für die Nullwerte der Argumente, Θ_α die transformierten Thetafunktionen für die Nullwerte der Argumente und endlich ist gesetzt:

$$(11) \qquad \begin{aligned} A = &(a_0 + a_3 . \tau_{11}' + a_2 . \tau_{12}')(b_1 + b_3 . \tau_{21}' + b_2 . \tau_{22}') \\ &- (a_1 + a_3 . \tau_{21}' + a_2 . \tau_{22}')(b_0 + b_3 . \tau_{11}' + b_2 . \tau_{12}'). \end{aligned}$$

Wir wollen nun annehmen, dafs dem Index α der transformierten Funktion Θ_α die Gröfsen $g_1^{(\alpha)}$, $g_2^{(\alpha)}$, $h_1^{(\alpha)}$, $h_2^{(\alpha)}$ entsprechen, dann folgen unmittelbar die Beziehungen:

$$(12) \qquad \begin{aligned} &g_1^{(3)} + g_1^{(02)} - g_1^{(01)} - g_1^{(4)} - g_1^{(34)} - g_1^{(12)} = 0, \\ &g_2^{(3)} + g_2^{(02)} - g_2^{(01)} - g_2^{(4)} - g_2^{(34)} - g_2^{(12)} = 0, \\ &h_1^{(3)} + h_1^{(02)} - h_1^{(01)} - h_1^{(4)} - h_1^{(34)} - h_1^{(12)} = 0, \\ &h_2^{(3)} + h_2^{(02)} - h_2^{(01)} - h_2^{(4)} - h_2^{(34)} - h_2^{(12)} = 0. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir ferner die Charakteristiken der ursprünglichen Thetafunktionen, in welche die transformierten übergehen, durch

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{g}_1^{(\alpha)} & \mathfrak{g}_2^{(\alpha)} \\ \mathfrak{h}_1^{(\alpha)} & \mathfrak{h}_2^{(\alpha)} \end{bmatrix},$$

so gelten für diese vier analoge Gleichungen.

Dann aber lehrt die vorhin entwickelte Formel für die lineare Transformation der Thetafunktionen unmittelbar, dafs für eine beliebige lineare Transformation, die den Index 5 in den Index β überführt, die Gleichung besteht:

$$(13) \qquad \Theta_5^2 = \frac{e}{A}^{-\frac{i\pi}{2}(c_0 . b_3 + d_0 . a_3 + c_1 . b_2 + d_1 . a_2 - 2) + \frac{i\pi}{2} . f} \cdot \vartheta_\beta^2,$$

wenn gesetzt ist:

$$(14) \qquad \begin{aligned} f = &a_0(\mathfrak{h}_1^{(02)} - \mathfrak{h}_1^{(01)}) + a_1(\mathfrak{h}_1^{(3)} - \mathfrak{h}_1^{(4)}) + a_2(\mathfrak{h}_1^{(3)} - \mathfrak{h}_1^{(34)}) \\ &+ a_3(\mathfrak{h}_1^{(02)} - \mathfrak{h}_1^{(12)}) + b_0(\mathfrak{h}_2^{(02)} - \mathfrak{h}_2^{(01)}) + b_1(\mathfrak{h}_2^{(3)} - \mathfrak{h}_2^{(4)}) \\ &+ b_2(\mathfrak{h}_2^{(3)} - \mathfrak{h}_2^{(34)}) + b_3(\mathfrak{h}_2^{(02)} - \mathfrak{h}_2^{(12)}). \end{aligned}$$

Besonders einfach gestaltet sich die Formel, wenn die Transformationszahlen, die in der Diagonalreihe stehen, ungerade, alle anderen dagegen gerade sind.

Es ergiebt sich:

$$(15) \qquad \Theta_5^2 = \frac{(-1)^{\frac{a_0-1}{2}+\frac{b_1-1}{2}}}{A} \cdot \vartheta_5^2.$$

Hiermit ist die Bestimmung des Quadrates des konstanten Faktors völlig erledigt.

§ 25.*)

Die lineare Transformation. Spezielle Diskussion.

Es mögen nun die erhaltenen Resultate genauer diskutiert werden und zwar beschränken wir uns hierbei auf die Diskussion von Thetaquotienten d. h. sehen von dem Faktor ab, welcher bei allen Thetafunktionen gemeinsam auftritt.

Wir denken uns dazu die 16 Thetafunktionen in vier Horizontalreihen geordnet und zwar in folgender Weise:

$$\begin{array}{rrrr} 5, & 01, & 4, & 23, \\ 34, & 2, & 3, & 24, \\ 12, & 02, & 03, & 13, \\ 0, & 1, & 04, & 14. \end{array}$$

Diese Anordnung, die wir als die ursprüngliche bezeichnen wollen besitzt die Eigentümlichkeit, daſs die Horizontal- wie die Vertikalreihen aus der entsprechenden ersten durch Substitution halber Perioden entstanden sind.

Aus dieser Anordnung werden neue entstehen, wenn wir uns beliebige lineare Transformationen angewendet denken.

Zunächst mögen nur diejenigen untersucht werden, bei welchen die Indices der Thetafunktionen ungeändert bleiben, so daſs ein Unterschied nur in dem Hinzutreten achter Einheitswurzeln stattfinden kann. Alle diese Transformationen besitzen die charakterisierende Eigentümlichkeit, daſs die Diagonalglieder ungerade, alle anderen dagegen gerade sind. Sie setzen sich ähnlich wie die allgemeine lineare Transformation aus einer Reihe von einfachen Transformationen derselben Art zusammen.

Wir nehmen zunächst die Transformationen:

---

*) Aus der Litteratur über die lineare Transformation greifen wir heraus: Rohn: Math. Annalen 15. Wiltheiss: Bestimmung Abelscher Funktionen etc. Halle 1881. Krause: Math. Annalen 17, pag. 448.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2k & 2l \\ 0 & 1 & 2m & 2k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2k & 2m & 1 & 0 \\ 2l & 2k & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Die zu ihnen gehörenden Gröfsen ω' lauten resp.

$$2m.h_2^2 + 2l.h_1^2 + 4k.h_1.h_2 + 4m.h_2 + 4l.h_1$$

und

$$2l.g_1^2 + 2m.g_2^2 + 4k.g_1.g_2.$$

Die nähere Diskussion ergiebt den

Lehrsatz.

Aus der ursprünglichen Anordnung ergeben sich durch Multiplikation zweier beliebigen Horizontal- oder Vertikalreihen mit i neue richtige Anordnungen.

Nehmen wir ferner die Transformationen:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2l & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2l & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

so ergiebt ihre Diskussion den:

Lehrsatz.

Aus der ursprünglichen Anordnung ergeben sich durch Multiplikation derselben zwei beliebigen Glieder zweier Horizontal- oder Vertikalreihen mit -1 neue richtige Anordnungen.

Wie eine leichte Betrachtung zeigt, sind weitere Fälle nicht möglich. Alle andern linearen Transformationen müssen mindestens einen Index der sechzehn Thetafunktionen ändern. Offenbar genügt es hierbei die Transformationen nach dem Modul 2 zu betrachten. Wir greifen zunächst diejenigen heraus, für welche die Glieder der ersten Horizontalreihe, von achten Einheitswurzeln abgesehen, in sich selbst übergehen. Für dieselben müssen nach dem Modul 2 die Konguenzen bestehen:

$$(1) \qquad \begin{gathered} 0 \equiv a_0.a_3 + a_1.a_2, \quad 0 \equiv b_0.b_3 + b_1.b_2, \\ 0 \equiv c_0.c_3 + c_1.c_2, \quad 0 \equiv d_0.d_3 + d_1.d_2, \\ a_0 \equiv 1,\ b_0 \equiv c_0 \equiv d_0 \equiv 0,\ a_1 \equiv 0,\ b_1 \equiv 1,\ c_1 \equiv d_1 \equiv 0. \end{gathered}$$

Man überzeugt sich leicht, dafs nur zwei Transformationen der genannten Art bestehen, die vorhin betrachtete und die Transformation:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Die Anwendung derselben ergiebt den

Lehrsatz.

Aus der urspünglichen Anordnung ergiebt sich eine neue, wenn in den drei letzten Horizontalreihen die geraden und die ungeraden Thetafunktionen einzeln unter sich vertauscht werden, nachdem eine beliebige der drei Horizontalreihen mit i multipliziert ist.

Alle weiteren Transformationen müssen eine Veränderung der Glieder in der ersten Horizontalreihe hervorbringen. Unter diesen greifen wir alle diejenigen heraus, welche eine der drei anderen Horizontalreihen ungeändert lassen, z. B. die zweite.

Für diese Transformationen müssen die Thetafunktionen:

$$\vartheta_{34}, \quad \vartheta_{2}, \quad \vartheta_{3}, \quad \vartheta_{24},$$

von achten Einheitswurzeln abgesehen, in sich selbst übergehen. Eine einfache Diskussion zeigt, dafs vier solcher Transformationen existieren, deren Determinanten sind:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \varepsilon_1 & -\varepsilon_1 \\ 0 & 1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

ε_1 und ε_2 können den Wert 0 und 1 annehmen. Die nähere Diskussion dieser Transformationen, sowie der analogen, die die beiden übrigen Horizontalreihen ungeändert lassen, ergiebt unter Anwendung der bisher gefundenen Resultate den

Lehrsatz.

Bedeuten e_1, e_2, e_3 die Zahlen 2, 3, 4 in beliebiger Reihenfolge, so ergeben sich neue Anordnungen, indem man nach Multiplikation mit der achten Einheitswurzel $j = e^{\frac{\pi i}{4}}$ die e_1^{te} und e_2^{te} Horizontalreihe ungeändert läfst, dagegen in

der 1ten und e_3^{ten} Horizontalreihe die 1ten und e_3^{ten}, e_1^{ten} und e_2^{ten} Glieder untereinander vertauscht.

Hiermit sind die Transformationen erschöpft, welche von der Reihenfolge abgesehen, die Horizontalreihen, die Glieder derselben ungeändert lassen. Aufser ihnen giebt es nun auch Transformationen, die die Horizontalreihen in einander überführen. Die Diskussion derselben liefert den

Lehrsatz.

Aus der urspünglichen Anordnung ergeben sich neue richtige, wenn die 4te Vertikal- und Horizontalreihe mit der 2ten oder 3ten vertauscht wird und die entsprechenden Glieder in der letzten Horizontalreihe mit negativem Zeichen versehen werden.

Damit sind die Transformationen erschöpft, die die Horizontalreihen in einander überführen. Bei diesen Operationen bleiben die Glieder der ersten Horizontalreihe sicherlich, von der Reihenfolge abgesehen, ungeändert, da sie aus lauter geraden Thetafunktionen bestehen — es werden ferner alle 24 möglichen Anordnungen erhalten und zwar eine jede zweimal. Hieraus folgt, dafs die Zahl der erhaltenen Transformationen gleich 48 ist.

Nun ist die Zahl der möglichen Transformationen nach dem Modul 2 höchstens 720. In der That, es ist niemals möglich, dafs die sechs ungeraden Thetafunktionen wieder in sich selbst übergehen, es sei denn für die Transformation, bei welcher die Diagonalglieder alle ungerade, die übrigen dagegen gerade sind. Hieraus folgt, dafs die Zahl der möglichen Transformationen höchstens gleich $6! = 720$ sein kann.

Würde es daher möglich sein, weitere vierzehn von einander wesentlich verschiedene Transformationen herzustellen, bei welchen die Horizontalreihen nicht mehr von der Reihenfolge abgesehen, ungeändert bleiben, so wäre die Mannigfaltigkeit der linearen Transformationen erschöpft. Solche vierzehn Transformationen sind aber leicht aufzustellen. Es ergeben sich dann die Anordnungen, die in § 8 gegeben worden sind.

Damit ist die Theorie abgeschlossen und es handelt sich nur noch darum, einige Sätze herauszugreifen, die für die Folge von Bedeutung sind. Von dem allen Thetafunktionen gemeinsamen Faktor sehen wir hierbei ab.

I. Es giebt lineare Transformationen, welche die vier Funktionen:

$$\vartheta_5((v)),\ \vartheta_{12}((v)),\ \vartheta_{34}((v)),\ \vartheta_0((v)),$$

überführen in:

$$\vartheta_5((v)),\ i^a\cdot\vartheta_{12}((v)),\ i^b\cdot\vartheta_{34}((v)),\ i^c\cdot\vartheta_0((v)),$$

vorausgesetzt, dafs $a+b+c$ eine gerade Zahl ist. Einem jeden Systeme a, b, c entsprechen zwei und nur zwei nach dem Modul 2 von einander verschiedene Transformationen.

II. Versteht man unter $\vartheta_\alpha((v))$, $\vartheta_\beta((v))$, $\vartheta_\gamma((v))$, $\vartheta_\delta((v))$ die obigen vier Funktionen in beliebiger Reihenfolge genommen, so giebt es immer zwei und nur zwei nach dem Modul 2 inkongruente Transformationen, welche

$$\vartheta_5((v)),\quad \vartheta_{12}((v)),\quad \vartheta_{34}((v)),\quad \vartheta_0((v))$$

überführen in:

$$\vartheta_\alpha((v)),\quad \vartheta_\beta((v)),\quad \vartheta_\gamma((v)),\quad \vartheta_\delta((v)).$$

III. Es giebt lineare Transformationen, welche die vier Funktionen:

$$\vartheta_5((v)),\quad \vartheta_{12}((v)),\ \vartheta_{34}((v)),\ \vartheta_0((v))$$

überführen in die Funktionen:

$$\vartheta_5((v)),\ \vartheta_4((v)),\quad \vartheta_{01}((v)),\quad \vartheta_{23}((v));\quad \vartheta_{34}((v)),\quad \vartheta_0((v)),\ j.\vartheta_4((v)),\ j.\vartheta_{03}((v));$$

$$\vartheta_5((v)),\ \vartheta_4((v)),\quad \vartheta_{12}((v)),\quad \vartheta_{03}((v));\quad \vartheta_{34}((v)),\quad \vartheta_2((v)),\ j.\vartheta_4((v)),\ j.\vartheta_{23}((v));$$

$$\vartheta_5((v)),\ \vartheta_{34}((v)),\quad \vartheta_{01}((v)),\quad \vartheta_2((v));\quad \vartheta_{12}((v)),\quad \vartheta_0((v)),\ j.\vartheta_{01}((v)),\ j.\vartheta_2((v));$$

$$\vartheta_5((v)),\ \vartheta_0((v)),\quad \vartheta_{23}((v)),\quad \vartheta_{14}((v));\quad \vartheta_0((v)),\quad \vartheta_{14}((v)),\ j.\vartheta_4((v)),\ j.\vartheta_{01}((v));$$

$$\vartheta_5((v)),\ \vartheta_{03}((v)),\quad \vartheta_2((v)),\ i.\vartheta_{14}((v));\quad \vartheta_{12}((v)),\quad \vartheta_{34}((v)),\ j.\vartheta_{23}((v)),\ j.\vartheta_{14}((v));$$

$$\vartheta_{12}((v)),\ \vartheta_{03}((v)),\ j.\vartheta_{01}((v)),\ j.\vartheta_{23}((v));\quad \vartheta_2((v)),\ i.\vartheta_{14}((v)),\ j.\vartheta_4((v)),\ j.\vartheta_{12}((v));$$

$$\vartheta_{03}((v)),\ i.\vartheta_{14}((v)),\ j.\vartheta_{01}((v)),\ j.\vartheta_{34}((v));$$

$$\vartheta_0((v)),\ i.\vartheta_{23}((v)),\ j.\vartheta_{03}((v)),\ j.\vartheta_2((v)).$$

Diese Sätze können in den folgenden zusammengefafst werden:

IV. Bedeuten

$$j^{\varepsilon_1}.\vartheta_{\alpha_1}((v)),\ j^{\varepsilon_2}.\vartheta_{\alpha_2}((v)),\ j^{\varepsilon_3}.\vartheta_{\alpha_3}((v)),\ j^{\varepsilon_4}.\vartheta_{\alpha_4}((v)),$$

und

$$j^{\eta_1}.\vartheta_{\beta_1}((v)),\ j^{\eta_2}.\vartheta_{\beta_2}((v)),\ j^{\eta_3}.\vartheta_{\beta_3}((v)),\ j^{\eta_4}.\vartheta_{\beta_4}((v))$$

zwei beliebige der soeben hingeschriebenen Funktionensysteme, wobei die Reihenfolge eine beliebige ist, so giebt es immer zwei und nur zwei nach dem Modul 2 inkongruente Transformationen, welche das erste System überführen in:

$$j^{\eta_1}.\vartheta_{\beta_1}((v)),\ i^a.j^{\eta_2}.\vartheta_{\beta_2}((v)),\ i^b.j^{\eta_3}.\vartheta_{\beta_3}((v)),\ i^c.j^{\eta_4}.\vartheta_{\beta_4}((v)),$$

wobei die Zahlen a, b, c die einzige Bedingung erfüllen, dafs ihre Summe eine gerade Zahl ist.

V. Unter den 48 linearen Transformationen, welche eins der vorhin hingeschriebenen Quadrupel von der Reihenfolge der Glieder abgesehen in sich selbst überführen, giebt es je acht, welche eine beliebige der zwölf übrigen Thetafunktionen $\vartheta_\varepsilon((v))$ in eine beliebige andere derselben Art (gerade oder ungerade) überführen.

Sind $\vartheta_{\alpha_1}((v))$, $\vartheta_{\alpha_2}((v))$ und $\vartheta_{\alpha_3}((v))$, $\vartheta_{\alpha_4}((v))$ aus dem vorgelegten Quadrupel die beiden Paare, welche mit $\vartheta_\varepsilon((v))$ und einer vierten Funktion $\vartheta_\zeta((v))$ ein Göpelsches Quadrupel bilden, so führen die Transformationen, die $\vartheta_\varepsilon((v))$ in $\vartheta_\varepsilon((v))$ überführen, das Quadrupel

$$\vartheta_{\alpha_1}((v)),\quad \vartheta_{\alpha_2}((v)),\quad \vartheta_{\alpha_3}((v)),\quad \vartheta_{\alpha_4}((v))$$

über in die Funktionensysteme:

$$\begin{array}{llll} \vartheta_{\alpha_2}((v)), & \vartheta_{\alpha_1}((v)), & \vartheta_{\alpha_3}((v)), & \vartheta_{\alpha_4}((v)), \\ \vartheta_{\alpha_1}((v)), & \vartheta_{\alpha_2}((v)), & \vartheta_{\alpha_4}((v)), & \vartheta_{\alpha_3}((v)), \\ \vartheta_{\alpha_3}((v)), & \vartheta_{\alpha_4}((v)), & \vartheta_{\alpha_1}((v)), & \vartheta_{\alpha_2}((v)), \end{array}$$

und in die hieraus entspringenden. Die achten Einheitswurzeln sind aus den früheren Sätzen leicht zu bestimmen.

In analoger Weise kann man mit den Quadrupeln verfahren, die aus zwei geraden und zwei ungeraden Funktionen bestehen. Wir begnügen uns damit, folgenden Satz anzugeben.

VI. Es sei ein Quadrupel von zwei geraden und zwei ungeraden Thetafunktionen vorgelegt, dann giebt es 16 von einander verschiedene lineare Transformationen, welche, von achten Einheitswurzeln und der Reihenfolge abgesehen, dieses Quadrupel in sich selbst überführen. Es werden unter Rücksichtnahme darauf, dafs gerade Thetafunktionen in gerade und ungerade in ungerade übergeführt werden, viermal die möglichen Kombinationen hervorgebracht. In Bezug auf die achten Einheitswurzeln gilt ein analoger Satz, wie bei den Quadrupeln, die aus lauter geraden Thetafunktionen bestehen.

§ 26.*)

Die lineare Transformation der hyperelliptischen Funktionen.

Indem wir die lineare Transformation der Thetafunktionen entwickelt haben, ist zu gleicher Zeit die lineare Transformation der

---

*) Cf. Krause: Crelle 98.

hyperelliptischen Funktionen im wesentlichen erledigt. Wir finden jedenfalls den

Lehrsatz.

Die transformierten hyperelliptischen Funktionen lassen sich, im Falle die Transformation linear ist, rational durch die urspünglichen ausdrücken.

Einer besonderen Erwähnung bedarf lediglich die Bestimmung der Grössen M_0, M_1, M_2, M_3. Wir haben gefunden:

$$(1)\quad \begin{aligned} K.M_0 &= (C_{11}.A_0 + C_{12}.A_1)K_{22} - (C_{11}.B_0 + C_{12}.B_1)K_{21}, \\ K.M_1 &= (C_{11}.B_0 + C_{12}.B_1)K_{11} - (C_{11}.A_0 + C_{12}.A_1)K_{12}, \\ K.M_2 &= (C_{21}.A_0 + C_{22}.A_1)K_{22} - (C_{21}.B_0 + C_{22}.B_1)K_{21}, \\ K.M_3 &= (C_{21}.B_0 + C_{22}.B_1)K_{11} - (C_{21}.A_0 + C_{22}.A_1)K_{12}. \end{aligned}$$

In diese Gleichungen setzen wir die Werte ein, die wir seiner Zeit für die Gröfsen, die auf der rechten Seite stehen, gefunden haben. Die transformierten Thetafunktionen für die Nullwerte der Argumente bezeichnen wir durch Θ_α. Nehmen wir nun an, dafs für die vorgelegte Transformation wird:

$$(2)\quad \begin{aligned} \Pi_{24}(v_1, v_2) &= \varepsilon_1 . \varepsilon . \vartheta_\alpha(v_1, v_2), \\ \Pi_3\,(v_1, v_2) &= \varepsilon_2 . \varepsilon . \vartheta_\beta(v_1, v_2), \end{aligned}$$

wo ε_1 und ε_2 achte Einheitswurzeln bedeuten und ε der allen Thetafunktionen gemeinsame Faktor ist, so folgen leicht die Formeln (3):

$$K.M_0 = \frac{\varepsilon_1 . \varepsilon . \Theta_{34} . \Theta_4 . \Theta_5}{\Theta_{03} . \Theta_{12} . \Theta_0 . \Theta_{14}} \cdot \frac{\vartheta_{34}^2 . \vartheta_4^2 . \vartheta_5^2}{\vartheta_{01} . \vartheta_{12} . \vartheta_{23} . \vartheta_2 . \vartheta_{03} . \vartheta_0 . \vartheta_{14}} \cdot \left(\vartheta_3'(v_1)_0 . \vartheta_\alpha'(v_2)_0 - \vartheta_3'(v_2)_0 . \vartheta_\alpha'(v_1)_0\right),$$

$$K.M_1 = \frac{\varepsilon_1 . \varepsilon . \Theta_{34} . \Theta_4 . \Theta_5}{\Theta_{03} . \Theta_{12} . \Theta_0 . \Theta_{14}} \cdot \frac{\vartheta_{34} . \vartheta_4 . \vartheta_5}{\vartheta_{03} . \vartheta_{12} . \vartheta_0 \vartheta_{14}} \cdot \left(\vartheta_{24}'(v_1)_0 . \vartheta_\alpha'(v_2)_0 - \vartheta_{24}'(v_2)_0 . \vartheta_\alpha'(v_1)_0\right),$$

$$K \cdot M_2 = \frac{\varepsilon_2 . \varepsilon . \Theta_{34}^2 . \Theta_4^2 . \Theta_5^2}{\Theta_{01} . \Theta_{12} . \Theta_{23} . \Theta_2 . \Theta_{03} . \Theta_0 . \Theta_{14}} \cdot \frac{\vartheta_{34}^2 . \vartheta_4^2 . \vartheta_5^2}{\vartheta_{01} . \vartheta_{12} . \vartheta_{23} . \vartheta_2 . \vartheta_{03} . \vartheta_0 . \vartheta_{14}} \cdot \left(\vartheta_\beta'(v_1)_0 . \vartheta_3'(v_2)_0 - \vartheta_\beta'(v_2)_0 . \vartheta_3'(v_1)_0\right),$$

$$K.M_3 = \frac{\varepsilon_2 . \varepsilon . \Theta_{34}^2 . \Theta_4^2 . \Theta_5^2}{\Theta_{01} . \Theta_{12} . \Theta_{23} . \Theta_2 . \Theta_{03} . \Theta_0 . \Theta_{14}} \cdot \frac{\vartheta_{34} . \vartheta_4 . \vartheta_5}{\vartheta_{03} . \vartheta_{12} . \vartheta_0 . \vartheta_{14}} \cdot \left(\vartheta_\beta'(v_1)_0 . \vartheta_{24}'(v_2)_0 - \vartheta_\beta'(v_2)_0 . \vartheta_{24}'(v_1)_0\right).$$

Von besonderer Wichtigkeit sind diejenigen Transformationen, für welche entweder:

$$\alpha = 24, \quad \beta = \ 3,$$

oder aber:

$$\alpha = \ 3, \quad \beta = 24$$

wird. Im ersteren Falle ergiebt sich:

$$(4) \quad \begin{gathered} M_0 = \frac{\varepsilon_1 . \varepsilon . \Theta_{34} . \Theta_4 . \Theta_5}{\Theta_{03} . \Theta_{12} . \Theta_0 . \Theta_{14}} \cdot \frac{\vartheta_{12} . \vartheta_0 . \vartheta_{03} . \vartheta_{14}}{\vartheta_{34} . \vartheta_4 . \vartheta_5}, \\ M_1 = M_2 = 0, \\ M_3 = \frac{\varepsilon_2 . \varepsilon . \Theta_{34}^2 . \Theta_4^2 . \Theta_5^2}{\Theta_{01} . \Theta_{12} . \Theta_{23} . \Theta_2 . \Theta_{03} . \Theta_0 . \Theta_{14}} \cdot \frac{\vartheta_{01} . \vartheta_{12} . \vartheta_{23} . \vartheta_2 . \vartheta_{03} . \vartheta_0 . \vartheta_{14}}{\vartheta_{34}^2 . \vartheta_4^2 . \vartheta_5^2}. \end{gathered}$$

Im zweiten Falle wird:

$$(5) \quad \begin{gathered} M_0 = M_3 = 0, \\ M_1 = \frac{-\varepsilon_1 . \varepsilon . \Theta_{34} . \Theta_4 . \Theta_5}{\Theta_{03} . \Theta_{12} . \Theta_0 . \Theta_{14}} \cdot \frac{\vartheta_{01} . \vartheta_{12} . \vartheta_{23} . \vartheta_2 . \vartheta_{03} . \vartheta_0 . \vartheta_{14}}{\vartheta_{34}^2 . \vartheta_4^2 . \vartheta_5^2}, \\ M_2 = \frac{-\varepsilon_2 . \varepsilon . \Theta_{34}^2 . \Theta_4^2 . \Theta_5^2}{\Theta_{01} . \Theta_{12} . \Theta_{23} . \Theta_2 . \Theta_{03} . \Theta_0 . \Theta_{14}} \cdot \frac{\vartheta_{12} . \vartheta_0 . \vartheta_{03} . \vartheta_{14}}{\vartheta_{34} . \vartheta_4 . \vartheta_5}. \end{gathered}$$

Solcher linearer Transformationen giebt es in jedem Falle nach dem Modul 2 je 24. Unter ihnen sind wiederum diejenigen von besonderer Bedeutung, die $\vartheta_5(\!(v)\!)$ in $\vartheta_5(\!(v)\!)$ überführen. Solcher giebt es in jedem Falle vier und zwar sind es im ersten die Transformationen:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Im zweiten Falle ergeben sich die Transformationen:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

§ 27.*)

Darstellung der Differentialquotienten der hyperelliptischen Funktionen und gewisser Verbindungen derselben für beliebige Werte der Argumente.

Es sollen nun die in den früheren Paragraphen entwickelten Methoden dazu angewandt werden, um eine Reihe wichtiger Probleme in der Theorie der hyperelliptischen Funktionen zu lösen.

Wir behandeln zunächst das Problem, die Differentialquotienten der hyperelliptischen Funktionen zu bestimmen Die Lösung desselben beruht im wesentlichen auf der Darstellung der Thetafunktionen n^{ter} Ordnung durch die gewöhnlichen Thetafunktionen. Die zu entwickelnden Sätze sollen im folgenden nicht in der allgemeinsten Form gegeben werden. Es gestaltet sich alles einfacher, wenn man von speziellen Thetafunktionen ausgeht. Die allgemeinen Sätze lassen sich aus den auf diese Weise gefundenen ohne alle Mühe ableiten.

Wir betrachten zunächst den Ausdruck:

$$(1) \qquad f_{2k,r}(v_1,\ v_2) = \vartheta_5(v_1,\ v_2)^{2k} \cdot \frac{\partial^{2k-1} \dfrac{\vartheta_0(v_1,\ v_2)}{\vartheta_5(v_1,\ v_2)}}{\partial v_1^{2k-r-1} \cdot \partial v_2^{r}}.$$

Derselbe hat jedenfalls die Form:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{m} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{n} c_{mn} \cdot e^{2\pi i(mv_1+nv_2)},$$

wobei die Gröfsen c_{mn} konstante Gröfsen bedeuten. Ferner aber leistet der Ausdruck den Gleichungen Genüge:

$$f_{2k,r}(v_1+1,\ v_2) = f_{2k,r}(v_1,\ v_2),\ f_{2k,r}(v_1,\ v_2+1) = f_{2k,r}(v_1,\ v_2),$$

$$(2) \qquad f_{2k,r}(v_1+\tau_{11},\ v_2+\tau_{12}) = -e^{-2k\pi i(2v_1+\tau_{11})} \cdot f_{2k,r}(v_1,\ v_2),$$

$$f_{2k,r}(v_1+\tau_{12},\ v_2+\tau_{22}) = -e^{-2k\pi i(2v_2+\tau_{22})} \cdot f_{2k,r}(v_1,\ v_2).$$

Drittens endlich ist der Ausdruck eine ungerade Funktion der Veränderlichen v_1 und v_2. Hieraus folgt, dafs wir es mit einer Thetafunktion $2k^{\text{ter}}$ Ordnung zu thun haben, deren Charakteristik gleich der von $\vartheta_0(v_1,\ v_2)$ ist und welche ungerade ist.

Verstehen wir unter $(a,\ b,\ c,\ d)$ eins der sechs Göpelschen Quadrupel:

---

*) Cf. Krause: Math. Annalen 25.

$$(1,01,02,2), \quad (1,01,04,4), \quad (1,01,3,03)$$
$$(3,03,4,04), \quad (3,03,02,2), \quad (04,4,02,2),$$

wobei die Reihenfolge innerhalb der einzelnen Quadrupel von Bedeutung ist, so erhalten wir die Darstellung:

$$(3) \quad \vartheta_5(v_1, v_2)^{2k} \cdot \frac{\partial^{2k-1} \frac{\vartheta_0(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)}}{\partial v_1^{2k-r-1} \cdot \partial v_2^r}$$
$$= \sum e_{\alpha\beta\gamma\delta} \cdot \vartheta_a(v_1, v_2)^\alpha \cdot \vartheta_b(v_1, v_2)^\beta \cdot \vartheta_c(v_1, v_2)^\gamma \cdot \vartheta_d(v_1, v_2)^\delta,$$

wobei die Beziehungen bestehen:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2k, \; \gamma + \delta \equiv 0 \bmod 2, \; \beta + \delta \equiv 1 \bmod 2, \; \delta < 4.$$

Die Gröfsen $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$ sind Konstanten.

Führen wir nun, wie es in den früheren Paragraphen geschehen ist, an Stelle der Thetafunktionen die hyperelliptischen Funktionen ein, so erhalten wir die Gleichung:

$$(4) \quad \frac{\partial^{2k-1} al_0(u_1, u_2)}{\partial u_1^{2k-r-1} \cdot \partial u_2^r}$$
$$= \sum e'_{\alpha\beta\gamma\delta} \cdot al_a(u_1, u_2)^\alpha \cdot al_b(u_1, u_2)^\beta \cdot al_c(u_1, u_2)^\gamma \cdot al_d(u_1, u_2)^\delta,$$
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2k, \; \gamma + \delta \equiv 0 \bmod 2, \; \beta + \delta \equiv 1 \bmod 2, \; \delta < 4.$$

Als speziellen Fall wählen wir $k = 1$. Für denselben ergeben sich die Formeln (5):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial al_0(u_1, u_2)}{\partial u_\epsilon} &= e_{01}^{(\epsilon)}.al_1((u)).al_{01}((u)) + e_{11}^{(\epsilon)}.al_{02}((u)).al_2((u)) \\
&= e_{02}^{(\epsilon)}.al_3((u)).al_{03}((u)) + e_{12}^{(\epsilon)}.al_{04}((u)).al_4((u)) \\
&= e_{03}^{(\epsilon)}.al_1((u)).al_{01}((u)) + e_{13}^{(\epsilon)}.al_{04}((u)).al_4((u)) \\
&= e_{04}^{(\epsilon)}.al_3((u)).al_{03}((u)) + e_{14}^{(\epsilon)}.al_{02}((u)).al_2((u)) \\
&= e_{05}^{(\epsilon)}.al_1((u)).al_{01}((u)) + e_{15}^{(\epsilon)}.al_3((u)).al_{03}((u)) \\
&= e_{06}^{(\epsilon)}.al_{04}((u)).al_4((u)) + e_{16}^{(\epsilon)}.al_{02}((u)).al_2((u)). \quad {\scriptstyle \epsilon = 1,\, 2.}
\end{aligned}$$

Die Bestimmung der Konstanten erfolgt am einfachsten dadurch, dafs wir aus einer dieser Gleichungen durch Substitution halber Perioden eine Reihe anderer ableiten und in diesen $u_1 = u_2 = 0$ setzen. Nehmen wir z. B. die fünfte Gleichung und setzen in ihr an Stelle von:

$\vartheta_5(v_1, v_2)$, $\vartheta_0(v_1, v_2)$, $\vartheta_1(v_1, v_2)$, $\vartheta_{01}(v_1, v_2)$, $\vartheta_3(v_1, v_2)$, $\vartheta_{03}(v_1, v_2)$,
$\vartheta_{01}(v_1, v_2)$, $i.\vartheta_1(v_1, v_2)$, $i.\vartheta_0(v_1, v_2)$, $\vartheta_5(v_1, v_2)$, $\vartheta_{24}(v_1, v_2)$, $i.\vartheta_{13}(v_1, v_2)$,
$\vartheta_{03}(v_1, v_2)$, $i.\vartheta_3(v_1, v_2)$, $-i.\vartheta_{24}(v_1, v_2)$, $\vartheta_{13}(v_1, v_2)$, $i.\vartheta_0(v_1, v_2)$, $\vartheta_5(v_1, v_2)$,

so ergiebt sich die Bestimmung der Konstanten $e_{05}^{(\epsilon)}$ und $e_{15}^{(\epsilon)}$. Wir erhalten auf diese Weise die Formeln (6):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\, al_0(u_1, u_2)}{\partial u_1} &= \mu^2(1+\varkappa^2)\, al_1(u_1, u_2)\,.\, al_{01}(u_1, u_2) \\
&= 2\mu^2 . al_{04}((u)) . al_4((u)) - \mu^2 . \varkappa_1^2 . al_3((u)) . al_{03}((u)) \\
&= \mu^2(1+\varkappa^2)\, al_1((u)) . al_{01}((u)) \\
&= \mu^2 . \lambda_\varkappa^2 . al_3((u)) . al_{03}((u)) \\
&\quad + \mu^2(1+\lambda^2) . al_{02}((u)) . al_2((u)) \\
&= \mu^2 . (1+\varkappa^2)\, al_1((u)) . al_{01}((u)) \\
&= \frac{2\mu^2 . \lambda_\varkappa^2}{\lambda_1^2} \cdot al_{04}((u)) . al_4((u)) \\
&\quad + \frac{\mu^2 . \varkappa_1^2(1+\lambda^2)}{\lambda_1^2}\, al_{02}((u)) . al_2((u)).
\end{aligned}$$

In ähnlicher Weise ist der erste Differentialquotient nach u_2 zu bilden. Die Koefficienten setzen sich auch rational aus $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 zusammen. Das analoge gilt für alle Thetafunktionen.

Mit Rücksicht auf die kommenden Betrachtungen ergiebt sich hieraus der Satz, dafs die Koefficienten, welche in der Darstellung des $2\varkappa - 1^{\text{ten}}$ Differentialquotienten auftreten, rationale Funktionen von $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 sind.

Die soeben entwickelten Formeln führen unmittelbar dazu, die Werte der zweiten Differentialquotienten für die Nullwerte der Argumente zu bilden.

Wir wollen dazu die Ausdrücke:

$$\frac{\partial^2 al_\alpha(u_1, u_2)}{\partial u_\epsilon^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 al_\alpha(u_1, u_2)}{\partial u_1 . \partial u_2}$$

für die Nullwerte der Argumente bezeichnen durch:

$$al_\alpha''(u_\epsilon)_0 \text{ und } al_\alpha''(u_1, u_2)_0.$$

Alsdann erhalten wir die Beziehungen (7):

$$\begin{aligned}
al_0''(u_1)_0 &= \mu^2, & al_0''(u_1, u_2)_0 &= \mu^2 . \varkappa^2, \\
& & al_0''(u_2)_0 &= \mu^2(\varkappa^4 + \varkappa_1^2 . \lambda_\varkappa^2), \\
al_4''(u_1)_0 &= -\mu_\lambda^2, & al_4''(u_1, u_2)_0 &= -\varkappa^2 . \mu_\lambda^2, \\
& & al_4''(u_2)_0 &= -\varkappa^2 . \mu_\lambda^2, \\
al_{01}''(u_1)_0 &= -(\mu_1^2 - \lambda_\varkappa^2), & al''_{01}(u_1, u_2)_0 &= -(\lambda^2 - \varkappa^2 . \mu^2), \\
& & al_{01}''(u_2)_0 &= -(\lambda^2 . \varkappa^2 + \mu^2 . \lambda^2 - \varkappa^2 . \mu^2 - \varkappa^2 . \lambda^2 . \mu^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
al_{03}''(u_1)_0 &= \varkappa^2, & al''_{03}(u_1, u_2)_0 &= \varkappa^2 . \mu^2,\\
& & al''_{03}(u_2)_0 &= \varkappa^2(-\lambda^2 + \mu^2 + \lambda^2 . \mu^2),\\
al_{21}''(u_1)_0 &= \varkappa^2 - \mu_\lambda^2, & al''_{12}(u_1, u_2)_0 &= \varkappa^2 . \mu^2,\\
& & al''_{12}(u_2)_0 &= \varkappa^2 . \lambda^2 . \mu^2,\\
al_{14}''(u_1)_0 &= \varkappa^2 - \mu_1^2, & al''_{14}(u_1, u_2)_0 &= \varkappa^2 . \mu^2,\\
& & al''_{14}(u_2)_0 &= \varkappa^2 . \mu^2,\\
al_{23}''(u_1)_0 &= -\varkappa_1^2, & al''_{23}(u_1, u_2)_0 &= -\varkappa^2 . \mu^2,\\
& & al''_{23}(u_2)_0 &= -\varkappa_1^2 . \lambda^2 . \mu^2,\\
al_{34}''(u_1)_0 &= \lambda_\varkappa^2, & al''_{34}(u_1, u_2)_0 &= \mu^2 . \lambda_\varkappa^2,\\
& & al''_{34}(u_2)_0 &= \lambda_\varkappa^2 . \mu^2,\\
al_2''(u_1)_0 &= -\mu_1^2, & al''_2(u_1, u_2)_0 &= -\varkappa^2 . \mu_1^2,\\
& & al''_2(u_2)_0 &= -\varkappa^2 . \lambda^2 . \mu_1^2.
\end{aligned}$$

Wir betrachten jetzt die Funktion:

$$(8) \qquad f_{2k,\,r}(v_1, v_2) . f_{2k,\,s}(v_1, v_2) = F_{k,\,r,\,s}(v_1, v_2),$$

so leistet diese den Bedingungsgleichungen Genüge:

$$(9) \qquad \begin{aligned}
F_{k,\,r,\,s}(v_1 + 1, v_2) &= F_{k,\,r,\,s}(v_1, v_2),\\
F_{k,\,r,\,s}(v_1, v_2 + 1) &= F_{k,\,r,\,s}(v_1, v_2),\\
F_{k,\,r,\,s}(v_1 + \tau_{11}, v_2 + \tau_{12}) &= e^{-4\pi i k(2v_1 + \tau_{11})} . F_{k,\,r,\,s}(v_1, v_2),\\
F_{k,\,r,\,s}(v_1 + \tau_{12}, v_2 + \tau_{22}) &= e^{-4\pi i k(2v_2 + \tau_{22})} . F_{k,\,r,\,s}(v_1, v_2).
\end{aligned}$$

Überdies ist die Funktion eine gerade Funktion von v_1 und v_2.

Hieraus folgt unmittelbar, dafs, wenn (a, b, c, d) ein beliebiges Göpelsches Quadrupel ist, dann die Gleichung stattfindet:

$$(10) \qquad \begin{aligned}
F_{k,\,r,\,s} &= \Sigma e_{\alpha\beta\gamma\delta} . \vartheta_a(v_1, v_2)^\alpha . \vartheta_b(v_1, v_2)^\beta . \vartheta_c(v_1, v_2)^\gamma . \vartheta_d(v_1, v_2^\delta),\\
&\alpha + \beta + \gamma + \delta = 4k, \quad \beta + \delta \equiv \gamma + \delta \equiv 0 \bmod 2, \ \delta < 4.
\end{aligned}$$

Die Zahl der willkürlichen Konstanten beträgt $8k^2 + 2$. Offenbar können in dieser Gleichung an Stelle der Thetafunktionen wiederum die hyperelliptischen Funktionen eingeführt werden, so dafs wir einen Ausdruck für das Produkt zweier $2k - 1^{\text{ten}}$ Differentialquotienten von $al_0(u_1, u_2)$ erhalten.

Als Beispiel wählen wir wiederum den Fall $k = 1$, und zwar nehmen wir das Quadrupel (5, 0, 12, 34).

$$(11)\quad \vartheta_5(v_1, v_2)^4 \cdot \left(\frac{\partial \dfrac{\vartheta_0(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)}}{\partial v_1} \right)^2 = e_0 \cdot \vartheta_5((v))^4 + e_1 \cdot \vartheta_0((v))^4$$
$$+ e_2 \cdot \vartheta_{12}((v))^4 + e_3 \cdot \vartheta_0((v))^2 \cdot \vartheta_5((v))^2$$
$$+ e_4 \cdot \vartheta_{34}((v))^2 \cdot \vartheta_5((v))^2$$
$$+ e_5 \cdot \vartheta_{12}((v))^2 \cdot \vartheta_5((v))^2$$
$$+ e_6 \cdot \vartheta_0((v))^2 \cdot \vartheta_{34}((v))^2$$
$$+ e_7 \cdot \vartheta_0((v))^2 \cdot \vartheta_{12}((v))^2$$
$$+ e_8 \cdot \vartheta_{34}((v))^2 \cdot \vartheta_{12}((v))^2$$
$$+ e_9 \cdot \vartheta_0((v)) \cdot \vartheta_{12}((v)) \cdot \vartheta_{34}((v)) \cdot \vartheta_5((v)).$$

Die Bestimmung der Konstanten erfolgt am einfachsten durch Substitution halber Perioden. Man erhält auf diese Weise 16 Gleichungen. Setzt man in denselben $u_1 = u_2 = 0$, so ergeben sich die Bestimmungsgleichungen für unsere Konstanten in folgender Form (12):

$$-\frac{\vartheta_{12}^2 \cdot \vartheta_{01}^2}{\vartheta_5^2} = e_0 \cdot \vartheta_2^2 + e_4 \cdot \vartheta_{01}^2,$$
$$-\frac{\vartheta_2^2 \cdot \vartheta_0^2}{\vartheta_{34}^2} = e_0 \cdot \vartheta_{01}^2 + e_4 \cdot \vartheta_2^2,$$
$$0 = e_1 \cdot \vartheta_{03}^2 + e_6 \cdot \vartheta_4^2,$$
$$-\frac{\vartheta_{14}^2 \cdot \vartheta_{01}^2 \cdot \vartheta_2^2 \cdot \vartheta_{23}^2}{\vartheta_{34}^2 \cdot \vartheta_4^2 \cdot \vartheta_5^2} = e_1 \cdot \vartheta_4^2 + e_6 \cdot \vartheta_{03}^2,$$
$$0 = e_2 \cdot \vartheta_{14}^2 + e_8 \cdot \vartheta_{23}^2,$$
$$0 = e_2 \cdot \vartheta_{23}^2 + e_8 \cdot \vartheta_{14}^2,$$
$$0 = e_0 \cdot \vartheta_{23}^4 + e_1 \cdot \vartheta_{14}^4 + e_3 \cdot \vartheta_{23}^2 \cdot \vartheta_{14}^2,$$
$$0 = e_0 \cdot \vartheta_{14}^4 + e_1 \cdot \vartheta_{23}^4 + e_3 \cdot \vartheta_{23}^2 \cdot \vartheta_{14}^2,$$
$$0 = e_0 \cdot \vartheta_{23}^2 + e_2 \cdot \vartheta_4^4 + e_5 \cdot \vartheta_{03}^2 \cdot \vartheta_4^2,$$
$$-\frac{\vartheta_{14}^2 \cdot \vartheta_{01}^2 \cdot \vartheta_2^2 \cdot \vartheta_{23}^2}{\vartheta_{34}^2 \cdot \vartheta_5^2} = e_0 \cdot \vartheta_4^4 + e_2 \cdot \vartheta_{03}^4 + e_5 \cdot \vartheta_{03}^2 \cdot \vartheta_4^2,$$
$$-\frac{\vartheta_2^2 \cdot \vartheta_{12}^2 \cdot \vartheta_{01}^2}{\vartheta_5^2} = e_1 \cdot \vartheta_2^4 + e_2 \cdot \vartheta_{01}^4 + e_7 \cdot \vartheta_2^2 \cdot \vartheta_{01}^2,$$
$$-\frac{\vartheta_2^2 \cdot \vartheta_0^2 \cdot \vartheta_{01}^2}{\vartheta_{34}^2} = e_1 \cdot \vartheta_{01}^4 + e_2 \cdot \vartheta_2^4 + e_7 \cdot \vartheta_2^2 \cdot \vartheta_{01}^2.$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die Werte:

$$e_0 = e_1 = \frac{\mu^2 . \vartheta_{14}^2 . \vartheta_{23}^2}{\vartheta_2^4 - \vartheta_{01}^4}, \; e_2 = e_8 = 0, \; e_3 = \frac{-\mu^2(\vartheta_{23}^4 + \vartheta_{14}^4)}{\vartheta_2^4 - \vartheta_{01}^4}, \tag{13}$$
$$e_4 = e_7 = \frac{\vartheta_{34}^2 . \vartheta_{12}^2 . \vartheta_{01}^4 - \vartheta_5^2 . \vartheta_0^2 . \vartheta_2^4}{\vartheta_{34}^2 . \vartheta_5^2(\vartheta_2^4 - \vartheta_{01}^4)}, \; e_5 = e_6 = \frac{-\mu^2 . \lambda_\varkappa^2 . \vartheta_{34}^2 . \vartheta_5^2}{\vartheta_2^4 - \vartheta_{01}^4},$$
$$e_9 = 2\mu_1 \cdot \frac{\vartheta_{03}^2}{\vartheta_4^2}.$$

Führen wir in unserer Formel an Stelle der Thetafunktionen die hyperelliptischen Funktionen ein, so ändern sich die Konstanten. Bezeichnen wir die neuen Koeffizienten durch $e_0' \dots e_9'$, so wird (14):

$$N . e_0' = \lambda^2 . \mu_\varkappa^2, \; N . e_1' = \varkappa^2 . \mu_1^2 . \mu_\lambda^2,$$
$$N . e_3' = -\mu^4 + \mu^2 . \varkappa^2 + \lambda^2 . \mu^2 - 2\varkappa^2 . \lambda^2 + \varkappa^2 . \lambda^2 . \mu^2,$$
$$N . e_4' = \varkappa_1^2(\varkappa^2 + \lambda^2 - \mu^2), \; N . e_5' = -\varkappa_1^2 . \lambda^2 . \mu_\varkappa^2,$$
$$N . e_6' = -\varkappa^2 . \varkappa_1^2 . \mu_\lambda^2, \; N . e_7' = -\varkappa_1^2 . \mu_1^2(\varkappa^2 + \lambda^2 - \mu^2),$$
$$e_9' = 2\varkappa_1^2, \; e_2' = e_8' = 0, \; N = -\varkappa^2 - \lambda^2 + \mu^2 + \varkappa^2 . \lambda^2.$$

Setzen wir ferner:

$$\begin{aligned}(15) \quad \frac{\partial al_0(u_1, u_2)}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial al_0(u_1, u_2)}{\partial u_2} = {} & e_0' + e_1' . al_0((u))^4 + e_2' . al_{12}((u))^4 \\ & + e_3' . al_0((u))^2 + e_4' . al_{34}((u))^2 \\ & + e_5' . al_{12}((u))^2 + e_6' . al_0((u))^2 . al_{34}((u))^2 \\ & + e_7' . al_0((u))^2 . al_{12}((u))^2 \\ & + e^{8\prime} . al_{34}((u))^2 . al_{12}((u))^2 \\ & + e_9' . al_0((u)) . al_{34}((u)) . al_{12}((u)),\end{aligned}$$

so folgt (16):

$$N . e_0' = \lambda^2 . \mu_\varkappa^2, \; N . e_1' = \varkappa^2 \cdot \mu_1^2 . \mu_\lambda^2,$$
$$N . e_3' = -\mu^4 + \mu^2 . \varkappa^2 + \lambda^2 . \mu^2 - 2\varkappa^2 . \lambda^2 + \varkappa^2 . \lambda^2 . \mu^2,$$
$$N . e_4' = \varkappa^2 . \varkappa_1^2 . \lambda^2, \; N . e_5' = -\varkappa_1^2 . \lambda^2 . \mu_\varkappa^2, \; N . e_6' = -\varkappa^2 . \varkappa_1^2 . \mu_\lambda^2,$$
$$N . e_7' = \varkappa^2 . \varkappa_1^2 . \lambda^2 . \mu_1^2, \; e_2' = e_8' = 0, \; e_9' = \varkappa_1^2 . \mu^2.$$

Genau so folgt:

$$\begin{aligned}(17) \quad \left(\frac{\partial al_0(u_1, u_2)}{\partial u_2}\right)^2 = {} & e_0' + e_1' . al_0((u))^4 + e_2' . al_{12}((u))^4 \\ & + e_3' . al_0((u))^2 + e_4' . al_{34}((u))^2 + e_5' . al_{12}((u))^2 \\ & + e_6' . al_0((u))^2 . al_{34}((u))^2 + e_7' . al_0((u))^2 . al_{12}((u))^2 \\ & + e_8' . al_{34}((u))^2 . al_{12}((u))^2 \\ & + e_9' . al_0((u)) . al_{34}((u)) . al_{12}((u)),\end{aligned}$$

$N.e_0' = \lambda^2.\mu_\varkappa^2(\varkappa^2 + \lambda^2 - \varkappa^2.\lambda^2)$, $N.e_1' = \varkappa^2.\mu_1^2.\mu_\lambda^2(\varkappa^2 + \lambda^2 - \varkappa^2.\lambda^2)$,
$N.e_3' = -(\varkappa^2 + \lambda^2 - \varkappa^2.\lambda^2)(\mu^4 - \mu^2.\varkappa^2 - \lambda^2.\mu^2 + 2\varkappa^2.\lambda^2 - \varkappa^2.\lambda^2.\mu^2)$,
$N.e_4' = \varkappa^2.\varkappa_1^2.\lambda^2.\mu^2$, $N.e_5' = -\varkappa_1^2.\lambda^2.\mu^2.\mu_\varkappa^2$, $N.e_6' = -\varkappa^2.\varkappa_1^2.\mu^2.\mu_\lambda^2$,
$N.e_7' = \varkappa^2.\varkappa_1^2.\lambda^2.\mu^2.\mu_1^2$, $e_2' = e_8' = e_9' = 0$.

In ähnlicher Weise würde sich ergeben, dafs auch im allgemeinsten Falle die Koefficienten rationale Funktionen von $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 sind.

Für die Folge ist es ferner nöthig, Produkte von der Form zu betrachten:

$$\frac{\partial^{2k-1} al_{12}(u_1, u_2)}{\partial u_1^{2k-r-1}.\partial u_2^r} \cdot \frac{\partial^{2k-1} al_{34}(u_1, u_2)}{\partial u_1^{2k-s-1}.\partial u_2^s}.$$

Wir finden diesen Ausdruck gleich:

$$\Sigma e'_{\alpha\beta\gamma\delta}.al_0(u_1, u_2)^\alpha.al_5(u_1, u_2)^\beta.al_c(u_1, u_2)^\gamma.al_d(u_1, u_2)^\delta,$$
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 4k,\ \gamma + \delta \equiv 0 \bmod 2;\ \beta + \delta \equiv 1 \bmod 2.\ \delta < 4,$$

$(0, 5, c, d)$ bildet ein Göpelsches Quadrupel.

Als speziellen Fall wählen wir wiederum $k = 1$.

Für denselben ergiebt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial al_{12}(u_1, u_2)}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial al_{34}(u_1, u_2)}{\partial u_1} = {} & e_0'.al_0((u))^3 + e_1'.al_0((u))^2.al_{34}((u)).al_{12}((u)) \\
& + e_2'.al_0((u)) \\
(18) \qquad & + e_3'.al_0((u)).al_{34}((u))^2 + e_4'.al_0((u)).al_{12}^2((u)) \\
& + e_5'.al_{34}((u)).al_{12}((u)) \\
& + e_6'.al_{34}((u))^3.al_{12}((u)) \\
& + e_7'.al_{12}((u))^3.al_{34}((u)).
\end{aligned}$$

Die Konstantenbestimmung erfolgt wiederum durch Substitution halber Perioden, und zwar bestimmen wir zunächst die den Gröfsen e' entsprechenden Gröfsen e.

Die vier Konstanten e_0, e_2, e_6, e_7 können unmittelbar aus den Gleichungen bestimmt werden:

$$(19) \quad \begin{aligned}
\frac{\vartheta_{03}^2.\vartheta_{12}^2.\vartheta_0^2.\vartheta_{14}^2}{\vartheta_{34}^2.\vartheta_4^2.\vartheta_5^2} &= -e_6.\vartheta_{23}^2 - e_7.\vartheta_{14}^2, \\
\frac{\vartheta_{03}^2.\vartheta_{23}^2.\vartheta_5^2.\vartheta_{34}^2}{\vartheta_{34}^2.\vartheta_4^2.\vartheta_5^2} &= -e_6.\vartheta_{14}^2 - e_7.\vartheta_{23}^2, \\
\frac{\vartheta_{03}^2.\vartheta_{23}^2.\vartheta_0.\vartheta_{12}}{\vartheta_{34}.\vartheta_4^2.\vartheta_5} &= -e_0.\vartheta_{14}^2 - e_2.\vartheta_{23}^2, \\
\frac{\vartheta_{03}^2.\vartheta_{14}^2.\vartheta_0.\vartheta_{12}}{\vartheta_{34}.\vartheta_4^2.\vartheta_5} &= -e_0.\vartheta_{23}^2 - e_2.\vartheta_{14}^2.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt jedenfalls $e_0 = 0$. Die andern vier Konstanten sind aus den Gleichungen bestimmt:

$$
(20)\quad
\begin{aligned}
& e_1.\vartheta_0^2.\vartheta_{34}.\vartheta_{12} + e_3.\vartheta_0.\vartheta_5.\vartheta_{34}^2 + e_4.\vartheta_0.\vartheta_5.\vartheta_{12}^2 + e_5.\vartheta_5^2.\vartheta_{34}.\vartheta_{12} \\
&\qquad = -(e_2.\vartheta_0.\vartheta_5^3 + e_6.\vartheta_{34}^3.\vartheta_{12} + e_7.\vartheta_{12}^3.\vartheta_{34}), \\
& e_1.\vartheta_5^2.\vartheta_{34}.\vartheta_{12} + e_3.\vartheta_0.\vartheta_5.\vartheta_{12}^2 + e_4.\vartheta_0.\vartheta_5.\vartheta_{34}^2 + e_5.\vartheta_0^2.\vartheta_{34}.\vartheta_{12} \\
&\qquad = -(e_2.\vartheta_5.\vartheta_0^3 + e_6.\vartheta_{12}^3.\vartheta_{34} + e_7.\vartheta_{12}.\vartheta_{34}^3), \\
& e_1.\vartheta_{34}^2.\vartheta_0.\vartheta_5 + e_3.\vartheta_{34}.\vartheta_{12}.\vartheta_0^2 + e_4.\vartheta_{34}.\vartheta_{12}.\vartheta_5^2 + e_5.\vartheta_{12}^2.\vartheta_0.\vartheta_5 \\
&\qquad = -(e_2.\vartheta_{34}.\vartheta_{12}^3 + e_6.\vartheta_0^3.\vartheta_5 + e_7.\vartheta_5^3.\vartheta_0), \\
& e_1.\vartheta_{12}^2.\vartheta_0.\vartheta_5 + e_3.\vartheta_{34}.\vartheta_{12}.\vartheta_5^2 + e_4.\vartheta_{34}.\vartheta_{12}.\vartheta_0^2 + e_5.\vartheta_{34}^2.\vartheta_0.\vartheta_5 \\
&\qquad = -(e_2.\vartheta_{12}.\vartheta_{34}^3 + e_6.\vartheta_0.\vartheta_5^3 + e_7.\vartheta_0^3.\vartheta_5).
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt:

$$
(21)\quad
\begin{aligned}
e_1.\vartheta_2^2.\vartheta_{01}^2.\vartheta_4^2.\vartheta_{03}^2 &= -2e_2.\vartheta_0.\vartheta_5.\vartheta_{34}.\vartheta_{12}.\vartheta_{14}^2.\vartheta_{23}^2 \\
&\quad + e_6.\vartheta_{14}^2.\vartheta_{23}^2(\vartheta_0^2.\vartheta_{34}^2 + \vartheta_{12}^2.\vartheta_5^2), \\
&\quad + e_7.\vartheta_{14}^2.\vartheta_{23}^2(\vartheta_0^2.\vartheta_{12}^2 + \vartheta_5^2.\vartheta_{34}^2), \\
e_3.\vartheta_2^2.\vartheta_{01}^2.\vartheta_4^2.\vartheta_{03}^2 &= e_2.\vartheta_{14}^2.\vartheta_{23}^2(\vartheta_0^2.\vartheta_{12}^2 + \vartheta_5^2.\vartheta_{34}^2) \\
&\quad - e_6.\vartheta_5.\vartheta_0.\vartheta_{34}.\vartheta_{12}(\vartheta_{23}^4 + \vartheta_{14}^4) \\
&\quad - 2e_7.\vartheta_{14}^2.\vartheta_{23}^2.\vartheta_0.\vartheta_5.\vartheta_{34}.\vartheta_{12}), \\
e_4.\vartheta_2^2.\vartheta_{01}^2.\vartheta_4^2.\vartheta_{03}^2 &= e_2.\vartheta_{14}^2.\vartheta_{23}^2(\vartheta_0^2.\vartheta_{34}^2 + \vartheta_5^2.\vartheta_{12}^2) \\
&\quad - 2e_6.\vartheta_{14}^2.\vartheta_{23}^2.\vartheta_0.\vartheta_5.\vartheta_{34}.\vartheta_{12} \\
&\quad - e_7.\vartheta_0.\vartheta_5.\vartheta_{34}.\vartheta_{12}(\vartheta_{14}^4 + \vartheta_{23}^4), \\
e_5.\vartheta_2^2.\vartheta_{01}^2.\vartheta_4^2.\vartheta_{03}^2 &= -e_1.\vartheta_0.\vartheta_5.\vartheta_{34}.\vartheta_{12}(\vartheta_{14}^4 + \vartheta_{23}^4) \\
&\quad + e_6.\vartheta_{14}^2.\vartheta_{23}^2(\vartheta_0^2.\vartheta_{12}^2 + \vartheta_5^2.\vartheta_{34}^2) \\
&\quad + e_7.\vartheta_{14}^2.\vartheta_{23}^2(\vartheta_0^2.\vartheta_{34}^2 + \vartheta_5^2.\vartheta_{12}^2).
\end{aligned}
$$

Aus diesen Gleichungen sind sämtliche Konstanten bestimmt. Für die Größen e' ergeben sich die Werte (22):

$$
\begin{aligned}
& e_0' = 0,\ N.e_1' = \varkappa^2.\mu_1^2.\mu\lambda^2,\ e_2' = -\lambda_1^2,\ e_3' = 0,\ e_4' = \mu_1^2, \\
& N.e_5' = -\varkappa_1^2.\lambda_1^2(\varkappa^2 + \lambda^2 - \mu^2),\ N.e_6' = -\varkappa^2.\varkappa_1^2.\mu\lambda^2, \\
& N.e_7' = \varkappa_1^2.\mu_1^2(\varkappa^2 + \lambda^2 - \mu^2).
\end{aligned}
$$

In ähnlicher Weise können wir setzen:

$$(23)\qquad \frac{\partial al_{12}(u_1, u_2)}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial al_{34}(u_1, u_2)}{\partial u_2}+\frac{\partial al_{12}(u_1, u_2)}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial al_{34}(u_1, u_2)}{\partial u_1}$$

$$\begin{aligned}
&= e_0'.al_0(\!(u)\!)^3 + e_1'.al_0(\!(u)\!)^2.al_{34}(\!(u)\!).al_{12}(\!(u)\!)\\
&+ e_2'.al_0(\!(u)\!) + e_3'.al_0(\!(u)\!).al_{34}(\!(u)\!)^2\\
&+ e_4'.al_0(\!(u)\!).al_{12}(\!(u)\!)^2 + e_5'.al_{34}(\!(u)\!).al_{12}(\!(u)\!)\\
&+ e_6'.al_{34}(\!(u)\!)^3.al_{12}(\!(u)\!) + e_7'.al_{12}(\!(u)\!)^3.al_{34}(\!(u)\!),\\
&e_0'=0,\ N.e_1'=2\varkappa^2.\mu_1^2.\mu_\lambda^2,\\
&e_2'=-\lambda_1^2.\mu^2,\ e_3'=\varkappa^2.\mu_\lambda^2,\ e_4'=\mu_1^2(\varkappa^2+\lambda^2),\\
&N.e_5'=\varkappa^4+\lambda^4+\mu^4-2\lambda^2.\mu^2-2\mu^2.\varkappa^2+2\varkappa^2.\lambda^2.\mu^2-\varkappa^4.\lambda^4,\\
&N.e_6'=-2\varkappa^2.\varkappa_1^2.\mu_\lambda^2,\ N.e_7'=2\varkappa^2.\varkappa_1^2.\lambda^2.\mu_1^2,
\end{aligned}$$

Genau so ergiebt sich:

$$(24)\qquad \frac{\partial al_{12}(u_1, u_2)}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial al_{34}(u_1, u_2)}{\partial u_2}$$

$$\begin{aligned}
&= e_0'.al_0(\!(u)\!)^3+e_1'.al_0(\!(u)\!)^2.al_{34}(\!(u)\!).al_{12}(\!(u)\!)\\
&+ e_2'.al_0(\!(u)\!)+e_3'.al_0(\!(u)\!).al_{34}(\!(u)\!)^2+e_4'.al_0(\!(u)\!).al_{12}(\!(u)\!)^2\\
&+ e_5'.al_{34}(\!(u)\!).al_{12}(\!(u)\!)+e_6'.al_{34}(\!(u)\!)^3.al_{12}(\!(u)\!)\\
&+ e_7'.al_{12}(\!(u)\!)^3.al_{34}(\!(u)\!),\\
&e_0'=0,\ N.e_1'=\varkappa^2.\mu_1^2.\mu_\lambda^2(\varkappa^2+\lambda^2-\varkappa^2.\lambda^2),\\
&e_2'=0,\ e_3'=\varkappa^2.\mu_\lambda^2,\ e_4'=\varkappa^2.\lambda^2.\mu_1^2,\\
&N.e_5'=\varkappa^2.\lambda^2(\varkappa^2+\lambda^2-2\mu^2-\varkappa^2.\lambda^2+\mu^4),\\
&N.e_6'=-\varkappa^2.\varkappa_1^2.\mu^2.\mu_\lambda^2,\ N.e_7'=\varkappa^2.\varkappa_1^2.\lambda^2.\mu^2.\mu_1^2.
\end{aligned}$$

In ähnlicher Weise sind die geraden Differentialquotienten zu behandeln. Setzen wir:

$$(25)\qquad \vartheta_5(v_1, v_2)^{2k+1}.\frac{\partial^{2k}\dfrac{\vartheta_0(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)}}{\partial v_1^{2k-r}.\partial v_2^{r}}=f_{2k+1,\,r}(v_1, v_2),$$

so leistet diese Funktion folgenden Bedingungsgleichungen Genüge:

$$\begin{aligned}
(26)\qquad & f_{2k+1,\,r}(v_1+1, v_2)=f_{2k+1,\,r}(v_1, v_2),\\
& f_{2k+1,\,r}(v_1, v_2+1)=f_{2k+1,\,r}(v_1, v_2),\\
& f_{2k+1,\,r}(v_1+\tau_{11}, v_2+\tau_{12})=-e^{-(2k+1)\pi i(2v_1+\tau_{11})}.f_{2k+1,\,r}(v_1, v_2),\\
& f_{2k+1,\,r}(v_1+\tau_{12}, v_2+\tau_{22})=-e^{-(2k+1)\pi i(2v_2+\tau_{22})}.f_{2k+1,\,r}(v_1, v_2).
\end{aligned}$$

Überdies ist die Funktion eine gerade Funktion von v_1 und v_2.

Hieraus ergiebt sich unmittelbar die Richtigkeit der Gleichung:

$$(27) \quad \vartheta_5(v_1, v_2)^{2k+1} \cdot \frac{\partial^{2k} \frac{\vartheta_0(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)}}{\partial v_1^{2k-r} . \partial v_2^r}$$

$$= \Sigma e_{\alpha\beta\gamma\delta} \cdot \vartheta_0(v_1, v_2)^\alpha . \vartheta_b(v_1, v_2)^\beta . \vartheta_c(v_1, v_2)^\gamma . \vartheta_d(v_1, v_2)^\delta .$$

Dabei ist $(0, b, c, d)$ ein Göpelsches Quadrupel; es finden ferner die Beziehungen statt:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2k + 1, \; \gamma + \delta \equiv \beta + \delta \equiv 0 \bmod 2, \; \delta < 4.$$

Hieraus folgt unmittelbar der entsprechende Satz für die hyperelliptischen Funktionen. Als speziellen Fall wählen wir wiederum $k = 1$ und das Quadrupel $(0, 5, 34, 12)$.

$$(28) \quad \frac{\partial^2 al_0(u_1, u_2)}{\partial u_1^2} = e_0' . al_0((u))^3 + e_1' . al_0((u))$$

$$+ e_2' . al_0((u)) . al_{34}((u))^2 + e_3' . al_0((u)) . al_{12}((u))^2$$

$$+ e_4' . al_{34}((u)) . al_{12}((u)).$$

Durch Substitution halber Perioden ergeben sich für die Gröfsen e die Gleichungen:

$$
(29) \quad \begin{aligned}
-\frac{\vartheta_{14}^2 . \vartheta_2^2 . \vartheta_{01}^2}{\vartheta_{34}^2 . \vartheta_5^2} &= e_0 . \vartheta_{23}^2 + e_1 . \vartheta_{14}^2, \\
\frac{\vartheta_{23}^2 . \vartheta_2^2 . \vartheta_{01}^2}{\vartheta_{34}^2 . \vartheta_5^2} &= e_0 . \vartheta_{14}^2 + e_1 . \vartheta_{23}^2, \\
-2 \frac{\vartheta_{14}^2 . \vartheta_{01}^2 . \vartheta_2^2 . \vartheta_{23}^2}{\vartheta_{34}^2 . \vartheta_4^2 . \vartheta_5^2} &= e_0 . \vartheta_4^2 + e_2 . \vartheta_{03}^2, \\
0 &= e_0 . \vartheta_{03}^2 + e_2 . \vartheta_4^2, \\
-2 \cdot \frac{\vartheta_2^2 . \vartheta_0^2}{\vartheta_{34}^2} &= e_0 . \vartheta_{01}^2 + e_3 . \vartheta_2^2, \\
-2 \cdot \frac{\vartheta_{12}^2 . \vartheta_{01}^2}{\vartheta_5^2} &= e_0 . \vartheta_2^2 + e_3 . \vartheta_{01}^2.
\end{aligned}
$$

Es ergeben sich dann die Werte (30):

$$N . e_0' = 2\varkappa^2 . \mu_1^2 . \mu_\lambda^2, \; N . e_1' = -\mu^4 + \lambda^2 . \mu^2 + \mu^2 . \varkappa^2 - 2\varkappa^2 . \lambda^2 + \varkappa^2 . \lambda^2 . \mu^2,$$

$$N . e_2' = 2\varkappa^2 . \varkappa_1^2 . \mu_\lambda^2,$$

$$N . e_3' = 2\varkappa_1^2 . \mu_1^2(\varkappa^2 + \mu_\lambda^2), \; e_4' = 2\varkappa_1^2.$$

In ähnlicher Weise ergeben sich die beiden andern zweiten Differentialquotienten:

$$(31)\quad \frac{\partial^2 al_0(u_1, u_2)}{\partial u_1 . \partial u_2} = e_0'.al_0((u))^3 + e_1'.al_0((u))$$
$$+ e_2'.al_0((u)).al_{34}((u))^2 + e_3'.al_0((u)).al_{12}((u))^2$$
$$+ e_4'.al_{34}((u)).al_{12}((u)),$$
$$N.e_0' = 2\varkappa^2.\mu_1^2.\mu^{\lambda 2},\quad N.e_1' = -\mu^4 + \lambda^2.\mu^2 + \mu^2.\varkappa^2 - 2\varkappa^2.\lambda^2 + \varkappa^2.\lambda^2.\mu^2,$$
$$N.e_2' = -2\varkappa^2.\varkappa_1^2.\mu_\lambda^2,$$
$$N.e_3' = 2\varkappa^2.\varkappa_1^2.\lambda^2.\mu_1^2,\quad e_4' = \varkappa_1^2.\mu^2.$$

$$(32)\quad \frac{\partial^2 al_0(u_1, u_2)}{\partial u_2^2} = e_0'.al_0((u))^3 + e_1'.al_0((u))$$
$$+ e_2'.al_0((u)).al_{34}((u))^2 + e_3'.al_0((u)).al_{12}((u))^2$$
$$+ e_4'.al_{34}((u)).al_{12}((u)),$$
$$N.e_0' = 2\varkappa^2.\mu_1^2.\mu_\lambda^2.(\varkappa^2 + \lambda^2 - \varkappa^2.\lambda^2),$$
$$N.e_1' = -(\varkappa^2 + \lambda^2 - \varkappa^2.\lambda^2)(\mu^4 - \lambda^2.\mu^2 - \mu^2.\varkappa^2 + 2\varkappa^2.\lambda^2 - \varkappa^2.\lambda^2.\mu^2),$$
$$N.e_2' = -2\varkappa^2.\varkappa_1^2.\mu^2.\mu_\lambda^2,\quad N.e_3' = 2\varkappa^2.\varkappa_1^2.\lambda^2.\mu^2.\mu_1^2,\quad e_4' = 0.$$

Genau so wie früher ergiebt sich endlich der Lehrsatz:
Es ist

$$(33)\quad \vartheta_5(v_1, v_2)^{2k+2}.\frac{\partial^{2k}\left(\frac{\vartheta_0(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)}\right)^2}{\partial v_1^{2k-r}.\partial v_2^{r}}$$
$$= \Sigma e_{\alpha\beta\gamma\delta}.\vartheta_a(v_1, v_2)^\alpha.\vartheta_b(v_1, v_2)^\beta.\vartheta_c(v_1, v_2)^\gamma.\vartheta_d(v_1, v_2)^\delta,$$
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2k + 2,\ \beta + \delta \equiv \gamma + \delta \equiv 0 \bmod 2,\ \delta < 4;$$

(a, b, c, d) ist ein beliebiges Göpelsches Quadrupel.

Als Beispiel nehmen wir wiederum den Fall $k = 1$ und das Quadrupel: (0, 5, 34, 12):

$$(34)\quad \frac{\partial^2 al_0(u_1, u_2)^2}{\partial u_1^2} = e_0' + e_1'.al_0((u))^4 + e_2'.al_{12}((u))^4$$
$$+ e_3'.al_0((u))^2 + e_4'.al_{34}((u))^2 + e_5'.al_{12}((u))^2$$
$$+ e_6'.al_0((u))^2.al_{34}((u))^2 + e_7'.al_0((u))^2.al_{12}((u))^2$$
$$+ e_8'.al_{34}((u))^2.al_{12}((u))^2$$
$$+ e_9'.al_0((u)).al_{34}((u)).al_{12}((u)).$$

Die Konstanten können mit Hülfe der früheren Formeln leicht bestimmt werden, indessen ziehen wir es auch hier vor, von der Substitution halber Perioden Gebrauch zu machen. Für die entsprechenden Gröfsen e ergeben sich die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
-2\,\frac{\vartheta_{12}^{2}\,.\,\vartheta_{01}^{2}}{\vartheta_{5}^{2}} &= e_0\,.\,\vartheta_{2}^{2} + e_4\,.\,\vartheta_{01}^{2},\\
-2\,\frac{\vartheta_{2}^{2}\,.\,\vartheta_{0}^{2}}{\vartheta_{34}^{2}} &= e_0\,.\,\vartheta_{01}^{2} + e_4\,.\,\vartheta_{2}^{2},\\
0 &= e_1\,.\,\vartheta_{03}^{2} + e_6\,.\,\vartheta_{4}^{2},\\
-6\,\frac{\vartheta_{14}^{2}\,.\,\vartheta_{01}^{2}\,.\,\vartheta_{2}^{2}\,.\,\vartheta_{23}^{2}}{\vartheta_{34}^{2}\,.\,\vartheta_{4}^{2}\,.\,\vartheta_{5}^{2}} &= e_1\,.\,\vartheta_{4}^{2} + e_6\,.\,\vartheta_{03}^{2},\\
0 &= e_2\,.\,\vartheta_{14}^{2} + e_8\,.\,\vartheta_{23}^{2},\\
0 &= e_2\,.\,\vartheta_{23}^{2} + e_8\,.\,\vartheta_{14}^{2},\\
2\vartheta_{23}^{2}\,.\,\vartheta_{14}^{2}\,.\,\mu^{2} &= e_0\,.\,\vartheta_{23}^{4} + e_1\,.\,\vartheta_{14}^{4} + e_3\,.\,\vartheta_{23}^{2}\,.\,\vartheta_{14}^{2},\\
-2\vartheta_{23}^{2}\,.\,\vartheta_{14}^{2}\,.\,\mu^{2} &= e_0\,.\,\vartheta_{14}^{4} + e_1\,.\,\vartheta_{23}^{4} + e_3\,.\,\vartheta_{23}^{2}\,.\,\vartheta_{14}^{2},\\
0 &= e_0\,.\,\vartheta_{03}^{4} + e_2\,.\,\vartheta_{4}^{4} + e_5\,.\,\vartheta_{03}^{2}\,.\,\vartheta_{4}^{2},\\
-2\,\frac{\vartheta_{14}^{2}\,.\,\vartheta_{01}^{2}\,.\,\vartheta_{2}^{2}\,.\,\vartheta_{23}^{2}}{\vartheta_{34}^{2}\,.\,\vartheta_{5}^{2}} &= e_0\,.\,\vartheta_{4}^{4} + e_2\,.\,\vartheta_{03}^{4} + e_5\,.\,\vartheta_{03}^{2}\,.\,\vartheta_{4}^{2},\\
-6\,\frac{\vartheta_{2}^{2}\,.\,\vartheta_{12}^{2}\,.\,\vartheta_{01}^{2}}{\vartheta_{5}^{2}} &= e_1\,.\,\vartheta_{2}^{4} + e_2\,.\,\vartheta_{01}^{4} + e_7\,.\,\vartheta_{2}^{2}\,.\,\vartheta_{01}^{2},\\
-6\,\frac{\vartheta_{2}^{2}\,.\,\vartheta_{0}^{2}\,.\,\vartheta_{01}^{2}}{\vartheta_{34}^{2}} &= e_1\,.\,\vartheta_{01}^{4} + e_2\,.\,\vartheta_{2}^{4} + e_7\,.\,\vartheta_{2}^{2}\,.\,\vartheta_{01}^{2}.
\end{aligned}
\tag{35}
$$

In ähnlicher Weise sind die beiden andern Differentialquotienten zu berechnen. Die Bestimmungsgleichungen zeigen viele Ähnlichkeit mit den Gleichungen, welche bei den Ausdrücken:

$$\left(\frac{\partial\, al_0(u_1, u_2)}{\partial u_1}\right)^2, \quad \left(\frac{\partial\, al_0(u_1, u_2)}{\partial u_1}\right)\left(\frac{\partial\, al_0(u_1, u_2)}{\partial u_2}\right), \quad \left(\frac{\partial\, al_0(u_1, u_2)}{\partial u_2}\right)^2$$

auftreten. Thatsächlich unterscheiden sich denn auch die Konstanten, die bei den zweiten Differentialquotienten von $al_0(u_1, u_2)^2$ auftreten, von den entsprechenden, die bei den Quadraten resp. Produkten von den ersten Differentialquotienten von $al_0(u_1, u_2)$ auftreten, nur um ganze Zahlen, und zwar sind die Konstanten mit den Indices 0, 4, 5 das doppelte, mit den Indices 3, 9 das vierfache, mit den Indices 1, 6, 7 das sechsfache der entsprechenden Konstanten in den früheren Entwicklungen. In ähnlicher Weise könnten wir weitergehen und noch eine Fülle weitererer Sätze aufstellen — indessen mögen die entwickelten genügen.

Es zeigt sich nun für die wirkliche Berechnung die lineare Transformation. von grofser Bedeutung. Wir beschränken uns inbezug hierauf auf folgende Bemerkungen.

Wendet man die schon früher besprochene lineare Transformation an:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

so gehen die Thetafunktionen mit den Indices:

5, 01, 4, 34, 12, 23, 2, 02, 3, 03, 0, 04, 1, 13, 24, 14

über in die Thetafunktionen:

5, 01, 23, 34, 0, 4, 2, 1, 24, 14, 12, 13, 02, 04, 3, 03,

also:

$$\varkappa^2 \text{ in } \frac{\mu^2}{\lambda^2},\ \varkappa_1^2 \text{ in } \frac{\mu_\lambda^2}{\lambda^2},\ \ \lambda^2 \text{ in } \frac{\mu^2}{\varkappa^2},\ \lambda_1^2 \text{ in } \frac{\mu_\varkappa^2}{\varkappa^2},\ \mu^2 \text{ in } \mu^2,\ \mu_1^2 \text{ in } \mu_1^2,$$

$$\lambda_\varkappa^2 \text{ in } \frac{\lambda_\varkappa^2 . \mu^2}{\varkappa^2 . \lambda^2},\quad \mu_\varkappa^2 \text{ in } \lambda_1^2 . \frac{\mu^2}{\lambda^2},\quad \mu_\lambda^2 \text{ in } \varkappa_1^2 . \frac{\mu^2}{\varkappa^2}.$$

Ferner wird:

$$M_0 = 0,\quad M_1 = \varkappa . \lambda,\quad M_2 = \frac{\varkappa . \lambda}{\mu^2},\quad M_3 = 0.$$

Es geht demnach:

$$\frac{\partial^2 al_0(u_1, u_2)}{\partial u_1^2} \text{ über in: } \frac{\partial^2 Al_0(u_1', u_2')}{\partial u_1'^2}$$

oder also in

$$\frac{\partial^2 al_{12}(u_1, u_2)}{\partial u_2^2} . \frac{1}{\varkappa^2 . \lambda^2},$$

ebenso:

$$\frac{\partial^2 al_0(u_1, u_2)}{\partial u_1 . \partial u_2} \text{ über in: } \frac{\partial^2 al_{12}(u_1, u_2)}{\partial u_1 . \partial u_2} . \frac{\mu^2}{\varkappa^2 . \lambda^2},$$

$$\frac{\partial^2 al_0(u_1, u_2)}{\partial u_2^2} \text{ über in: } \frac{\partial^2 al_{12}(u_1, u_2)}{d u_1^2} . \frac{\mu^4}{\varkappa^2 . \lambda^2}.$$

Das analoge gilt für die übrigen Ausdrücke. Jedenfalls ist klar, dafs wir mit Hülfe der linearen Transformation aus den vorhin entwickelten Gröfsen unmittelbar die Ausdrücke für

$$\frac{\partial^2 al_{12}(u_1, u_2)}{\partial u_\varepsilon^2},\quad \frac{\partial^2 al_{12}(u_1, u_2)}{\partial u_1 . \partial u_2},\quad \left(\frac{\partial al_{12}(u_1, u_2)}{\partial u_\varepsilon}\right)^2,$$

$$\frac{\partial al_{12}(u_1, u_2)}{\partial u_1} . \frac{\partial al_{12}(u_1, u_2)}{\partial u_2},$$

$$\frac{\partial al_0(u_1, u_2)}{\partial u_\varepsilon} . \frac{\partial al_{34}(u_1, u_2)}{\partial u_\varepsilon},$$

$$\frac{\partial al_0(u_1, u_2)}{\partial u_1} . \frac{\partial al_{34}(u_1, u_2)}{\partial u_2} + \frac{\partial al_0(u_1, u_2)}{\partial u_2} . \frac{\partial al_{34}(u_1, u_2)}{\partial u_1},$$

$$\varepsilon = 1, 2,$$

erhalten können und zwar als ganze rationale Funktionen der nämlichen drei Funktionen $al_0(u_1, u_2)$, $al_{34}(u_1, u_2)$, $al_{12}(u_1, u_2)$.

Ferner führt die lineare Transformation:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

die Thetafunktionen mit den Indices:

5, 01, 4, 34, 12, 23, 2, 02, 3, 03, 0, 04, 1, 13, 24, 14

über in die Thetafunktionen mit den Indices:

5, $-$14, 03, 0, 12, $-i.2$, 23, 24, 3, 4, 34, 04, 13, $i.1$, $-i.02$, $-i.01$,

d. h. also:

$$\varkappa^2 \text{ in } -\frac{\mu_\lambda^2}{\lambda_1^2}, \quad \varkappa_1^2 \text{ in } \frac{\mu_1^2}{\lambda_1^2}, \quad \lambda^2 \text{ in } -\frac{\lambda^2}{\lambda_1^2},$$

$$\lambda_1^2 \text{ in } \frac{1}{\lambda_1^2}, \quad \mu^2 \text{ in } \frac{\lambda_\varkappa^2}{\lambda_1^2}, \quad \mu_1^2 \text{ in } \frac{\varkappa_1^2}{\lambda_1^2},$$

$$\lambda_\varkappa^2 \text{ in } \frac{\mu^2}{\lambda_1^2}, \quad \mu_\varkappa^2 \text{ in } -\frac{\mu_\varkappa^2}{\lambda_1^2}, \quad \mu_\lambda^2 \text{ in } -\frac{\varkappa^2}{\lambda_1^2}.$$

Ferner wird:

$$M_0 = \lambda_1, \quad M_1 = \lambda_1 . \lambda^2, \quad M_2 = 0, \quad M_3 = \lambda_1^3.$$

Es geht also über:

$$\frac{\partial^2 al_0(u_1, u_2)}{\partial u_1^2} \text{ in } \frac{\partial^2 al_{34}(u_1, u_2)}{\partial u_1^2} \cdot \frac{1}{\lambda_1^2},$$

$$\frac{\partial^2 al_0(u_1, u_2)}{\partial u_1 . \partial u_2} \text{ in } \frac{\partial^2 al_{34}(u_1, u_2)}{\partial u_1^2} \cdot \frac{\lambda^2}{\lambda_1^4} + \frac{\partial^2 al_{34}(u_1, u_2)}{\partial u_1 . \partial u_2} \cdot \frac{1}{\lambda_1^4},$$

$$\frac{\partial^2 al_0(u_1, u_2)}{\partial u_2^2} \text{ in } \frac{\partial^2 al_{34}(u_1, u_2)}{\partial u_1^2} \cdot \frac{\lambda^4}{\lambda_1^6} - 2\,\frac{\partial^2 al_{34}(u_1, u_2)}{\partial u_1 . \partial u_2} \cdot \frac{\lambda^2}{\lambda_1^6} + \frac{\partial^2 al_{34}(u_1, u_2)}{\partial u_2^2} \cdot \frac{1}{\lambda_1^6}$$

etc.

Jedenfalls ist klar, dafs wir mit Hülfe der linearen Transformation aus den ursprünglichen Gröfsen mit leichter Mühe die Ausdrücke für:

$$\frac{\partial^2 al_{34}(u_1, u_2)}{du_\varepsilon^2}, \quad \frac{\partial^2 al_{34}(u_1, u_2)}{\partial u_1 . \partial u_2}, \quad \left(\frac{\partial al_{34}(u_1, u_2)}{\partial u_\varepsilon}\right)^2,$$

$$\frac{\partial al_{34}(u_1, u_2)}{\partial u_1} . \frac{\partial al_{34}(u_1, u_2)}{\partial u_2},$$

$$\frac{\partial al_{12}(u_1, u_2)}{\partial u_\varepsilon} . \frac{\partial al_0(u_1, u_2)}{\partial u_\varepsilon},$$

$$\frac{\partial al_{12}(u_1, u_2)}{\partial u_1} . \frac{\partial al_0(u_1, u_2)}{\partial u_2} + \frac{\partial al_{12}(u_1, u_2)}{\partial u_2} . \frac{\partial al_0(u_1, u_2)}{\partial u_1}$$

$$\varepsilon = 1, 2,$$

und zwar als ganze rationale Funktionen der nämlichen drei Funktionen $al_0(u_1, u_2)$, $al_{34}(u_1, u_2)$, $al_{12}(u_1, u_2)$ bestimmen können.

Diese Entwicklungen genügen, um für den Fall des allgemeinen geraden Differentialquotienten Rekursionsformeln aufzustellen, mit deren Hülfe die Koefficienten in den höheren Differentialquotienten bestimmt werden können, wenn sie für die niederen bestimmt sind. Wie es in der Natur der Sache liegt, werden diese Rekursionsformeln sich ziemlich kompliziert gestalten. Wir beschränken uns unter solchen Umständen darauf anzugeben, wie die Formeln aufgestellt werden können, ohne sie selbst wirklich abzuleiten.

Wir fanden die Formel:

$$\frac{\partial^{2k} al_0(u_1, u_2)}{\partial u_1^{2k-r} . \partial u_2^r} = \Sigma e_{\alpha\beta\gamma\delta} . al_0(u_1, u_2)^\alpha . al_{34}(u_1, u_2)^\gamma . al_{12}(u_1, u_2)^\delta.$$

Der Symmetrie wegen lassen wir hierbei die Bedingung fallen, dafs $\delta < 4$ ist. Durch zweimaliges Differenzieren nach u_1 ergiebt sich hieraus die Formel:

$$\frac{\partial^{2k+2} al_0(u_1, u_2)}{\partial u_1^{2k+2-r} . \partial u_2^r} = \Sigma c_{\alpha\beta\gamma\delta} . F, \tag{36}$$

wobei gesetzt ist:

$$\begin{aligned} F = {} & \Sigma \alpha . \alpha - 1 . al_0(u_1, u_2)^{\alpha-2} . al_{34}(u_1, u_2)^\gamma . al_{12}(u_1, u_2)^\delta . \left(\frac{\partial al_0(u_1, u_2)}{\partial u_1}\right)^2 \\ & + \Sigma \alpha . al_0(u_1, u_2)^{\alpha-1} . al_{34}(u_1, u_2) . al_{12}(u_1, u_2) . \left(\frac{\partial^2 al_0(u_1, u_2)}{\partial u_1^2}\right) \\ & + 2 \Sigma \delta . \gamma . al_0(u_1, u_2)^\alpha . al_{34}(u_1, u_2)^{\gamma-1} . al_{12}(u_1, u_2)^{\delta-1} \\ & \qquad . \frac{\partial al_{34}(u_1, u_2)}{\partial u_1} . \frac{\partial al_{12}(u_1, u_2)}{\partial u_1} . \end{aligned} \tag{37}$$

Es braucht nicht näher auseinandergesetzt zu werden, in welcher Weise hier die Summen zu nehmen sind.

Die Ausdrücke:

$$\left(\frac{\partial al_0(u_1, u_2)}{\partial u_1}\right)^2, \quad \frac{\partial al_{34}(u_1, u_2)}{\partial u_1} . \frac{\partial al_{12}(u_1, u_2)}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial^2 al_0(u_1, u_2)}{\partial u_1^2},$$

und die analogen, die sich auf die andern Indices beziehen, haben wir bilden gelernt. Setzen wir die gefundenen Ausdrücke ein, so ergeben sich Rekursionsformeln, vermöge deren die Koefficienten in in dem definierten $2k+2^{\text{ten}}$ Differentialquotienten bestimmt sind, wenn es die Koefficienten in dem ursprünglichen $2k^{\text{ten}}$ sind. In ähnlicher Weise kann mit allen $2k+2^{\text{ten}}$ Differentialquotienten verfahren werden.

Analog endlich könnten die ungeraden Differentialquotienten behandelt werden.

§ 28.*)

Die Differentialquotienten der hyperelliptischen Funktionen und ihrer Logarithmen für die Nullwerte der Argumente.

Von grosser Bedeutung zeigt sich die Theorie der linearen Transformation vor allem in dem Falle, wo es lediglich darauf ankommt, die Differentialquotienten für die Nullwerte der Argumente zu bestimmen. Wir wollen das Problem so stellen: „Es sollen die hyperelliptischen Funktionen in Potenzreihen der beiden Veränderlichen u_1 und u_2 entwickelt werden.“

Wir wollen nun annehmen, das Problem wäre für fünf Funktionen gelöst und zwar für die Funktionen:

$$al_{01}(u_1, u_2),\quad al_4(u_1, u_2),\quad al_{14}(u_1, u_2),\quad al_{13}(u_1, u_2),\quad al_{24}(u_1, u_2),$$

dann lehrt die Theorie der linearen Transformation die Reihenentwicklung der übrigen hyperelliptischen Funktionen kennen.

In der That, wir nehmen die vier Transformationen:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

die schon in § 26 erwähnt worden sind.

Für diese vier Transformationen gehen die Grössen

$$al_{01}((u)),\quad al_4((u)),\quad al_{14}((u)),\quad al_{13}((u)),\quad al_{24}((u)),$$
$$u_1,\quad u_2,\quad \varkappa^2,\quad \lambda^2,\quad \mu^2$$

resp. über in:

*) Krause: Crelle 98.

$$
\begin{array}{ccccc}
al_{01}(\!(u)\!), & al_{34}(\!(u)\!), & al_{14}(\!(u)\!), & al_{1}(\!(u)\!), & al_{24}(\!(u)\!), \\
u_1, & u_2, & \mu^2, & \lambda^2, & \varkappa^2, \\
al_{01}(\!(u)\!), & al_{2}(\!(u)\!), & al_{12}(\!(u)\!), \quad \frac{\lambda^3(1+\mu^2)}{\lambda^2+\mu^2}\cdot al_{13}(\!(u)\!), & & \lambda . al_{24}(\!(u)\!), \\
\lambda u_1, & \lambda^3 . u_2, & \frac{\varkappa^2}{\lambda^2}, & \frac{1}{\lambda^2}, & \frac{\mu^2}{\lambda^2}, \\
al_{01}(\!(u)\!), & al_{23}(\!(u)\!), & al_{03}(\!(u)\!), \quad \frac{2 . \varkappa . \lambda}{1+\mu^2}\cdot al_{04}(\!(u)\!), & & \varkappa . \lambda . al_{3}(\!(u)\!), \\
\varkappa . \lambda . u_2, & \frac{\varkappa . \lambda}{\varkappa^2}\cdot u_1, & \frac{\mu^2}{\lambda^2}, & \frac{\mu^2}{\varkappa^2}, & \mu^2, \\
al_{01}(\!(u)\!), & al_{4}(\!(u)\!), & al_{0}(\!(u)\!), \quad \frac{\mu . \lambda(1+\lambda^2)}{\varkappa^2+\lambda^2}\cdot al_{02}(\!(u)\!), & & \lambda . \mu . al_{3}(\!(u)\!), \\
\lambda . \mu . u_2, & \frac{\lambda . \mu}{\varkappa^2}\cdot u_1, & \varkappa^2, & \frac{\varkappa^2}{\mu^2}, & \frac{\varkappa^2}{\lambda^2}.
\end{array}
$$

Um also die Differentialquotienten der hyperelliptischen Funktionen für die Nullwerte der Argumente zu kennen, haben wir es nur nötig, die Differentialquotienten der fünf speziellen Funktionen zu bilden:

$$al_{01}(\!(u)\!), \quad al_{4}(\!(u)\!), \quad al_{14}(\!(u)\!), \quad al_{13}(\!(u)\!), \quad al_{24}(\!(u)\!).$$

Ferner aber folgt unmittelbar, dafs es bei den Funktionen $al_{01}(\!(u)\!)$ und $al_{4}(\!(u)\!)$ genügt, die Differentialquotienten aufzustellen:

$$\frac{\partial^{2k} al_{\alpha}(u_1, u_2)_0}{\partial u_1^{\,n}\,\partial u_2^{\,2k-n}}, \qquad \alpha = 01, 4,$$

bei welchen n der Reihe nach die Werte annimmt:

$$2k, \quad 2k-1, \ldots k.$$

Für spätere Zwecke ist es nun nötig, die Differentialquotienten bis incl. den fünften wirklich aufzustellen. Es wird (1):

$$\frac{\partial^3 al_{13}(u_1, u_2)_0}{\partial u_1^{\,3}} = \frac{-1+2\varkappa^2-\lambda^2+\mu^2}{1+\mu^2},$$

$$\frac{\partial^3 al_{13}(u_1, u_2)_0}{\partial u_1^{\,2} . \partial u_2} = \frac{\mu^2 . (-1+2\varkappa^2-\lambda^2+\mu^2)}{1+\mu^2},$$

$$\frac{\partial^3 al_{13}(u_1, u_2)_0}{\partial u_1 . \partial u_2^{\,2}} = \frac{\mu^2(-\lambda^2+2\varkappa^2 . \mu^2)}{1+\mu^2},$$

$$\frac{\partial^3 al_{13}(u_1, u_2)_0}{\partial u_2^{\,3}} = \frac{\mu^2(-\lambda^2 . \mu^2+2\varkappa^2 . \mu^2-2\lambda^2 . \varkappa^2+2\varkappa^2 . \lambda^2 . \mu^2)}{1+\mu^2},$$

$$\frac{\partial^3 al_{24}(u_1, u_2)_0}{\partial u_1^{\,3}} = -1+2\varkappa^2-\lambda^2+2\mu^2,$$

$$\frac{\partial^3 al_{24}(u_1, u_2)_0}{\partial u_1^2 . \partial u_2} = 2\varkappa^2 . \mu^2,$$

$$\frac{\partial^3 al_{24}(u_1, u_2)_0}{\partial u_1 . \partial u_2^2} = \mu^2 . \varkappa^2(1 + \lambda^2),$$

$$\frac{\partial^3 al_{24}(u_1, u_2)_0}{\partial u_2^3} = 2\varkappa^2 . \lambda^2 . \mu^2,$$

$$\frac{\partial^4 al_{01}(u_1, u_2)_0}{\partial u_1^4} = 1 - 6\varkappa^2 + 6\lambda^2 - 6\mu^2 - 6\mu^2 . \lambda^2 + 6\varkappa^2 . \mu^2 - 6\lambda^2 . \varkappa^2 + 5\varkappa^4 + \lambda^4 + 5\mu^4,$$

$$\frac{\partial^4 al_{01}(u_1, u_2)_0}{\partial u_1^3 . \partial u_2} = (1 - \varkappa^2 + \lambda^2 - \mu^2)(\lambda^2 - 5\varkappa^2 . \mu^2),$$

$$\frac{\partial^4 al_{01}(u_1, u_2)_0}{\partial u_1^2 . \partial u_2^2} = (\lambda^2 . \mu^2 - \mu^2 . \varkappa^2 + \varkappa^2 . \lambda^2 - \varkappa^2 . \lambda^2 . \mu^2)(1 - \varkappa^2 + \lambda^2 - \mu^2) - 4\varkappa^2 . \mu^2(\lambda^2 - \varkappa^2 . \mu^2),$$

$$\frac{\partial^4 al_4(u_1, u_2)_0}{\partial u_1^4} = (\lambda^2 - \mu^2)(4 - 4\varkappa^2 + \lambda^2 - 5\mu^2),$$

$$\frac{\partial^4 al_4(u_1, u_2)_0}{\partial u_1^3 . \partial u_2} = (\lambda^2 - \mu^2)(2\varkappa^2 - 5\varkappa^2 . \mu^2 + \varkappa^2 . \lambda^2 - 2\varkappa^4),$$

$$\frac{\partial^4 al_4(u_1, u_2)_0}{\partial u_1^2 . \partial u_2^2} = \varkappa^2(\lambda^2 - \mu^2)(\lambda^2 - \mu^2 - 4\varkappa^2 . \mu^2),$$

$$\frac{\partial^4 al_{14}(u_1, u_2)_0}{\partial u_1^4} = 1 - 6\varkappa^2 + 4\lambda^2 - 6\mu^2 - 4\lambda^2 . \mu^2 + 6\mu^2 . \varkappa^2 - 4\varkappa^2 . \lambda^2 + 5\varkappa^4 + 5\mu^4,$$

$$\frac{\partial^4 al_{14}(u_1, u_2)_0}{\partial u_1^3 . \partial u_2} = \varkappa^2 . \mu^2(-5 + 5\varkappa^2 - 4\lambda^2 + 5\mu^2),$$

$$\frac{\partial^4 al_{14}(u_1, u_2)_0}{\partial u_1^2 . \partial u_2^2} = \varkappa^2 . \mu^2(-1 + \varkappa^2 - 4\lambda^2 + \mu^2 + 4\varkappa^2 . \mu^2),$$

$$\frac{\partial^4 al_{14}(u_1, u_2)_0}{\partial u_1 . \partial u_2^3} = \varkappa^2 . \mu^2(-2\lambda^2 - 2\lambda^2 . \mu^2 + 5\mu^2 . \varkappa^2 - 2\varkappa^2 . \lambda^2 + 2\varkappa^2 . \lambda^2 . \mu^2),$$

$$\frac{\partial^4 al_{14}(u_1, u_2)_0}{\partial u_2^4} = \varkappa^2 . \mu^2(-4\lambda^2 . \mu^2 + 5\mu^2 . \varkappa^2 - 4\varkappa^2 . \lambda^2 + 4\varkappa^2 . \lambda^2 . \mu^2),$$

$$(1 + \mu^2) \frac{\partial^5 al_{13}(u_1, u_2)_0}{d u_1^5} = 1 - 16\varkappa^2 + 14\lambda^2 - 14\mu^2 - 14\lambda^2 . \mu^2 + 16\mu^2 . \varkappa^2 - 16\varkappa^2 . \lambda^2 + 16\varkappa^4 + \lambda^4 + 13\mu^4,$$

$$(1 + \mu^2) \cdot \frac{\partial^5 al_{13}(u_1 . u_2)_0}{\partial u_1^4 . \partial u_2} = \mu^2(1 - 16\varkappa^2 + 6\lambda^2 - 6\mu^2 - 6\lambda^2 . \mu^2 + 16\mu^2 . \varkappa^2 - 16\varkappa^2 . \lambda^2 + 16\varkappa^4 + \lambda^4 + 5\mu^4).$$

$$(1+\mu^2)\cdot\frac{\partial^5 al_{13}(u_1, u_2)_0}{\partial u_1^3 . \partial u_2^2}$$
$$= \mu^2(\lambda^2 + \lambda^4 - \lambda^2.\mu^2 - 10\mu^2.\varkappa^2 - 6\varkappa^2.\lambda^2 - 10\varkappa^2.\lambda^2.\mu^2 + 16\mu^2.\varkappa^4 + 10\varkappa^2.\mu^4),$$

$$(1+\mu^2)\cdot\frac{\partial^5 al_{13}(u_1, u_2)_0}{\partial u_1^2 . \partial u_2^3}$$
$$= \mu^2(\lambda^2.\mu^2 - 2\mu^2.\varkappa^2 + 2\varkappa^2.\lambda^2 - 20\varkappa^2.\lambda^2.\mu^2 - \varkappa^4(\lambda^2 - \mu^2) + \lambda^4(2\varkappa^2 + \mu^2) + \mu^4(2\varkappa^2 - \lambda^2) + 4\varkappa^2.\lambda^2.\mu^2 - 2\lambda^4.\varkappa^2.\mu^2 + 2\mu^4.\varkappa^2.\lambda^2 + 12\varkappa^4.\mu^4),$$

$$(1+\mu^2)\cdot\frac{\partial^5 al_{13}(u_1, u_2)_0}{\partial u_1 . \partial u_2^4}$$
$$= \mu^2(4\lambda^4.\varkappa^2 + \lambda^4.\mu^2 - 4\varkappa^2.\lambda^2.\mu^2 - 16\varkappa^4.\lambda^2.\mu^2 - 4\lambda^4.\varkappa^2.\mu^2 - 12\mu^4.\varkappa^2.\lambda^2 + 16\varkappa^4.\mu^4 + 16\varkappa^4.\mu^4.\lambda^2),$$

$$(1+\mu^2)\cdot\frac{\partial^5 al_{13}(u_1, u_2)_0}{\partial u_2^5}$$
$$= \mu^2(-24\varkappa^4.\lambda^2.\mu^2 + 16\lambda^4.\mu^2.\varkappa^2 - 16\mu^4.\varkappa^2.\lambda^2 + \lambda^4.\mu^4 + 16\varkappa^4.\mu^4 + 8\varkappa^4.\lambda^4 - 16\lambda^4.\mu^4.\varkappa^2 + 24\mu^4.\varkappa^4.\lambda^2 - 24\varkappa^4.\lambda^4.\mu^2 + 16\varkappa^4.\lambda^4.\mu^4),$$

$$\frac{\partial^5 al_{24}(u_1, u_2)_0}{\partial u_1^5} = (1 - 16\varkappa^2 + 14\lambda^2 - 16\mu^2 - 16\lambda^2.\mu^2 + 24\mu^2.\varkappa^2 - 16\varkappa^2.\lambda^2 + 16\varkappa^4 + \lambda^4 + 16\mu^4),$$

$$\frac{\partial^5 al_{24}(u_1, u_2)_0}{\partial u_1^4 . \partial u_2} = 4\varkappa^2.\mu^2(-3 + 4\varkappa^2 - 3\lambda^2 + 4\mu^2),$$

$$\frac{\partial^5 al_{24}(u_1, u_2)_0}{\partial u_1^3 . \partial u_2^2} = \varkappa^2.\mu^2(-1 + 2\varkappa^2 - 10\lambda^2 + 2\mu^2 + 2\lambda^2.\mu^2 + 12\mu^2.\varkappa^2 + 2\varkappa^2.\lambda^2 - \lambda^4),$$

$$\frac{\partial^5 al_{24}(u_1, u_2)_0}{\partial u_1^2 . \partial u_2^3} = 2\varkappa^2.\mu^2(-\lambda^2 - 2\lambda^2.\mu^2 + 5\mu^2.\varkappa^2 - 2\varkappa^2.\lambda^2 - \lambda^4 + 5\varkappa^2.\lambda^2.\mu^2),$$

$$\frac{\partial^5 al_{24}(u_1, u_2)_0}{\partial u_1 . \partial u_2^4} = \varkappa^2.\mu^2(-4\lambda^2.\mu^2 + 5\mu^2.\varkappa^2 - 4\varkappa^2.\lambda^2 + 14\varkappa^2.\lambda^2.\mu^2 - 4\varkappa^2.\lambda^4 - 4\mu^2.\lambda^4 + 5\varkappa^2.\lambda^4.\mu^2),$$

$$\frac{\partial^5 al_{24}(u_1, u_2)_0}{\partial u_2^5} = 4\varkappa^2.\lambda^2.\mu^2(-2\lambda^2.\mu^2 + 3\mu^2.\varkappa^2 - 2\varkappa^2.\lambda^2 + 3\varkappa^2.\lambda^2.\mu^2).$$

Die Indices Null auf den linken Seiten sagen aus, dafs die Differentialquotienten für die Nullwerte der Argumente zu bilden sind.

In ähnlicher Weise wie die hyperelliptischen Funktionen können die Logarithmen derselben behandelt werden.

Wir haben in § 20 die Formeln gefunden:

$$\frac{\partial^2 \log \vartheta_5(v_1, v_2)}{\partial v_s^2} = \frac{\vartheta_5''(v_s)_0}{\vartheta_5} + \frac{\vartheta_1'(v_s)_0^2}{\vartheta_5^2} \cdot \frac{\vartheta_1(v_1, v_2)^2}{\vartheta_5(v_1, v_2)^2}$$
$$+ \frac{\vartheta_3'(v_s)_0^2}{\vartheta_5^2} \cdot \frac{\vartheta_3(v_1, v_2)^2}{\vartheta_5(v_1, v_2)^2} + \frac{\vartheta_{13}'(v_s)_0^2}{\vartheta_5^2} \cdot \frac{\vartheta_{13}(v_1, v_2)^2}{\vartheta_5(v_1, v_2)^2}$$
$$\frac{\partial^2 \log \vartheta_5(v_1, v_2)}{\partial v_1 . \partial v_2} = \frac{\vartheta_5''(v_1, v_2)_0}{\vartheta_5} + \frac{\vartheta_1'(v_1)_0 . \vartheta_1'(v_2)_0}{\vartheta_5^2} \cdot \frac{\vartheta_1(v_1, v_2)^2}{\vartheta_5(v_1, v_2)^2}$$
$$+ \frac{\vartheta_3'(v_1)_0 . \vartheta_3'(v_2)_0}{\vartheta_5^2} \cdot \frac{\vartheta_3(v_1, v_2)^2}{\vartheta_5(v_1, v_2)^2} + \frac{\vartheta_{13}'(v_1)_0 . \vartheta_{13}'(v_2)_0}{\vartheta_5^2} \cdot \frac{\vartheta_{13}(v_1, v_2)^2}{\vartheta_5(v_1, v_2)^2}, \quad s = 1, 2$$

Hieraus lassen sich nach bekannten Regeln die entsprechenden Formeln für die übrigen neun geraden Thetafunktionen aufstellen.

Eine leichte Betrachtung zeigt, dafs diese Formeln richtig bleiben, wenn wir uns die Differentiation links und rechts nach den Gröfsen u an Stelle der Gröfsen v ausgeführt denken. Aus den früher angegebenen Formeln für die zweiten Differentialquotienten der hyperelliptischen Funktionen für die Nullwerte der Argumente ergeben sich dann leicht die entsprechenden für die Differentialquotienten des Logarithmus der Thetafunktionen vermöge der Formeln:

$$(2) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 \log \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial u_s^2} + \frac{\partial^2 \log \vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial u_s^2} + a l_\alpha''(u_s)_0, \\ &\frac{\partial^2 \log \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial u_1 . \partial u_2} = \frac{\partial^2 \log \vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial u_1 . \partial u_2} + a l_\alpha''(u_1, u_2)_0. \end{aligned}$$

Hieraus wiederum folgt der bekannte Satz, das sämtliche Differentialquotienten des Logarithmus einer geraden Thetafunktion nach den Gröfsen u_1 und u_2 für die Nullwerte der Argumente von den Differentialquotienten vierter Ordnung an ganze rationale Funktionen von $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 sind.

Die lineare Transformation giebt dann wieder eine grofse Reihe von Beziehungen zwischen den Differentialquotienten der Logarithmen der einzelnen Thetafunktionen. Die Betrachtungen, die zu ihnen führen, sind ganz analog wie bei den hyperelliptischen Funktionen. Es handelt sich immer um Anwendung derjenigen linearen Transformationen, für welche entweder:

$$M_1 = M_2 = 0$$

ist, oder aber:

$$M_0 = M_3 = 0.$$

Es ergeben sich dann folgende Resultate. Denken wir uns die beiden

Funktionen $\log \vartheta_5(v_1, v_2)$ und $\log \vartheta_{14}(v_1, v_2)$ nach Potenzen von u_1 und u_2 entwickelt und sehen von den Gliedern nullter und zweiter Ordnung ab, so bleiben die Entwicklungen richtig, wenn gesetzt wird an Stelle von:

$$\begin{array}{lllllll}
\log \vartheta_5(v_1, v_2), & \log \vartheta_{14}(v_1, v_2), & u_1, & u_2, & \varkappa^2, & \lambda^2, & \mu^2, \\
\log \vartheta_4(v_1, v_2), & \log \vartheta_{14}(v_1, v_2), & u_1, & u_2, & \lambda^2, & \mu^2, & \varkappa^2, \\
\log \vartheta_{34}(v_1, v_2), & \log \vartheta_{14}(v_1, v_2), & u_1, & u_2, & \lambda^2, & \varkappa^2, & \mu^2, \\
\log \vartheta_2(v_1, v_2), & \log \vartheta_{03}(v_1, v_2), & \mu . u_1, & \mu^3 . u_2, & \frac{\varkappa^2}{\mu^2}, & \frac{\lambda^2}{\mu^2}, & \frac{1}{\mu^2}, \\
\log \vartheta_{01}(v_1, v_2), & \log \vartheta_0(v_1, v_2), & \varkappa . u_1, & \varkappa^3 . u_2, & \frac{\lambda^2}{\varkappa^2}, & \frac{\mu^2}{\varkappa^2}, & \frac{1}{\varkappa^2}, \\
\log \vartheta_{23}(v_1, v_2), & \log \vartheta_{12}(v_1, v_2), & \lambda . u_1, & \lambda^3 . u_2, & \frac{1}{\lambda^2}, & \frac{\varkappa^2}{\lambda^2}, & \frac{\mu^2}{\lambda^2}.
\end{array}$$

Unter solchen Umständen genügt es, die Differentialquotienten der beiden Funktionen $\log \vartheta_5(v_1, v_2)$ und $\log \vartheta_{14}(v_1, v_2)$ für die Nullwerte der Argumente zu berechnen, um sie für die übrigen Funktionen auch zu haben.

Ferner aber lehrt die lineare Transformation, dafs die Entwicklung von $\log \vartheta_{14}(v_1, v_2)$, von den Gliedern nullter und zweiter Ordnung abgesehen, ungeändert bleibt, wenn an Stelle von:

$$u_1,\ u_2,\ \varkappa^2,\ \lambda^2,\ \mu^2$$

gesetzt wird:

$$\varkappa . \lambda . \mu . u_2,\ \varkappa . \lambda . \mu . u_1,\ \frac{1}{\varkappa^2},\ \frac{1}{\lambda^2},\ \frac{1}{\mu^2},$$

und hieraus wiederum folgt, dafs wir uns auf die Differentialquotienten beschränken können:

$$\frac{\partial^{2k} \log \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^{2k-r} . \partial u_2^{r}},$$

für welche r der Reihe nach die Werte annimmt: $0, 1, \ldots k$.

Für die Folge genügt es, die Differentialquotienten bis incl. dem vierten zu kennen. Es ergiebt sich (3):

$$\frac{\partial^4 \log \vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^4} = 2(\varkappa^2 - \lambda^2 + \mu^2 + \lambda^2 . \mu^2 - \mu^2 . \varkappa^2 + \varkappa^2 . \lambda^2 - \varkappa^4 - \mu^4),$$

$$\frac{\partial^4 \log \vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^3 . \partial u_2} = 2\varkappa^2 . \mu^2(1 - \varkappa^2 + \lambda^2 - \mu^2),$$

$$\frac{\partial^4 \log \vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^2 . \partial u_2^2} = 2\varkappa^2 . \mu^2(\lambda^2 - \varkappa^2 . \mu^2),$$

$$\frac{\partial^4 \log \vartheta_{14}(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^4} = 2(-1 + \varkappa^2 + \lambda^2 + \mu^2 - \lambda^2 . \mu^2 - \mu^2 . \varkappa^2 - \varkappa^2 . \lambda^2),$$

$$\frac{\partial^4 \log \vartheta_{14}(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^3 . \partial u_2} = \frac{\partial^4 \log \vartheta_{14}(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^2 . \partial u_2^2} = -2\varkappa^2 . \lambda^2 . \mu^2 .$$

§ 29.*)

Ableitung von Differentialgleichungen, denen die geraden Thetafunktionen für die Nullwerte der Argumente Genüge leisten.

Die Betrachtungen, die in den vorigen Paragraphen angestellt worden sind, können dazu dienen, um eine Reihe von Differentialgleichungen zu entwickeln, denen die Thetafunktionen für die Nullwerte der Argumente Genüge leisten, und zwar aufgefafst als Funktionen von $\varkappa$, λ, μ.

Wir gehen dazu von den bekannten Gleichungen aus:

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\partial v_\varepsilon^2} = 4\pi i \cdot \frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\partial \tau_{\varepsilon\varepsilon}},$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\partial v_1 . \partial v_2} = 2\pi i \cdot \frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\partial \tau_{12}}.$$

$\varepsilon = 1, 2.$

Wir hatten gesetzt:

$$(2)\qquad \begin{aligned} u_1 &= K_{11} . v_1 + K_{12} . v_2, \\ u_2 &= K_{21} . v_1 + K_{22} . v_2; \end{aligned}$$

wir wollen jetzt umgekehrt setzen:

$$(3)\qquad \begin{aligned} v_1 &= l_{11} . u_1 + l_{12} . u_2, \\ v_2 &= l_{21} . u_1 + l_{22} . u_2. \end{aligned}$$

Dann folgt — wobei wir uns sofort auf die Nullwerte der Argumente beschränken wollen:

$$(4)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial u_\varepsilon^2} &= l_{1\varepsilon}^2 \cdot \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial v_1^2} + 2 l_{1\varepsilon} . l_{2\varepsilon} \cdot \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial v_1 . \partial v_2} \\ &\quad + l_{2\varepsilon}^2 \cdot \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial v_2^2}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial u_1 . \partial u_2} = l_{11} \cdot l_{12} \cdot \frac{d^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial v_1^2}$$
$$+ (l_{11} . l_{22} + l_{12} . l_{21}) \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial v_1 . \partial v_2} + l_{21} \cdot l_{22} \cdot \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial v_2^2}.$$

---

*) Cf. Krause: Crelle 98.

Mithin wird:

$$\frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial u_\varepsilon^2} = 4\pi i \left[l_{1\varepsilon}^2 \cdot \frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{11}} + l_{1\varepsilon} \cdot l_{2\varepsilon} \cdot \frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{12}} + l_{2\varepsilon}^2 \cdot \frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{22}} \right], \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial u_1 . \partial u_2} = 2\pi i \left[2 l_{11} \cdot l_{12} \cdot \frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{11}} + (l_{11} \cdot l_{22} + l_{12} \cdot l_{21}) \frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{12}} + 2 l_{21} \cdot l_{22} \cdot \frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{22}} \right].$$

Nun ist:

$$\frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{\varepsilon \varepsilon_1}} = \sum_\varkappa \frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa} \cdot \frac{\partial \varkappa}{\partial \tau_{\varepsilon \varepsilon_1}}. \tag{6}$$

Hierbei soll die Summe rechts nach $\varkappa$ genommen werden, so zwar, dafs an Stelle von $\varkappa$ der Reihe nach gesetzt wird: $\varkappa$, λ, μ.

Setzen wir diese Werte ein, so folgt (7):

$$\frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial u_\varepsilon^2} = 4\pi i \sum_\varkappa \frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa} \left(l_{1\varepsilon}^2 \cdot \frac{\partial \varkappa}{\partial \tau_{11}} + l_{1\varepsilon} \cdot l_{2\varepsilon} \cdot \frac{\partial \varkappa}{\partial \tau_{12}} + l_{2\varepsilon}^2 \cdot \frac{\partial \varkappa}{\partial \tau_{22}} \right),$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial u_1 . \partial u_2} = 2\pi i \sum_\varkappa \frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa} \left(2 l_{11} \cdot l_{12} \cdot \frac{\partial \varkappa}{\partial \tau_{11}} + (l_{11} \cdot l_{12} + l_{12} \cdot l_{21}) \frac{\partial \varkappa}{\partial \tau_{12}} + 2 l_{21} \cdot l_{22} \frac{\partial \varkappa}{\partial \tau_{22}} \right).$$

Die Klammern sind leicht zu berechnen.

In der That, setzen wir (8):

$$\varkappa(v_1, v_2) = \frac{\vartheta_{23}(v_1, v_2) . \vartheta_{01}(v_1, v_2)}{\vartheta_4(v_1, v_2) . \vartheta_5(v_1, v_2)}, \quad \lambda(v_1, v_2) = \frac{\vartheta_3(v_1, v_2) . \vartheta_{23}(v_1, v_2)}{\vartheta_{34}(v_1, v_2) . \vartheta_4(v_1, v_2)},$$

$$\mu(v_1, v_2) = \frac{\vartheta_{01}(v_1, v_2) . \vartheta_2(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2) . \vartheta_{34}(v_1, v_2)},$$

so folgt, wenn die Differentialquotienten für die Nullwerte der Argumente durch den Index 0 bezeichnet werden:

$$\frac{\partial \varkappa}{\partial \tau_{\varepsilon\varepsilon}} = \frac{1}{4\pi i} \cdot \frac{\partial^2 \varkappa(v_1, v_2)_0}{\partial v_\varepsilon^2}, \quad \frac{\partial \varkappa}{\partial \tau_{12}} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{\partial^2 \varkappa(v_1, v_2)_0}{\partial v_1 . \partial v_2}, \tag{9}$$

und analoge Formeln ergeben sich für die Gröfsen λ und μ.

Dann ergiebt sich aber vermöge einer einfachen Betrachtung:

$$
(10)\qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial u_\varepsilon^2} &= \sum_\varkappa \frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa} \cdot \frac{\partial^2 \varkappa(v_1, v_2)_0}{\partial u_\varepsilon^2},\\
\frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial u_1 . \partial u_2} &= \sum_\varkappa \frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa} \cdot \frac{\partial^2 \varkappa(v_1, u_2)_0}{\partial u_1 . \partial u_2}.
\end{aligned}
$$

In diesen Formeln können die Faktoren der Gröfsen $\frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa}$ etc. vermöge der Entwicklungen, die im vorigen Paragraphen angestellt sind, mit leichter Mühe berechnet werden. Es ergiebt sich:

$$
(11)\qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^2} &= -2 \sum_\varkappa \frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa} \cdot \varkappa . (1 - \varkappa^2),\\
\frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial u_1 . \partial u_2} &= - \sum_\varkappa \frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa} \cdot \varkappa (1 - \varkappa^2)(\mu^2 + \lambda^2),\\
\frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial u_2^2} &= -2 \sum_\varkappa \frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa} \cdot \varkappa (1 - \varkappa^2) \lambda^2 . \mu^2.
\end{aligned}
$$

Wir gehen nun zu den vierten Differentialquotienten über.

Einerseits ergeben sich für dieselben die Formeln:

$$
(12)\qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial^4 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial v_\varepsilon^4} &= -16\pi^2 \cdot \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{\varepsilon\varepsilon}^2},\\
\frac{\partial^4 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial v_\varepsilon^3 . \partial v_{\varepsilon+1}} &= -8\pi^2 \cdot \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{\varepsilon\varepsilon} . \partial \tau_{12}},\\
\frac{\partial^4 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial v_1^2 . \partial v_2^2} &= -16\pi^2 \cdot \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{11} . \partial \tau_{22}} = -4\pi^2 . \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{12}^2}.
\end{aligned}
$$

Andrerseits aber wird (13):

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^4 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial u_\varepsilon^4} &= \sum_1^2{}_i \frac{\partial^4 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial v_i^4} \cdot l_{i\varepsilon}^4\\
&\quad + 4 \sum_1^2{}_i \frac{\partial^4 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial v_i^3 . \partial v_{i+1}} \cdot l_{i\varepsilon}^3 . l_{i+1\,\varepsilon} + 6 \frac{\partial^4 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial v_1^2 . \partial v_2^2} \cdot l_{1\varepsilon}^2 . l_{2\varepsilon}^2,\\
\frac{\partial^4 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial u_\varepsilon^3 . \partial u_{\varepsilon+1}} &= \sum_1^2{}_i \frac{\partial^4 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial v_i^4} \cdot l_{i\varepsilon}^3 . l_{i\varepsilon+1}\\
&\quad + \sum_1^2{}_i \frac{\partial^4 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial v_i^3 . \partial v_{i+1}} (l_{i\varepsilon} . l_{i+1\,\varepsilon+1} + 3 l_{i+1\,\varepsilon} . l_{i\varepsilon+1}) l_{i\varepsilon}^2\\
&\quad + 3 \frac{\partial^4 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial v_1^2 . \partial v_2^2} (l_{11} . l_{22} + l_{12} . l_{21}) l_{1\varepsilon} . l_{2\varepsilon},
\end{aligned}
$$

$$\frac{\partial^4 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^2 . \partial u_2^2} = \sum_1^2 {}^i \frac{\partial^4 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial v_i^4} . l_{i1}^2 . l_{i2}^2$$

$$+ 2 \sum_1^2 {}^i \frac{\partial^4 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial v_i^3 . \partial v_{i+1}} l_{i1} . l_{i2}(l_{11} . l_{22} + l_{12} . l_{21})$$

$$+ \frac{\partial^4 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial v_1^2 . \partial v_2^2} (l_{11}^2 . l_{22}^2 + 4 l_{11} . l_{12} . l_{21} . l_{22} + l_{12}^2 . l_{21}^2).$$

Mithin ergeben sich die Beziehungen (14):

$$\frac{\partial^4 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial u_\varepsilon^4} = -16\pi^2 \Big[\sum_1^2 {}^i \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{ii}^2} . l_{i\varepsilon}^4$$

$$+ 2 \sum_1^2 {}^i \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{ii} . \partial \tau_{12}} . l_{i\varepsilon}^3 . l_{i+1\,\varepsilon}$$

$$+ 2 \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{11} . \partial \tau_{22}} . l_{1\varepsilon}^2 . l_{2\varepsilon}^2$$

$$+ \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{12}^2} . l_{1\varepsilon}^2 . l_{2\varepsilon}^2 \Big],$$

$$\frac{\partial^4 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial u_\varepsilon^3 . \partial u_{\varepsilon+1}} = - 8\pi^2 \Big[2 \sum_1^2 {}^i \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{ii}^2} l_{i\varepsilon}^3 . l_{i\,\varepsilon+1}$$

$$+ \sum_1^2 {}^i \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{ii} . \partial \tau_{12}} . l_{i\varepsilon}^2 (l_{i\varepsilon} . l_{i+1\,\varepsilon+1} + 3 l_{i+1\,\varepsilon} . l_{i\,\varepsilon+1})$$

$$+ 2 \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{11} . \partial \tau_{22}} . l_{1\varepsilon} . l_{2\varepsilon}(l_{11} . l_{22} + l_{12} . l_{21})$$

$$+ \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{12}^2} . l_{1\varepsilon} . l_{2\varepsilon}(l_{11} . l_{22} + l_{12} . l_{21}) \Big],$$

$$\frac{\partial^4 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^2 . \partial u_2^2} = -16\pi^2 \Big[\sum_1^2 {}^i \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{ii}^2} . l_{i1}^2 . l_{i2}^2$$

$$+ \sum_1^2 {}^i \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{ii} . \partial \tau_{12}} l_{i1} . l_{i2}(l_{11} . l_{22} + l_{12} . l_{21})$$

$$+ \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{11} . \partial \tau_{22}} (l_{11}^2 . l_{22}^2 + l_{12}^2 . l_{21}^2)$$

$$+ \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{12}^2} . l_{11} . l_{12} . l_{21} . l_{22} \Big]$$

$$= -4\pi^2 \Bigg[4 \sum_1^2 i \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{ii}^2} \cdot l_{i1}^2 . l_{i2}^2$$

$$+ 4 \sum_1^2 i \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{ii} . \partial \tau_{12}} \cdot l_{i1} . l_{i2} (l_{11} . l_{22} + l_{12} . l_{21})$$

$$+ 8 \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{11} . \partial \tau_{22}} \cdot l_{11} . l_{12} . l_{21} . l_{22}$$

$$+ \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{12}^2} \cdot (l_{11} . l_{22} + l_{12} . l_{21})^2 \Bigg].$$

Nun ist aber:

$$\frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{\varepsilon \varepsilon_1}^2} = \sum_\varkappa \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa^2} \cdot \left(\frac{\partial \varkappa}{\partial \tau_{\varepsilon \varepsilon_1}} \right)^2$$

$$+ 2 \sum_{\varkappa \lambda} \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa . \partial \lambda} \cdot \frac{\partial \varkappa}{\partial \tau_{\varepsilon \varepsilon_1}} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \tau_{\varepsilon \varepsilon_1}}$$

$$+ \sum_\varkappa \frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa} \cdot \frac{\partial^2 \varkappa}{\partial \tau_{\varepsilon \varepsilon_1}^2},$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{\varepsilon \varepsilon_1} . \partial \tau_{\eta \eta_1}} = \sum_\varkappa \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa^2} \cdot \frac{\partial \varkappa}{\partial \tau_{\varepsilon \varepsilon_1}} \cdot \frac{\partial \varkappa}{\partial \tau_{\eta \eta_1}} \tag{15}$$

$$+ \sum_{\varkappa \lambda} \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa . \partial \lambda} \left(\frac{\partial \varkappa}{\partial \tau_{\varepsilon \varepsilon_1}} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \tau_{\eta \eta_1}} + \frac{\partial \lambda}{\partial \tau_{\varepsilon \varepsilon_1}} \cdot \frac{\partial \varkappa}{\partial \tau_{\eta \eta_1}} \right)$$

$$+ \sum_\varkappa \frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa} \cdot \frac{\partial^2 \varkappa}{\partial \tau_{\varepsilon \varepsilon_1} . \partial \tau_{\eta \eta_1}}.$$

Setzen wir diese Werte ein, so folgt nach einigen leichten Reduktionen (16):

$$\frac{\partial^4 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial u_\varepsilon^4} = \sum_\varkappa \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa^2} \cdot \left(\frac{\partial^2 \varkappa(v_1, v_2)_0}{\partial u_\varepsilon^2} \right)^2$$

$$+ 2 \sum_{\varkappa \lambda} \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa . \partial \lambda} \cdot \frac{\partial^2 \varkappa(v_1, v_2)_0}{\partial u_\varepsilon^2} \cdot \frac{\partial^2 \lambda(v_1, v_2)_0}{\partial u_\varepsilon^2}$$

$$+ \sum_\varkappa a_{\varkappa \varepsilon} \cdot \frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa},$$

$$\frac{\partial^4 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial u_\varepsilon^3 . \partial u_{\varepsilon+1}} = \sum_\varkappa \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa^2} \cdot \frac{\partial^2 \varkappa(v_1, v_2)_0}{\partial u_\varepsilon^2} \cdot \frac{\partial^2 \varkappa(v_1, v_2)_0}{\partial u_\varepsilon . \partial u_{\varepsilon+1}}$$

$$+ \sum_{\varkappa \lambda} \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa . \partial \lambda} \Bigg(\frac{\partial^2 \varkappa(v_1, v_2)_0}{\partial u_1 . \partial u_2} \cdot \frac{\partial^2 \lambda(v_1, v_2)_0}{\partial u_\varepsilon^2}$$

$$+ \frac{\partial^2 \varkappa(v_1, v_2)_0}{\partial u_\varepsilon^2} \cdot \frac{\partial^2 \lambda(v_1, v_2)_0}{\partial u_1 . \partial u_2} \Bigg)$$

$$+ \sum_\varkappa b_{\varkappa \varepsilon} \cdot \frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa},$$

$$\frac{\partial^4\vartheta_\alpha(v_1,\,v_2)_0}{\partial u_1^2.\partial u_2^2} = \sum_\varkappa \frac{\partial^2\vartheta_\alpha(v_1,\,v_2)_0}{\partial\varkappa^2}\cdot\frac{\partial^2\varkappa(v_1,\,v_2)_0}{\partial u_1^2}\cdot\frac{\partial^2\varkappa(v_1,\,v_2)_0}{\partial u_2^2}$$

$$+\sum_{\varkappa\lambda}\frac{\partial^2\vartheta_\alpha(v_1,\,v_2)_0}{\partial\varkappa.\partial\lambda}\left(\frac{\partial^2\varkappa(v_1,\,v_2)_0}{\partial u_1^2}\cdot\frac{\partial^2\lambda(v_1,\,v_2)_0}{\partial u_2^2}+\frac{\partial^2\varkappa(v_1,\,v_2)_0}{\partial u_2^2}\cdot\frac{\partial^2\lambda(v_1,\,v_2)_0}{\partial u_1^2}\right)$$

$$+\sum_\varkappa c_\varkappa\cdot\frac{\partial\vartheta_\alpha(v_1,\,v_2)_0}{\partial\varkappa}$$

$$=\sum_\varkappa\frac{\partial^2\vartheta_\alpha(v_1,\,v_2)_0}{\partial\varkappa^2}\left(\frac{\partial^2\varkappa(v_1,\,v_2)_0}{\partial u_1.\partial u_2}\right)^2$$

$$+2\sum_{\varkappa\lambda}\frac{\partial^2\vartheta_\alpha(v_1,\,v_2)_0}{\partial\varkappa.\partial\lambda}\cdot\frac{\partial^2\varkappa(v_1,\,v_2)_0}{\partial u_1.\partial u_2}\cdot\frac{\partial^2\lambda(v_1,\,v_2)_0}{\partial u_1.\partial u_2}$$

$$+\sum_\varkappa d_\varkappa\cdot\frac{\partial\vartheta_\alpha(v_1,\,v_2)_0}{\partial\varkappa}.$$

In diesen Formeln sind die Koefficienten von $\frac{\partial^2\vartheta_\alpha(v_1,\,v_2)_0}{\partial\varkappa^2}$, $\frac{\partial^2\vartheta_\alpha(v_1,\,v_2)_0}{\partial\varkappa.\partial\lambda}$ bekannte Funktionen der Gröfsen $\varkappa^2$, λ^2, μ^2, dagegen sind die Gröfsen $a_{\varkappa\varepsilon}$, $b_{\varkappa\varepsilon}$, $c_\varkappa$, $d_\varkappa$ einstweilen noch unbekannt.

Greifen wir eine derselben heraus, z. B. $a_{\varkappa 1}$, so folgt:

$$a_{\varkappa 1} = -16\pi^2\Big[l_{11}^4\cdot\frac{\partial^2\varkappa}{\partial\tau_{11}^2}+2l_{11}^3.l_{21}\cdot\frac{\partial^2\varkappa}{\partial\tau_{11}.\partial\tau_{12}}+2l_{11}.l_{21}^3\cdot\frac{\partial^2\varkappa}{\partial\tau_{12}.\partial\tau_{22}}$$

$$+2l_{11}^2.l_{21}^2\cdot\frac{\partial^2\varkappa}{\partial\tau_{11}.\partial\tau_{22}}+l_{11}^2.l_{21}^2\cdot\frac{\partial^2\varkappa}{\partial\tau_{12}^2}+l_{21}^4\cdot\frac{\partial^2\varkappa}{\partial\tau_{22}^2}\Big].$$

Nun ist:

$$\varkappa = \frac{\vartheta_{23}.\vartheta_{01}}{\vartheta_4.\vartheta_5}.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\partial^2\varkappa}{\partial\tau_{\varepsilon\varepsilon_1}^2} = \varkappa\left[\frac{\partial^2\log\vartheta_{23}}{\partial\tau_{\varepsilon\varepsilon_1}^2}+\frac{\partial^2\log\vartheta_{01}}{\partial\tau_{\varepsilon\varepsilon_1}^2}-\frac{\partial^2\log\vartheta_4}{\partial\tau_{\varepsilon\varepsilon_1}^2}-\frac{\partial^2\log\vartheta_5}{\partial\tau_{\varepsilon\varepsilon_1}^2}\right]$$

$$+\varkappa\left[\frac{\partial\log\vartheta_{23}}{\partial\tau_{\varepsilon\varepsilon_1}}+\frac{\partial\log\vartheta_{01}}{\partial\tau_{\varepsilon\varepsilon_1}}-\frac{\partial\log\vartheta_4}{\partial\tau_{\varepsilon\varepsilon_1}}-\frac{\partial\log\vartheta_5}{\partial\tau_{\varepsilon\varepsilon_1}}\right]^2,$$

und eine ähnliche Formel ergiebt sich für:

$$\frac{\partial^2\varkappa}{\partial\tau_{\varepsilon\varepsilon_1}.\partial\tau_{\eta\eta_1}}.$$

Dann aber folgt leicht:

$$(17)\quad a_{\varkappa 1} = \varkappa\Big[\frac{\partial^4 \log\vartheta_{23}(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^4} + \frac{\partial^4 \log\vartheta_{01}(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^4} - \frac{\partial^4 \log\vartheta_{4}(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^4}$$
$$- \frac{\partial^4 \log\vartheta_{5}(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^4} + 2\left(\frac{\partial^2 \log\vartheta_{23}(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^2}\right)^2$$
$$+ 2\left(\frac{\partial^2 \log\vartheta_{01}(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^2}\right)^2 - 2\left(\frac{\partial^2 \log\vartheta_{4}(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^2}\right)^2$$
$$- 2\left(\frac{\partial^2 \log\vartheta_{5}(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^2}\right)^2 + \Big(\frac{\partial^2 \log\vartheta_{23}(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 \log\vartheta_{01}(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^2}$$
$$- \frac{\partial^2 \log\vartheta_{4}(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^2} - \frac{\partial^2 \log\vartheta_{5}(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^2}\Big)^2\Big].$$

In ähnlicher Weise sind die übrigen unbekannten Gröfsen auszudrücken.

Unter Berücksichtigung der früher entwickelten Formeln ergeben sich die Resultate (18):

$$a_{\varkappa 1} = 4\varkappa.\varkappa_1^2\left(1 - 3\varkappa^2 + \lambda^2 - \mu^2 - 2\frac{\vartheta_5''(u_1)_0}{\vartheta_5}\right),$$

$$a_{\lambda 1} = 4\lambda.\lambda_1^2\left(1 - \varkappa^2 - \lambda^2 - \mu^2 - 2\frac{\vartheta_5''(u_1)_0}{\vartheta_5}\right),$$

$$a_{\varkappa 2} = 4\varkappa.\varkappa_1^2.\lambda^2.\mu^2\left(\lambda^2.\mu^2 - \mu^2.\varkappa^2 + \varkappa^2.\lambda^2 - 3\varkappa^2.\lambda^2.\mu^2 - 2\frac{\vartheta_5''(u_2)_0}{\vartheta_5}\right),$$

$$a_{\lambda 2} = 4\lambda.\lambda_1^2.\mu^2.\varkappa^2\left(\lambda^2.\mu^2 - \mu^2.\varkappa^2 + \varkappa^2.\lambda^2 - 3\varkappa^2.\lambda^2.\mu^2 - 2\frac{\vartheta_5''(u_2)_0}{\vartheta_5}\right),$$

$$b_{\varkappa 1} = 2\varkappa.\varkappa_1^2\Big(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda^2.\mu^2 - 4\mu^2.\varkappa^2 - 2\varkappa^2.\lambda^2 - \mu^4$$
$$- \frac{\vartheta_5''(u_1)_0}{\vartheta_5}(\lambda^2 + \mu^2) - 2\frac{\vartheta_5''(u_1, u_2)_0}{\vartheta_5}\Big),$$

$$b_{\lambda 1} = 2\lambda.\lambda_1^2\Big(\mu^2 + \varkappa^2 - \lambda^2.\mu^2 - 2\mu^2.\varkappa^2 - \varkappa^2.\lambda^2 - \varkappa^4 - \mu^4$$
$$- \frac{\vartheta_5''(u_1)_0}{\vartheta_5}(\varkappa^2 + \mu^2) - 2\frac{\vartheta_5''(u_1, u_2)_0}{\vartheta_5}\Big),$$

$$b_{\varkappa 2} = 2\varkappa.\varkappa_1^2\Big(\varkappa^2.\lambda^2.\mu^2 + \lambda^4.\mu^2 - \mu^4(\varkappa^2 - \lambda^2) - 2\varkappa^2.\lambda^2.\mu^2(\lambda^2 + 2\mu^2)$$
$$- \frac{\vartheta_5''(u_2)_0}{\vartheta_5}(\lambda^2 + \mu^2) - 2\frac{\vartheta_5''(u_1, u_2)_0}{\vartheta_5}.\lambda^2.\mu^2\Big),$$

$$b_{\lambda 2} = 2\lambda.\lambda_1^2\Big(2\varkappa^2.\lambda^2.\mu^2 - 2\varkappa^2.\lambda^2.\mu^2(\varkappa^2 + \mu^2) - 2\varkappa^4.\mu^4$$
$$- \frac{\vartheta_5''(u_2)_0}{\vartheta_5}(\varkappa^2 + \mu^2) - 2\frac{\vartheta_5''(u_1, u_2)_0}{\vartheta_5}.\mu^2.\varkappa^2\Big),$$

$$c_\varkappa = 4\varkappa.\varkappa_1^2(\lambda^2.\mu^2 - \mu^4.\varkappa^2 - 2\varkappa^2.\lambda^2.\mu^2) - 4\varkappa.\varkappa_1^2.\frac{\vartheta_5''(u_1, u_2)_0}{\vartheta_5}(\lambda^2 + \mu^2),$$

$$c_\lambda = 4\lambda\,.\,\lambda_1^2(\varkappa^2.\mu^2 - \varkappa^4.\mu^2 - \mu^4.\varkappa^2 - \varkappa^2.\lambda^2.\mu^2) - 4\lambda\,.\,\lambda_1^2\,.\,\frac{\vartheta_5''(u_1, u_2)_0}{\vartheta_5}(\mu^2 + \varkappa^2),$$

$$d_\varkappa = \varkappa\,.\,\varkappa_1^2(4\lambda^2.\mu^2 - \mu^2.\varkappa^2 + \varkappa^2.\lambda^2 - 2\lambda^4.\varkappa^2 + \lambda^4.\mu^2 - 4\mu^4.\varkappa^2 - \mu^4.\lambda^2 - 6\varkappa^2.\lambda^2.\mu^2) - 2\varkappa\,.\,\varkappa_1^2\left(\frac{\vartheta_5''(u_1)_0}{\vartheta_5}\cdot\lambda^2\cdot\mu^2 + \frac{\vartheta_5''(u_2)_0}{\vartheta_5} + \frac{\vartheta_5''(u_1, u_2)_0}{\vartheta_5}(\lambda^2 + \mu^2)\right),$$

$$d_\lambda = \lambda\,.\,\lambda_1^2(\lambda^2.\mu^2 + 2\mu^2.\varkappa^2 + \varkappa^2.\lambda^2 - 2\varkappa^2.\lambda^2.\mu^2 - 3\varkappa^4.\mu^2 - 3\varkappa^2.\mu^4 - 2\varkappa^4.\lambda^2 - 2\mu^4.\lambda^2) - 2\lambda\,.\,\lambda_1^2\left(\frac{\vartheta_5''(u_1)_0}{\vartheta_5}\cdot\mu^2.\varkappa^2 + \frac{\vartheta_5''(u_2)_0}{\vartheta_5} + \frac{\vartheta_5''(u_1, u_2)_0}{\vartheta_5}(\mu^2 + \varkappa^2)\right).$$

Die Gröſsen mit dem Index μ folgen aus den Gröſsen mit dem Index $\varkappa$ durch Vertauschung von $\varkappa$ und μ. In diesen Formeln befinden sich die Differentialquotienten der Funktion $\vartheta_5(v_1, v_2)$, genommen nach den Gröſsen u_1 und u_2 für die Nullwerte der Argumente. An ihrer Stelle können vermöge der früheren Betrachtungen unmittelbar die Differentialquotienten einer beliebigen Funktion $\vartheta_\alpha(v_1, v_2)$ eingeführt werden. Wir denken uns diese Operation wirklich ausgeführt, dann sind wir am Ziel. In der That, setzen wir in dem Formelsystem, welches wir zuletzt für die Gröſsen $\frac{\partial^4\vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^k\,.\,\partial u_2^l}$ gefunden haben, auf den linken Seiten die Werte ein, die sich aus den früheren Betrachtungen ergeben und ersetzen sodann die Ausdrücke $\frac{\partial^2\vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial u_s.\partial u_{s_1}}$ durch die Differentialquotienten nach den Gröſsen $\varkappa, \lambda, \mu$, was auch unmittelbar durchführbar ist, so erhalten wir die Differentialgleichungen, denen die zehn Funktionen ϑ_α Genüge leisten und zwar angesehen als Funktionen von $\varkappa, \lambda, \mu$, und damit die Lösung eines Theiles des gestellten Problems.

Für den Fall $\alpha = 5$ sollen die Differentialgleichungen wirklich aufgestellt werden. Wir wollen dazu unter den Gröſsen $a_{\varkappa 1}', b_{\varkappa 1}', c_\varkappa', \ldots$ Gröſsen verstehen, die aus den Gröſsen $a_{\varkappa 1}, b_{\varkappa 1}, c_\varkappa, \ldots$ durch Fortlassung der zweiten Differentialquotienten $\frac{\partial^2\vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^k.\partial u_2^l}$ entstehen, dann ergeben sich die Gleichungen (19):

$$2\sum\frac{\partial^2\vartheta_5}{\partial\varkappa^2}\cdot\varkappa^2.\varkappa_1^4+4\sum\frac{\partial^2\vartheta_5}{\partial\varkappa.\partial\lambda}\cdot\varkappa.\lambda.\varkappa_1^2.\lambda_1^2+\frac{1}{2}\sum\frac{\partial\vartheta_5}{\partial\varkappa},a_{k1}'$$
$$+\frac{2}{\vartheta_5}\Big[\sum\frac{\partial\vartheta_5}{\partial\varkappa}\cdot\varkappa.\varkappa_1^2\Big]^2$$
$$=\vartheta_5(\varkappa^2-\lambda^2+\mu^2+\lambda^2.\mu^2-\mu^2.\varkappa^2+\varkappa^2.\lambda^2-\varkappa^4-\mu^4),$$

$$2\sum\frac{\partial^2\vartheta_5}{\partial\varkappa^2}\cdot\varkappa^2.\varkappa_1^4.\lambda^4.\mu^4+4\sum\frac{\partial^2\vartheta_5}{\partial\varkappa.\partial\lambda}\cdot\varkappa^3.\lambda^3.\varkappa_1^2.\lambda_1^2.\mu^4$$
$$+\frac{1}{2}\sum\frac{\partial\vartheta_5}{\partial\varkappa}\cdot a_{k2}'+\frac{2}{\vartheta_5}\Big[\sum\frac{\partial\vartheta_5}{\partial\varkappa}\cdot\varkappa.\varkappa_1^2.\lambda^2.\mu^2\Big]^2$$
$$=\vartheta_5\varkappa^2.\mu^2(\lambda^2.\mu^2-\mu^2.\varkappa^2+\varkappa^2.\lambda^2-\lambda^4+\lambda^4.\varkappa^2+\lambda^4.\mu^2$$
$$-\varkappa^2.\lambda^2.\mu^2-\varkappa^2.\lambda^4.\mu^2),$$

$$\sum\frac{\partial^2\vartheta_5}{\partial\varkappa^2}\cdot\varkappa^2.\varkappa_1^4(\lambda^2+\mu^2)+\sum\frac{\partial^2\vartheta_5}{\partial\varkappa.\partial\lambda}\cdot\varkappa.\lambda.\varkappa_1^2.\lambda_1^2(\varkappa^2+\lambda^2+2\mu^2)$$
$$+\frac{1}{2}\sum\frac{\partial\vartheta_5}{\partial\varkappa}\cdot b_{\varkappa1}'+\frac{1}{\vartheta_5}\sum\frac{\partial\vartheta_5}{\partial\varkappa}\cdot\varkappa.\varkappa_1^2.\sum\frac{\partial\vartheta_5}{\partial\varkappa}\cdot\varkappa.\varkappa_1^2(\lambda^2+\mu^2)$$
$$=\vartheta_5.\varkappa^2.\mu^2(1-\varkappa^2+\lambda^2-\mu^2),$$

$$\sum\frac{\partial^2\vartheta_5}{\partial\varkappa^2}\cdot\varkappa^2.\varkappa_1^4.\lambda^2.\mu^2(\lambda^2+\mu^2)$$
$$+\sum\frac{\partial^2\vartheta_5}{\partial\varkappa.\partial\lambda}\cdot\varkappa.\lambda.\varkappa_1^2.\lambda_1^2.\mu^2(\lambda^2.\mu^2+\mu^2.\varkappa^2+2\varkappa^2.\lambda^2)$$
$$+\frac{1}{2}\sum\frac{\partial\vartheta_5}{\partial\varkappa}\cdot b_{\varkappa2}'$$
$$+\frac{1}{\vartheta_5}\sum\frac{\partial\vartheta_5}{\partial\varkappa}\cdot\varkappa.\varkappa_1^2.\lambda^2.\mu^2.\sum\frac{\partial\vartheta_5}{\partial\varkappa}\cdot\varkappa.\varkappa_1^2(\lambda^2+\mu^2)$$
$$=\vartheta_5.\varkappa^2.\mu^2(\lambda^2.\mu^2-\mu^2.\varkappa^2+\varkappa^2.\lambda^2-\varkappa^2.\lambda^2.\mu^2),$$

$$2\sum\frac{\partial^2\vartheta_5}{\partial\varkappa^2}\cdot\varkappa^2.\varkappa_1^4.\lambda^2.\mu^2+2\sum\frac{\partial^2\vartheta_5}{\partial\varkappa.\partial\lambda}\cdot\varkappa.\lambda.\varkappa_1^2.\lambda_1^2.\mu^2(\varkappa^2+\lambda^2)$$
$$+\frac{1}{2}\sum\frac{\partial\vartheta_5}{\partial\varkappa}\cdot c_\varkappa'+\frac{1}{\vartheta_5}\Big[\sum\frac{\partial\vartheta_5}{\partial\varkappa}\cdot\varkappa.\varkappa_1^2(\lambda^2+\mu^2)\Big]^2$$
$$-\frac{2}{\vartheta_5}\sum\frac{\partial\vartheta_5}{\partial\varkappa}\varkappa.\varkappa_1^2.\sum\frac{\partial\vartheta_5}{\partial\varkappa}\cdot\varkappa.\varkappa_1^2.\lambda^2.\mu^2=\vartheta_5.\varkappa^2.\mu^2(\lambda^2-\varkappa^2.\mu^2),$$

$$\sum\frac{\partial^2\vartheta_5}{\partial\varkappa^2}\cdot\varkappa^2.\varkappa_1^4(\lambda^2+\mu^2)^2+2\sum\frac{\partial^2\vartheta_5}{\partial\varkappa.\partial\lambda}\cdot\varkappa.\lambda.\varkappa_1^2.\lambda_1^2(\lambda^2+\mu^2)(\mu^2+\varkappa^2)$$
$$+\sum\frac{\partial\vartheta_5}{\partial\varkappa}\cdot d_\varkappa'+\frac{4}{\vartheta_5}\cdot\sum\frac{\partial\vartheta_5}{\partial\varkappa}\cdot\varkappa.\varkappa_1^2.\sum\frac{\partial\vartheta_5}{\partial\varkappa}\cdot\varkappa.\varkappa_1^2.\lambda^2.\mu^2$$
$$=2.\vartheta_5.\varkappa^2.\mu^2.(\lambda^2-\varkappa^2.\mu^2).$$

In ähnlicher Weise sind die Differentialgleichungen für die übrigen Thetafunktionen abzuleiten.

§ 30.*)

Ableitung von Differentialgleichungen, denen die Größen $\frac{\vartheta_\alpha'(v_\varepsilon)_0}{\vartheta_5}$ Genüge leisten.

Aufser den im vorigen Paragraphen abgeleiteten Gleichungen können noch andere entwickelt werden, die sich für die Folge von Bedeutung zeigen.

Wir setzen:

$$(1) \qquad \frac{\dfrac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\partial v_\varepsilon}}{\vartheta_5(v_1, v_2)} = \varphi_\alpha^\varepsilon(v_1, v_2)$$

und suchen nach Gleichungen, denen die Funktionen $\varphi_\alpha^\varepsilon(v_1, v_2)$ für die Nullwerte der Argumente v_1, v_2 als Funktionen von $\varkappa$, λ, μ betrachtet, Genüge leisten.

Es ist:

$$(2) \qquad s_\alpha \cdot \varphi_\alpha^\varepsilon(v_1, v_2) = \frac{\partial\, al_\alpha(u_1, u_2)}{\partial v_\varepsilon} + al_\alpha(u_1, u_2) \cdot \frac{\partial \log \vartheta_5(v_1, v_2)}{\partial v_\varepsilon},$$

wenn gesetzt wird:

$$s_\alpha = \frac{1}{\dfrac{\partial f_\alpha(u_1, u_2)_0}{\partial u_1} + \dfrac{\partial f_\alpha(u_1, u_2)_0}{\partial u_2}}; \text{ siehe § 19.}$$

Hieraus folgt für die Nullwerte der Argumente (3):

$$s_\alpha \cdot \frac{\partial^2 \varphi_\alpha^\varepsilon(v_1, v_2)_0}{\partial u_{\varepsilon_1}^2} = \frac{\partial^3 al_\alpha(u_1, u_2)_0}{\partial u_{\varepsilon_1}^2 . \partial v_\varepsilon} + 2\, \frac{\partial\, al_\alpha(u_1, u_2)_0}{\partial u_{\varepsilon_1}} \cdot \frac{\partial^2 \log \vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial u_{\varepsilon_1} . \partial v_\varepsilon},$$

$$s_\alpha \cdot \frac{\partial^2 \varphi_\alpha^\varepsilon(v_1, v_2)_0}{\partial u_1 . \partial u_2} = \frac{\partial^3 al_\alpha(u_1, u_2)_0}{\partial u_1 . \partial u_2 . \partial v_\varepsilon} + \frac{\partial\, al_\alpha(u_1, u_2)_0}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial^2 \log \vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial u_2 . \partial v_\varepsilon}$$
$$+ \frac{\partial\, al_\alpha(u_1, u_2)_0}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial^2 \log \vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial u_1 . \partial v_\varepsilon}.$$

Andrerseits folgt für die Nullwerte der Argumente ganz ähnlich, wie im vorigen Paragraphen:

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 \varphi_\alpha^\varepsilon(v_1, v_2)_0}{\partial v_{\varepsilon_1}^2} = 4\pi i\, \frac{\partial \varphi_\alpha^\varepsilon(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{\varepsilon_1 \varepsilon_1}},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_\alpha^\varepsilon(v_1, v_2)_0}{\partial v_1 . \partial v_2} = 2\pi i \cdot \frac{\partial \varphi_\alpha^\varepsilon(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{12}},$$

*) Cf. Krause: Crelle 98.

und somit ergeben sich die Beziehungen (5):

$$\frac{\partial^2 \varphi_\alpha^\varepsilon(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^2} = -2 \sum_\varkappa \frac{\partial \varphi_\alpha^\varepsilon(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa} \cdot \varkappa \cdot \varkappa_1^2,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_\alpha^\varepsilon(v_1, v_2)_0}{\partial u_1 . \partial u_2} = - \sum_\varkappa \frac{\partial \varphi_\alpha^\varepsilon(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa} \cdot \varkappa . \varkappa_1^2(\lambda^2 + \mu^2),$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_\alpha^\varepsilon(v_1, v_2)_0}{\partial u_2^2} = -2 \sum_\varkappa \frac{\partial \varphi_\alpha^\varepsilon(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa} \cdot \varkappa . \varkappa_1^2 . \lambda^2 . \mu^2.$$

Schon hieraus ergeben sich einige elegante Beziehungen. In der That, setzen wir α das eine Mal gleich 3, ein anderes Mal gleich 24 und vergleichen die beiden Ausdrücke, die sich für die Differentialquotienten von $\varphi_\alpha^\varepsilon(v_1, v_2)$ ergeben haben, so erhalten wir die Ausdrücke:

$$\begin{aligned}(6)\qquad & K_{1\varepsilon} . \frac{\partial^3 al_3(u_1, u_2)_0}{\partial u_1^3} + K_{2\varepsilon} . \frac{\partial^3 al_3(u_1, u_2)_0}{\partial u_1^2 . \partial u_2} \\ & = -2 . s_3 . \sum_\varkappa \frac{\partial \varphi_3^\varepsilon(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa} \cdot \varkappa . \varkappa_1^2, \\ & K_{1\varepsilon} . \frac{\partial^3 al_{24}(u_1, u_2)_0}{\partial u_1 . \partial u_2^2} + K_{2\varepsilon} . \frac{\partial^3 al_{24}(u_1, u_2)_0}{\partial u_2^3} \\ & = -2 . s_{24} . \sum_\varkappa \frac{\partial \varphi_{24}^\varepsilon(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa} \cdot \varkappa . \varkappa_1^2 . \lambda^2 . \mu^2,\end{aligned}$$

oder, da die Beziehungen bestehen:

$$\begin{aligned}(7)\qquad & \varphi_3^\varepsilon(v_1, v_2)_0 = K_{2\varepsilon} . \sqrt{\varkappa . \varkappa_1 . \mu . \mu_1 . \mu_\lambda . \lambda_\varkappa}, \\ & \varphi_{24}^\varepsilon(v_1, v_2)_0 = - K_{1\varepsilon} . \sqrt{\frac{\varkappa_1 . \mu_1 . \mu_\lambda . \lambda_\varkappa}{\lambda}},\end{aligned}$$

so ergeben sich die Gleichungen:

$$\begin{aligned}(8)\qquad & 2 \sqrt{\varkappa . \lambda . \mu} . \varphi_{24}^\varepsilon(v_1, v_2)_0 = 2 \sum_\varkappa \frac{\partial \varphi_3^\varepsilon(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa} \varkappa . \varkappa_1^2 \\ & \qquad + \varphi_3^\varepsilon(v_1, v_2)_0(\varkappa^2 + \mu^2), \\ & 2 \sqrt{\varkappa^3 . \lambda^3 . \mu^3} \cdot \varphi_3^\varepsilon(v_1, v_2)_0 = 2 \sum_\varkappa \frac{\partial \varphi_{24}^\varepsilon(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa} \varkappa . \varkappa_1^2 . \lambda^2 . \mu^2 \\ & \qquad + \varphi_{24}^\varepsilon(v_1, v_2)_0 . \mu^2 . \varkappa^2(1 + \lambda^2).\end{aligned}$$

Analog wie die zweiten Differentialquotienten können die vierten behandelt werden. Für die Nullwerte der Argumente ergiebt sich (9):

$$s_\alpha . \frac{\partial^4 \varphi_\alpha^\varepsilon(v_1, v_2)_0}{\partial u_{\varepsilon_1}^4} = \frac{\partial^5 al_\alpha(u_1, u_2)_0}{\partial u_{\varepsilon_1}^4 . \partial v_\varepsilon} + 4 \frac{\partial^3 al_\alpha(u_1, u_2)_0}{\partial u_{\varepsilon_1}^3} \cdot \frac{\partial^2 \log \vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial u_{\varepsilon_1} . \partial v_\varepsilon}$$
$$+ 4 \frac{\partial al_\alpha(u_1, u_2)_0}{\partial u_{\varepsilon_1}} \cdot \frac{\partial^4 \log \vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial u_{\varepsilon_1}^3 . \partial v_\varepsilon},$$

$$
\begin{aligned}
s_\alpha \cdot \frac{\partial^4 \varphi_\alpha^\varepsilon(v_1, v_2)_0}{\partial u_{\varepsilon_1}^3 . \partial u_{\varepsilon_1+1}} = \frac{\partial^5 al_\alpha(u_1, u_2)_0}{\partial u_{\varepsilon_1}^3 . \partial u_{\varepsilon_1+1} . \partial v_\varepsilon} &+ 3 \frac{\partial^3 al_\alpha(u_1, u_2)_0}{\partial u_{\varepsilon_1}^2 . \partial u_{\varepsilon_1+1}} \cdot \frac{\partial^2 \log \vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial u_{\varepsilon_1} . \partial v_\varepsilon} \\
&+ \frac{\partial^3 al_\alpha(u_1, u_2)_0}{\partial u_{\varepsilon_1}^3} \cdot \frac{\partial^2 \log \vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial u_{\varepsilon_1+1} . \partial v_\varepsilon} \\
&+ 3 \frac{\partial al_\alpha(u_1, u_2)_0}{\partial u_{\varepsilon_1}} \cdot \frac{\partial^4 \log \vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial u_{\varepsilon_1}^2 . \partial u_{\varepsilon_1+1} . \partial v_\varepsilon} \\
&+ \frac{\partial al_\alpha(u_1, u_2)_0}{\partial u_{\varepsilon_1+1}} \cdot \frac{\partial^4 \log \vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial u_{\varepsilon_1}^3 . \partial v_\varepsilon},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s_\alpha \cdot \frac{\partial^4 \varphi_\alpha^\varepsilon(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^2 . \partial u_2^2} = \frac{\partial^5 al_\alpha(u_1, u_2)_0}{\partial u_1^2 . \partial u_2^2 . \partial v_\varepsilon} &+ 2 \frac{\partial^3 al_\alpha(u_1, u_2)_0}{\partial u_1^2 . \partial u_2} \cdot \frac{\partial^2 \log \vartheta_5(v_1, v_2)}{\partial u_2 . \partial v_\varepsilon} \\
&+ 2 \frac{\partial^3 al_\alpha(u_1, u_2)_0}{\partial u_1 . \partial u_2^2} \cdot \frac{\partial^2 \log \vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial u_1 . \partial v_\varepsilon} \\
&+ 2 \frac{\partial al_\alpha(u_1, u_2)_0}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial^4 \log \vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial u_1 . \partial u_2^2 . \partial v_\varepsilon} \\
&+ 2 \frac{\partial al_\alpha(u_1, u_2)_0}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial^4 \log \vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^2 . \partial u_2 \, \partial v_\varepsilon}.
\end{aligned}
$$

In dem letzten Gleichungssystem können die Gröfsen

$$\frac{\partial^2 \log \vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial u_{\varepsilon_1} . \partial v_\varepsilon}$$

vermöge eines der früheren Gleichungssysteme ersetzt werden durch die zweiten Differentialquotienten von $\varphi_\alpha^\varepsilon(v_1, v_2)$ nach den Gröfsen u_{ε_1} und den Differentialquotienten von $al_\alpha(u_1, u_2)$ nach den Gröfsen u_{ε_1} und v_ε. Dabei ist:

$$\text{(10)} \qquad \frac{\partial^3 al_\alpha(u_1, u_2)_0}{\partial u_{\varepsilon_1}^2 . \partial v_\varepsilon} = K_{1\varepsilon} \cdot \frac{\partial^3 al_\alpha(u_1, u_2)_0}{\partial u_{\varepsilon_1}^2 . \partial u_1} + K_{2\varepsilon} \cdot \frac{\partial^3 al_\alpha(u_1 . u_2)_0}{\partial u_{\varepsilon_1}^2 . \partial u_2},$$

und in ähnlicher Weise sind sämtliche Differentialquotienten zu bilden, in denen eine Differerentiation nach v_ε zu nehmen ist.

Hieraus folgt, dafs die vierten Differentialquotienten der Funktion $\varphi_\alpha^\varepsilon(v_1, v_2)$ nach den Gröfsen u_1 und u_2 sich als lineare Funktionen der zweiten Differentialquotienten derselben Funktion $\varphi_\alpha^\varepsilon(v_1, v_2)$ und der beiden Gröfsen $K_{1\varepsilon}$ und $K_{2\varepsilon}$ darstellen lassen. Die Koefficienten sind von s_α abgesehen rationale Funktionen von $\varkappa^2$, λ^2, μ^2. Die Differentialquotienten sind hierbei für die Nullwerte der Argumente zu bilden.

Wir wollen für die Funktion $\varphi_{24}^\varepsilon(v_1, v_2)$ die Darstellung wirklich durchführen.

Nach einigen Rechnungen ergeben sich die Gleichungen (11):

$$s_{24}\cdot\frac{\partial^4\varphi_{24}^\varepsilon(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^4} - 2(2\varkappa^2-\lambda^2+2\mu^2-1)s_{24}\cdot\frac{\partial^2\varphi_{24}^\varepsilon(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^2}$$
$$= -K_{1\varepsilon}.\lambda_1^4,$$

$$s_{24}\cdot\frac{\partial^4\varphi_{24}^\varepsilon(v_1, v_2)_0}{\partial u_2^4} - 8\varkappa^2.\lambda^2.\mu^2.s_{24}\cdot\frac{\partial^2\varphi_{24}^\varepsilon(v_1, v_2)_0}{\partial u_1.\partial u_2}$$
$$= K_{1\varepsilon}.\varkappa^2.\mu^2(-4\lambda^2.\mu^2+5\mu^2.\varkappa^2-4\varkappa^2.\lambda^2-2\varkappa^2.\lambda^2.\mu^2$$
$$-4\varkappa^2.\lambda^4-4\mu^2.\lambda^4+5\varkappa^2.\lambda^4.\mu^2)$$
$$+4K_{2\varepsilon}.\varkappa^2.\lambda^2.\mu^2(-2\lambda^2.\mu^2+\mu^2.\varkappa^2-2\varkappa^2.\lambda^2$$
$$+\varkappa^2.\lambda^2.\mu^2),$$

$$s_{24}\cdot\frac{\partial^4\varphi_{24}^\varepsilon(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^3.\partial u_2} - 3\varkappa^2.\mu^2.s_{24}\cdot\frac{\partial^2\varphi_{24}^\varepsilon(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^2}$$
$$-(2\varkappa^2-\lambda^2+2\mu^2-1).s_{24}\cdot\frac{\partial^2\varphi_{24}^\varepsilon(v_1, v_2)_0}{\partial u_1.\partial u_2}$$
$$= -K_{1\varepsilon}.\varkappa^2.\mu^2(1+\lambda^2)-2K_{2\varepsilon}.\varkappa^2.\lambda^2.\mu^2,$$

$$s_{24}\cdot\frac{\partial^4\varphi_{24}^\varepsilon(v_1, v_2)_0}{\partial u_2^3.\partial u_1} - 3\varkappa^2.\mu^2.s_{24}\cdot\frac{\partial^2\varphi_{24}^\varepsilon(v_1, v_2)_0}{\partial u_1.\partial u_2}$$
$$-\varkappa^2.\lambda^2.\mu^2.s_{24}\cdot\frac{\partial^2\varphi_{24}^\varepsilon(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^2}$$
$$= 2K_{1\varepsilon}.\varkappa^2.\mu^2(-2\lambda^2.\mu^2+\mu^2.\varkappa^2-2\varkappa^2.\lambda^2+\varkappa^2.\lambda^2.\mu^2)$$
$$+2K_{2\varepsilon}.\varkappa^2.\lambda^2.\mu^2(-\varkappa^2-\lambda^2-\mu^2-\lambda^2.\mu^2$$
$$+2\mu^2.\varkappa^2-\varkappa^2.\lambda^2),$$

$$s_{24}\cdot\frac{\partial^4\varphi_{24}^\varepsilon(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^2.\partial u_2^2} - 4\varkappa^2.\mu^2.s_{24}\cdot\frac{\partial^2\varphi_{24}^\varepsilon(v_1, v_2)_0}{\partial u_1.\partial u_2}$$
$$-\varkappa^2.\mu^2(1+\lambda^2).\frac{\partial^2\varphi_{24}^\varepsilon(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^2}$$
$$= -4K_{1\varepsilon}.\varkappa^2.\lambda^2.\mu^2-2K_{2\varepsilon}.\varkappa^2.\lambda^2.\mu^2(1+\lambda^2).$$

Indessen läſst sich noch das Problem weiter reduzieren. In der That, die Gröſsen $K_{1\varepsilon}$ und $K_{2\varepsilon}$ können erstens durch die Gröſsen $\varphi_3^\varepsilon(v_1, v_2)_0$ und $\varphi_{24}^\varepsilon(v_1, v_2)_0$ ersetzt werden. Berücksichtigen wir ferner die Relationen, die zwischen $\varphi_3^\varepsilon(v_1, v_2)$ und $\varphi_{24}^\varepsilon(v_1, v_2)$ aufgestellt worden sind und ersetzen die zweiten Differentialquotienten der Funktionen $\varphi_{24}^\varepsilon(v_1, v_2)$ nach den Gröſsen u_1 und u_2 durch die ersten Differentialquotienten nach den Gröſsen $\varkappa$, λ, μ, so folgt der Satz:

Sämtliche vierten Differentialquotienten der Funktion $\varphi_{24}^\varepsilon(v_1, v_2)$ nach den Gröſsen u_1 und u_2 lassen sich als lineare Funktionen der Gröſse $\varphi_{24}^\varepsilon(v_1, v_2)$ und ihrer ersten Differentialquotienten nach den Gröſsen $\varkappa$, λ, μ darstellen. Die Koefficienten sind rationale Funk-

tionen von $\varkappa$, λ, μ. Die Differentialquotienten sind hierbei für die Nullwerte der Argumente v_1, v_2 zu bilden.

Die Ausdrücke selbst sind nach dem früheren unmittelbar herzustellen.

Wir wollen den letzten wirklich hinschreiben. Er nimmt die Gestalt an:

$$
(12) \quad \begin{aligned}
&\frac{\partial^4 \varphi_{24}^{\varepsilon}(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^2 . \partial u_2^2} + 4\varkappa^2 . \mu^2 . \sum \frac{\partial \varphi_{24}^{\varepsilon}(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa} . \varkappa . \varkappa_1^2(\lambda^2 + \mu^2) \\
&\qquad + 2\varkappa^2 . \mu^2(1 + \lambda^2) \sum \frac{\partial \varphi_{24}^{\varepsilon}(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa} . \varkappa . \varkappa_1^2 \\
&\qquad - 2(1 + \lambda^2) \sum \frac{\partial \varphi_{24}^{\varepsilon}(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa} . \varkappa . \varkappa_1^2 . \lambda^2 . \mu^2 \\
&\qquad = \varkappa^2 . \mu^2 (1 - \lambda^2)^2 . \varphi_{24}^{\varepsilon}(v_1, v_2)_0 .
\end{aligned}
$$

Das analoge gilt für die andern Funktionen.

Andrerseits ergiebt sich für die Nullwerte der Argumente ähnlich wie im vorigen Paragraphen (13):

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^4 \varphi_\alpha^{\varepsilon}(v_1, v_2)_0}{\partial v_{\varepsilon_1}^4} &= -16\pi^2 \Big(\frac{\partial^2 \varphi_\alpha^{\varepsilon}(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{\varepsilon_1 \varepsilon_1}^2} \\
&\qquad - 4 \frac{\partial \varphi_\alpha^{\varepsilon}(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{\varepsilon_1 \varepsilon_1}} . \frac{\partial \log \vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{\varepsilon_1 \varepsilon_1}} \Big), \\
\frac{\partial^4 \varphi_\alpha^{\varepsilon}(v_1, v_2)_0}{\partial v_{\varepsilon_1}^3 . \partial v_{\varepsilon_1+1}} &= -\ 8\pi^2 \Big(\frac{\partial^2 \varphi_\alpha^{\varepsilon}(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{\varepsilon_1 \varepsilon_1} . \partial \tau_{12}} \\
&\qquad - 2 \frac{\partial \varphi_\alpha^{\varepsilon}(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{\varepsilon_1 \varepsilon_1}} . \frac{\partial \log \vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{12}} \\
&\qquad - 2 \frac{\partial \varphi_\alpha^{\varepsilon}(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{12}} . \frac{\partial \log \vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{\varepsilon_1 \varepsilon_1}} \Big), \\
\frac{\partial^4 \varphi_\alpha^{\varepsilon}(v_1, v_2)_0}{\partial v_1^2 . \partial v_2^2} &= -16\pi^2 \Big(\frac{\partial^2 \varphi_\alpha^{\varepsilon}(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{11} . \partial \tau_{22}} \\
&\qquad - \frac{\partial \varphi_\alpha^{\varepsilon}(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{12}} . \frac{\partial \log \vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{12}} \Big) \\
&= -\ 4\pi^2 \Big(\frac{\partial^2 \varphi_\alpha^{\varepsilon}(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{12}^2} \\
&\qquad - 2 \frac{\partial \varphi_\alpha^{\varepsilon}(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{12}} . \frac{\partial \log \vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{12}} \\
&\qquad - 4 \frac{\partial \varphi_\alpha^{\varepsilon}(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{11}} . \frac{\partial \log \vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{22}} \\
&\qquad - 4 \frac{\partial \varphi_\alpha^{\varepsilon}(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{22}} . \frac{\partial \log \vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{11}} \Big).
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\partial^4 \varphi_\alpha^s(v_1, v_2)_0}{\partial u_{s_1}^4} = \sum_\varkappa \frac{\partial^2 \varphi_\alpha^s(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa^2} \left(\frac{\partial^2 \varkappa(v_1, v_2)_0}{\partial u_{s_1}^2}\right)^2$$

$$+ 2\sum_{\varkappa\lambda} \frac{\partial^2 \varphi_\alpha^s(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa . \partial \lambda} . \frac{\partial^2 \varkappa(v_1, v_2)_0}{\partial u_{s_1}^2} . \frac{\partial^2 \lambda(v_1, v_2)_0}{\partial u_{s_1}^2}$$

$$+ \sum_\varkappa a_{\varkappa s_1} \frac{\partial \varphi_\alpha^s(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa}$$

$$- 16 \sum_\varkappa \frac{\partial \varphi_\alpha^s(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa} . \varkappa . \varkappa_1^2 \sum_\varkappa \frac{\partial \log \vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa} . \varkappa . \varkappa_1^2,$$

oder also (14):

$$\frac{\partial^4 \varphi_\alpha^s(v_1, v_2)_0}{\partial u_{s_1}^4} = \sum_\varkappa \frac{\partial^2 \varphi_\alpha^s(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa^2} . \left(\frac{\partial^2 \varkappa(v_1, v_2)_0}{\partial u_{s_1}^2}\right)^2$$

$$+ 2\sum_{\varkappa\lambda} \frac{\partial^2 \varphi_\alpha^s(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa . \partial \lambda} . \frac{\partial^2 \varkappa(v_1, v_2)_0}{\partial u_{s_1}^2} . \frac{\partial^2 \lambda(v_1, v_2)_0}{\partial u_{s_1}^2}$$

$$+ \sum_\varkappa a_{\varkappa s_1}' . \frac{\partial \varphi_\alpha^s(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa} .$$

$s = 1, 2.$
$s_1 = 1, 2.$

Das analoge findet für alle vierten Differentialquotienten der Funktion $\varphi_\alpha^s(v_1, v_2)$ nach den Gröfsen u_{s_1} statt. Mit andern Worten, wir finden das Resultat:

Die vierten Differentialquotienten der Funktion $\varphi_\alpha^s(v_1, v_2)$ nach den Gröfsen u_{s_1} ergeben sich aus den entsprechenden der Gröfsen $\vartheta_\alpha(v_1, v_2)$, wenn an Stelle von $\vartheta_\alpha(v_1, v_2)$: $\varphi_\alpha^s(v_1, v_2)$, an Stelle von $a_{\varkappa s_1}$, $b_{\varkappa s_1}$, $c_\varkappa$, $d_\varkappa$ resp. gesetzt wird: $a_{\varkappa s_1}'$, $b_{\varkappa s_1}'$, $c_\varkappa'$, $d_\varkappa'$.

Hiermit sind wir aber am Ziele. Wir erhalten für die vierten Differentialquotienten einer jeden Funktion $\varphi_\alpha^s(v_1, v_2)$ zwei von einander verschiedene Ausdrücke. Die Gleichsetzung derselben ergiebt für eine jede der Funktionen $\varphi_\alpha^s(v_1, v_2)$ sechs von einander verschiedene Differentialgleichungen, bei denen als unabhängige Veränderliche die Gröfsen $\varkappa$, λ, μ auftreten. Für die Funktion $\varphi_{24}^s(v_1, v_2)$ z. B. ergiebt sich als eine der Differentialgleichungen:

$$(15) \qquad 4\sum_\varkappa \frac{\partial^2 \varphi_{24}^s(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa^2} . \varkappa^2 . \varkappa_1^4 . \lambda^2 . \mu^2$$

$$+ 4\sum_{\varkappa\lambda} \frac{\partial^2 \varphi_{24}^s(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa . \partial \lambda} . \varkappa . \lambda . \varkappa_1^2 . \lambda_1^2 . \mu^2 . (\varkappa^2 + \lambda^2)$$

$$+ 2\sum_\varkappa \frac{\partial \varphi_{24}^s(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa} . c_\varkappa^{(s)} = \mu^2 . \varkappa^2 . (1 - \lambda^2)^2 . \varphi_{24}^s(v_1, v_2)_0,$$

wobei gesetzt ist:

$$c_\varkappa^{(3)} = \varkappa . \varkappa_1^2 (\lambda^2 . \mu^2 + \mu^2 . \varkappa^2 - \varkappa^2 . \lambda^2 . \mu^2 - \lambda^4 . \mu^2),$$
$$c_\lambda^{(3)} = 2\lambda . \lambda_1^4 . \varkappa^2 . \mu^2 .$$

Ebenso einfach sind die andern Gleichungen abzuleiten.

§ 31.*)

Ableitung von Differentialgleichungen, denen die Gröfsen $K_{\varepsilon\varepsilon_1}$ Genüge leisten. Anwendung der linearen Transformation behufs Bestimmung der fehlenden Integrale.

Vermöge der Beziehungen, die zwischen den Gröfsen $K_{\varepsilon\varepsilon_1}$ und den im vorigen Paragraphen definierten Funktionen $\varphi_\alpha(v_1, v_2)$ bestehen, folgt, dafs auch die ersteren Gröfsen ihrerseits Differentialgleichungen Genüge leisten müssen. Es mögen die Zwischenrechnungen, die zur Aufstellung derselben führen, nicht völlig entwickelt werden, da sie durchaus elementarer Natur sind und zu Schwierigkeiten irgend welcher Art nicht Anlafs geben. Wir begnügen uns mit folgenden Bemerkungen.

Aus der Gleichung:

$$\varphi_{24}{}^\varepsilon(v_1, v_2)_0 = - K_{1\varepsilon} . \sqrt{\frac{\varkappa_1 . \mu_1 . \mu_\lambda . \lambda_\varkappa}{\lambda}}$$

ergeben sich die Relationen:

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{24}{}^\varepsilon(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa} &= \frac{a}{\varkappa_1^2 . \lambda_\varkappa^2} \left(2\varkappa_1^2 . \lambda_\varkappa^2 . \frac{\partial K_{1\varepsilon}}{\partial \varkappa} + \varkappa(1 - 2\varkappa^2 + \lambda^2) K_{1\varepsilon} \right), \\ \frac{\partial \varphi_{24}{}^\varepsilon(v_1, v_2)_0}{\partial \lambda} &= \frac{a}{\lambda . \lambda_\varkappa^2 . \mu_\lambda^2} \left(2\lambda . \lambda_\varkappa^2 . \mu_\lambda^2 . \frac{\partial K_{1\varepsilon}}{\partial \varkappa} + (\varkappa^2 . \mu^2 - \lambda^4) K_{1\varepsilon} \right). \end{aligned}$$

Der Differentialquotient nach μ entsteht aus dem Differentialquotienten nach $\varkappa$ durch Vertauschung von $\varkappa$ und μ. Ferner wird (2):

$$\frac{\partial^2 \varphi_{24}{}^\varepsilon(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa^2} = \frac{a}{\varkappa_1^2 . \lambda_\varkappa^2} \Bigg(2\varkappa_1^2 . \lambda_\varkappa^2 . \frac{\partial^2 K_{1\varepsilon}}{\partial \varkappa^2} + 2\varkappa . (1 - 2\varkappa^2 + \lambda^2) . \frac{\partial K_{1\varepsilon}}{\partial \varkappa}$$
$$+ \frac{(-\frac{1}{2}\varkappa^2 - \lambda^2 - \varkappa^4 - \lambda^4 + 5\varkappa^2 . \lambda^2 - \varkappa^4 . \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda^4 . \varkappa^2) K_{1\varepsilon}}{\varkappa_1^2 . \lambda_\varkappa^2} \Bigg),$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_{24}{}^\varepsilon(v_1, v_2)_0}{\partial \lambda^2} = \frac{a}{\lambda . \mu_\lambda^2 . \lambda_\varkappa^2} \Bigg(2\lambda . \mu_\lambda^2 . \lambda_\varkappa^2 . \frac{\partial^2 K_{1\varepsilon}}{\partial \lambda^2} + 2(\mu^2 . \varkappa^2 - \lambda^4) \frac{\partial K_{1\varepsilon}}{\partial \lambda}$$
$$+ \Bigg(\frac{(-\lambda^6 . \varkappa^2 - \lambda^6 . \mu^2 + 7\lambda^4 . \varkappa^2 . \mu^2 - \frac{1}{2}\lambda^8 - 3\lambda^2 . \mu^2 . \varkappa^4 - 3\varkappa^2 . \lambda^2 . \mu^4 + \frac{3}{2}\mu^4 . \varkappa^4) K_{1\varepsilon}}{\lambda . \lambda_\varkappa^2 . \mu_\lambda^2} \Bigg) \Bigg),$$

*) Cf. Krause: Crelle 95 und 98.

$$\frac{\partial^2 \varphi_{24}{}^{\varepsilon}(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa . \partial \mu} = \frac{a}{\varkappa_1{}^2 . \lambda_\varkappa{}^2}\Bigg(2\varkappa_1{}^2 . \lambda_\varkappa{}^2 \cdot \frac{\partial^2 K_{1\varepsilon}}{\partial \varkappa . \partial \mu} + \varkappa(1 - 2\varkappa^2 + \lambda^2) \cdot \frac{\partial K_{1\varepsilon}}{\partial \mu}$$

$$- \frac{\mu . \varkappa_1{}^2 . \lambda_\varkappa{}^2}{\mu_1{}^2 . \mu_\lambda{}^2}(1 - 2\mu^2 + \lambda^2)\frac{\partial K_{1\varepsilon}}{\partial \varkappa}$$

$$- \frac{\mu . \varkappa}{2} \frac{(1 - 2\mu^2 + \lambda^2)(1 - 2\varkappa^2 + \lambda^2) K_{1\varepsilon}}{\mu_1{}^2 . \mu_\lambda{}^2}\Bigg),$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_{24}(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa . \partial \lambda} = \frac{a}{\lambda . \mu_\lambda{}^2 . \lambda_\varkappa{}^2}\Bigg(2\lambda . \mu_\lambda{}^2 . \lambda_\varkappa{}^2 \cdot \frac{\partial^2 K_{1\varepsilon}}{\partial \varkappa . \partial \lambda} + (\varkappa^2 . \mu^2 - \lambda^4) \cdot \frac{\partial^2 K_{1\varepsilon}}{\partial \varkappa}$$

$$+ \frac{\lambda . \varkappa . \mu_\lambda{}^2 (1 - 2\varkappa^2 + \lambda^2)}{\varkappa_1{}^2} \cdot \frac{\partial K_{1\varepsilon}}{\partial \lambda}$$

$$\frac{+\varkappa(-2\mu^2.\lambda^2 + \frac{1}{2}\varkappa^2.\mu^2 + \frac{3}{2}\lambda^4 + \frac{5}{2}.\varkappa^2.\lambda^2.\mu^2 - \mu^2.\varkappa^4 - \varkappa^2.\lambda^4 - \frac{1}{2}\lambda^6)K_{1\varepsilon}}{\varkappa_1{}^2 . \lambda_\varkappa{}^2}\Bigg).$$

Dabei ist gesetzt:

$$a = -\frac{\sqrt{\varkappa_1 . \mu_1 . \mu_\lambda . \lambda_\varkappa}}{2\lambda^{\frac{1}{2}}}.$$

Für die Gröfse $K_{1\varepsilon}$ ergiebt sich dann als eine der sechs Differentialgleichungen:

$$(3) \qquad \sum\nolimits_\varkappa \frac{\partial^2 K_{1\varepsilon}}{\partial \varkappa} \cdot \varkappa_1{}^4 + \sum\nolimits_{\varkappa\lambda} \frac{\partial^2 K_{1\varepsilon}}{\partial \varkappa . \partial \lambda} \frac{\varkappa_1{}^2}{\varkappa} \cdot \frac{\lambda_1{}^2}{\lambda}(\varkappa^2 + \lambda^2)$$

$$+ \sum\nolimits_\varkappa \frac{\partial K_{1\varepsilon}}{\partial \varkappa} \cdot \frac{\varkappa_1{}^2}{\varkappa}(1 - 3\varkappa^2 - \lambda^2 - \mu^2) = (3 - \varkappa^2 - \lambda^2 - \mu^2)K_{1\varepsilon}.$$

Die übrigen fünf können analog aufgestellt werden. Wir wollen an an Stelle dieser sechs Gleichungen sofort sechs andere setzen, deren Form einfacher ist:

$$(\mu^2 - \lambda^2)\frac{\partial^2 K_{1\varepsilon}}{\partial \mu . \partial \lambda} = \lambda \cdot \frac{\partial K_{1\varepsilon}}{\partial \mu} - \mu \cdot \frac{\partial K_{1\varepsilon}}{\partial \lambda},$$

$$(\varkappa^2 - \mu^2)\frac{\partial^2 K_{1\varepsilon}}{\partial \varkappa . \partial \mu} = \mu \cdot \frac{\partial K_{1\varepsilon}}{\partial \varkappa} - \varkappa \cdot \frac{\partial K_{1\varepsilon}}{\partial \mu},$$

$$(\lambda^2 - \varkappa^2)\frac{\partial^2 K_{1\varepsilon}}{\partial \lambda . \partial \varkappa} = \varkappa \cdot \frac{\partial K_{1\varepsilon}}{\partial \lambda} - \lambda \cdot \frac{\partial K_{1\varepsilon}}{\partial \varkappa},$$

(4)

$$\varkappa_1{}^2 . \frac{\partial^2 K_{1\varepsilon}}{\partial \varkappa^2} = \left[\frac{\varkappa . \lambda_1{}^2}{\lambda^2 - \varkappa^2} + \frac{\varkappa . \mu_1{}^2}{\mu^2 - \varkappa^2} + \frac{1 + 3\varkappa^2}{\varkappa}\right]\frac{\partial K_{1\varepsilon}}{\partial \varkappa}$$

$$- \frac{\lambda . \lambda_1{}^2}{\lambda^2 - \varkappa^2} \cdot \frac{\partial K_{1\varepsilon}}{\partial \lambda} - \frac{\mu . \mu_1{}^2}{\mu^2 - \varkappa^2} \cdot \frac{\partial K_{1\varepsilon}}{\partial \mu} + K_{1\varepsilon},$$

$$\lambda_1^2 \cdot \frac{\partial^2 K_{1\varepsilon}}{\partial \lambda^2} = \left[\frac{\lambda.\mu_1^2}{\mu^2-\lambda^2} + \frac{\lambda.\varkappa_1^2}{\varkappa^2-\lambda^2} + \frac{1+3\lambda^2}{\lambda}\right]\frac{\partial K_{1\varepsilon}}{\partial \lambda}$$
$$-\frac{\mu.\mu_1^2}{\mu^2-\lambda^2}\cdot\frac{\partial K_{1\varepsilon}}{\partial \mu} - \frac{\varkappa.\varkappa_1^2}{\varkappa^2-\lambda^2}\cdot\frac{\partial K_{1\varepsilon}}{\partial \varkappa} + K_{1\varepsilon},$$
$$\mu_1^2 \cdot \frac{\partial^2 K_{1\varepsilon}}{\partial \mu^2} = \left[\frac{\mu.\varkappa_1^2}{\varkappa^2-\mu^2} + \frac{\mu.\lambda_1^2}{\lambda^2-\mu^2} + \frac{1+3\mu^2}{\mu}\right]\frac{\partial K_{1\varepsilon}}{\partial \mu}$$
$$-\frac{\varkappa.\varkappa_1^2}{\varkappa^2-\mu^2}\cdot\frac{\partial K_{1\varepsilon}}{\partial \varkappa} - \frac{\lambda.\lambda_1^2}{\lambda^2-\mu^2}\cdot\frac{\partial K_{1\varepsilon}}{\partial \lambda} + K_{1\varepsilon}.$$

Die drei letzten Gleichungen können auch ersetzt werden durch die Gleichung:

$$(5)\qquad \frac{\partial}{\partial \varkappa}\left[\varkappa_1^2.\varkappa.\frac{\partial K_{1\varepsilon}}{\partial \varkappa} + \lambda_1^2.\lambda\frac{\partial K_{1\varepsilon}}{\partial \lambda} + \mu_1^2.\mu\frac{\partial K_{1\varepsilon}}{\partial \mu} - (\lambda^2+\mu^2)K_{1\varepsilon}\right] = \varkappa.K_{1\varepsilon},$$

und zwei ähnliche, die aus ihr durch cyklische Vertauschung entstehen.

Ganz analog ergeben sich die Gleichungen:

$$(\mu^2-\lambda^2)\frac{\partial^2 K_{2\varepsilon}}{\partial \mu.\partial \lambda} = \lambda.\frac{\partial K_{2\varepsilon}}{\partial \mu} - \mu.\frac{\partial K_{2\varepsilon}}{\partial \lambda},$$
$$(\varkappa^2-\mu^2)\frac{\partial^2 K_{2\varepsilon}}{\partial \varkappa.\partial \mu} = \mu.\frac{\partial K_{2\varepsilon}}{\partial \varkappa} - \varkappa.\frac{\partial K_{2\varepsilon}}{\partial \mu},$$
$$(\lambda^2-\varkappa^2)\frac{\partial^2 K_{2\varepsilon}}{\partial \lambda.\partial \varkappa} = \varkappa.\frac{\partial K_{2\varepsilon}}{\partial \lambda} - \lambda.\frac{\partial K_{2\varepsilon}}{\partial \varkappa},$$

$$(6)\qquad \varkappa_1^2 \cdot \frac{\partial^2 K_{2\varepsilon}}{\partial \varkappa^2} = \left[\frac{\varkappa.\lambda_1^2}{\lambda^2-\varkappa^2} + \frac{\varkappa.\mu_1^2}{\mu^2-\varkappa^2} + \frac{5\varkappa^2-1}{\varkappa}\right]\frac{\partial K_{2\varepsilon}}{\partial \varkappa}$$
$$-\frac{\lambda.\lambda_1^2}{\lambda^2-\varkappa^2}\cdot\frac{\partial K_{2\varepsilon}}{\partial \lambda} - \frac{\mu.\mu_1^2}{\mu^2-\lambda^2}\cdot\frac{\partial K_{2\varepsilon}}{\partial \mu} + 3K_{2\varepsilon},$$
$$\lambda_1^2 \cdot \frac{\partial^2 K_{2\varepsilon}}{\partial \lambda^2} = \left[\frac{\lambda.\mu_1^2}{\mu^2-\lambda^2} + \frac{\lambda.\varkappa_1^2}{\varkappa^2-\lambda^2} + \frac{5\lambda^2-1}{\lambda}\right]\frac{\partial K_{2\varepsilon}}{\partial \lambda}$$
$$-\frac{\mu.\mu_1^2}{\mu^2-\lambda^2}\cdot\frac{\partial K_{2\varepsilon}}{\partial \mu} - \frac{\varkappa.\varkappa_1^2}{\varkappa^2-\mu^2}\cdot\frac{\partial K_{2\varepsilon}}{\partial \varkappa} + 3K_{2\varepsilon},$$
$$\mu_1^2 \cdot \frac{\partial^2 K_{2\varepsilon}}{\partial \mu^2} = \left[\frac{\mu.\varkappa_1^2}{\varkappa^2-\mu^2} + \frac{\mu.\lambda_1^2}{\lambda^2-\mu^2} + \frac{5\mu^2-1}{\mu}\right]\frac{\partial K_{2\varepsilon}}{\partial \mu}$$
$$-\frac{\varkappa.\varkappa_1^2}{\varkappa^2-\mu^2}\cdot\frac{\partial K_{2\varepsilon}}{\partial \varkappa} - \frac{\lambda.\lambda_1^2}{\lambda^2-\varkappa^2}\cdot\frac{dK_{2\varepsilon}}{\partial \lambda} + 3K_{2\varepsilon}.$$

Bei der Diskussion der soeben erhaltenen Gleichungssysteme zeigt sich die lineare Transformation von grosser Bedeutung.

Wenn eine lineare Transformation

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

die Funktion $\vartheta_\alpha(v_1, v_2)$ überführt in $\vartheta_\beta(v_1, v_2)$ von den verschiedenen Faktoren abgesehen oder also die Gleichung besteht:

$$\Pi_\alpha(v_1, v_2) = \eta . \vartheta_\beta(v_1, v_2), \tag{7}$$

so werden, wenn wir differenzieren und nach der Differentiation $v_1 = v_2 = 0$ setzen, wenn wir ferner die transformierten Thetafunktionen durch grofse Buchstaben bezeichnen, sich die Gleichungen ergeben:

$$\begin{aligned} \Theta_\alpha'(v_1')_0 &= \eta[(d_3 - a_3 . \tau_{11} - b_3 . \tau_{12})\vartheta_\beta'(v_1)_0 \\ &\quad + (c_3 - a_3 . \tau_{21} - b_3 . \tau_{22})\vartheta_\beta'(v_2)_0], \\ \Theta_\alpha'(v_2')_0 &= \eta[(d_2 - a_2 . \tau_{11} - b_2 . \tau_{12})\vartheta_\beta'(v_1)_0 \\ &\quad + (c_2 - a_2 . \tau_{21} - b_2 . \tau_{22})\vartheta_\beta'(v_2)_0]. \end{aligned} \tag{8}$$

Wir wollen nun wieder, wie schon früher, nur diejenigen linearen Transformationen in Betracht ziehen, die die Indices 24 und 3 ungeändert lassen. Von diesen greifen wir die Transformationen heraus

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Für dieselben gehen die Gröfsen $\varkappa$, λ, μ der Reihe nach über resp. in:

$$\frac{\mu}{\varkappa}, \frac{\lambda}{\varkappa}, \frac{1}{\varkappa}; \quad \frac{\mu}{\lambda}, \frac{\varkappa}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}; \quad \frac{\varkappa}{\mu}, \frac{\lambda}{\mu}, \frac{1}{\mu}.$$

Setzen wir nun:

$$\begin{aligned} K_{\varepsilon\varepsilon_1} &= f_{\varepsilon\varepsilon_1}(\varkappa, \lambda, \mu), \\ K_{11}' = K_{11} . \tau_{11} + K_{12} . \tau_{12}, &\quad K_{21}' = K_{21} . \tau_{11} + K_{22} . \tau_{12}, \\ K_{12}' = K_{11} . \tau_{12} + K_{12} . \tau_{22}, &\quad K_{22}' = K_{21} . \tau_{12} + K_{22} . \tau_{22}, \\ K_{\varepsilon\varepsilon_1}' &= f_{\varepsilon\varepsilon_1}'(\varkappa, \lambda, \mu), \end{aligned} \tag{19}$$

so folgt, dafs für die genannten drei Transformationen resp. je zwei der Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varkappa}\cdot f_{11}\left(\frac{\mu}{\varkappa},\frac{\lambda}{\varkappa},\frac{1}{\varkappa}\right) &= \alpha_1[f_{11}(\varkappa,\lambda,\mu)-f_{11}'(\varkappa,\lambda,\mu)\\
&\qquad + f_{12}'(\varkappa,\lambda,\mu)],\\
\frac{1}{\varkappa^3}\cdot f_{21}\left(\frac{\mu}{\varkappa},\frac{\lambda}{\varkappa},\frac{1}{\varkappa}\right) &= \alpha_2[f_{21}(\varkappa,\lambda,\mu)-f_{21}'(\varkappa,\lambda,\mu)\\
&\qquad + f_{22}'(\varkappa,\lambda,\mu)],\\
\frac{1}{\lambda}\cdot f_{11}\left(\frac{\mu}{\lambda},\frac{\varkappa}{\lambda},\frac{1}{\lambda}\right) &= \alpha_3[f_{11}(\varkappa,\lambda,\mu)-f_{11}'(\varkappa,\lambda,\mu)\\
&\qquad - f_{12}(\varkappa,\lambda,\mu)+f_{12}'(\varkappa,\lambda,\mu)],\\
\frac{1}{\lambda^3}\cdot f_{21}\left(\frac{\mu}{\lambda},\frac{\varkappa}{\lambda},\frac{1}{\lambda}\right) &= \alpha_4[f_{21}(\varkappa,\lambda,\mu)-f_{21}'(\varkappa,\lambda,\mu)\\
&\qquad - f_{22}(\varkappa,\lambda,\mu)+f_{22}'(\varkappa,\lambda,\mu)],\\
\frac{1}{\mu}\cdot f_{11}\left(\frac{\varkappa}{\mu},\frac{\lambda}{\mu},\frac{1}{\mu}\right) &= \alpha_5[f_{11}(\varkappa,\lambda,\mu)-f_{12}(\varkappa,\lambda,\mu)\\
&\qquad - f_{11}'(\varkappa,\lambda,\mu)],\\
\frac{1}{\mu^3}\cdot f_{21}\left(\frac{\varkappa}{\mu},\frac{\lambda}{\mu},\frac{1}{\mu}\right) &= \alpha_6[f_{21}(\varkappa,\lambda,\mu)-f_{22}(\varkappa,\lambda,\mu)\\
&\qquad - f_{21}'(\varkappa,\lambda,\mu)].
\end{aligned} \tag{10}$$

Die Gröſsen α bedeuten die positive oder negative Einheit.

Nun bleiben aber die Gleichungssysteme, die wir für die Gröſsen K_{11} und K_{21} gefunden haben, ungeändert, wenn an Stelle von

$$K_{11},\ K_{21},\ \varkappa,\ \lambda,\ \mu$$

der Reihe nach gesetzt wird:

$$\begin{gathered}
\frac{1}{\varkappa}\cdot K_{11},\ \frac{1}{\varkappa^3}\cdot K_{21},\ \frac{\mu}{\varkappa},\ \frac{\lambda}{\varkappa},\ \frac{1}{\varkappa};\\
\frac{1}{\lambda}\cdot K_{11},\ \frac{1}{\lambda^3}\cdot K_{21},\ \frac{\mu}{\lambda},\ \frac{\varkappa}{\lambda},\ \frac{1}{\lambda};\\
\frac{1}{\mu}\cdot K_{11},\ \frac{1}{\mu^3}\cdot K_{21},\ \frac{\varkappa}{\mu},\ \frac{\lambda}{\mu},\ \frac{1}{\mu}.
\end{gathered}$$

Hieraus folgt, daſs die vier Gröſsen:

$$K_{11},\ K_{12},\ K_{11}',\ K_{12}'$$

sämtlich Integrale des ersten Systems von 6 Differentialgleichungen, die Gröſsen

$$K_{21},\ K_{22},\ K_{21}',\ K_{22}'$$

dagegen Integrale des zweiten Systems sind, so daſs wir mit Hülfe der linearen Transformation die fehlenden Integrale unserer Gleichungssysteme gefunden haben.

§ 32.

Ableitung von Differentialgleichungen, denen die Gröfse K Genüge leistet.

Aus den Differentialgleichungen, die wir für die Gröfse ϑ_5 gefunden haben, lassen sich unmittelbar eine Reihe von Differentialgleichungen herleiten, denen die Gröfse K Genüge leistet, da zwischen diesen beiden Gröfsen die Relation besteht:

$$\pi . \vartheta_5 = \sqrt{\lambda . \lambda_1 . \mu_\varkappa . K.} \tag{1}$$

Durch Differenzieren ergiebt sich:

$$\pi \cdot \frac{\partial \vartheta_5}{\partial \varkappa} = \frac{\lambda . \lambda_1}{2\mu_\varkappa . \vartheta_5}\left(\mu_\varkappa^2 . \frac{\partial K}{\partial \varkappa} + \varkappa . K\right),$$

$$\pi \cdot \frac{\partial \vartheta_5}{\partial \lambda} = \frac{\mu_\varkappa}{2\lambda_1 . \vartheta_5}\left(\lambda . \lambda_1^2 . \frac{\partial K}{\partial \lambda} + (1 - 2\lambda^2) K\right),$$

$$\pi \cdot \frac{\partial^2 \vartheta_5}{\partial \varkappa^2} = \frac{\lambda . \lambda_1}{2\mu_\varkappa^3 . \vartheta_5}\left(\mu_\varkappa^4 . \frac{\partial^2 K}{\partial \varkappa^2} + 2\varkappa . \mu_\varkappa^2 . \frac{\partial K}{\partial \varkappa} - \mu^2 . K\right) - \frac{\lambda^2 . \lambda_1^2}{4\mu_\varkappa^2 . \vartheta_5^3}\left(\mu_\varkappa^2 . \frac{\partial K}{\partial \varkappa} + \varkappa . K\right)^2,$$

$$\begin{aligned} \pi \cdot \frac{\partial^2 \vartheta_5}{\partial \lambda^2} = \frac{\mu_\varkappa}{2\lambda_1^3 . \vartheta_5}\Big(\lambda . \lambda_1^4 . \frac{\partial^2 K}{\partial \lambda^2} &+ 2(1 - 2\lambda^2)\lambda_1^2 . \frac{\partial K}{\partial \lambda} \\ &+ (-3 + 2\lambda^2)\lambda . K\Big) \\ - \frac{\mu_\varkappa^2}{4\lambda_1^3 . \vartheta_5^3}\Big(\lambda . \lambda_1^2 . \frac{\partial K}{\partial \lambda} &+ (1 - 2\lambda^2) K\Big)^2, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \pi \cdot \frac{\partial^2 \vartheta_5}{\partial \varkappa . \partial \lambda} = \frac{1}{2\mu_\varkappa . \lambda_1 . \vartheta_5}\Big(\lambda . \lambda_1^2 . \mu_\varkappa^2 . \frac{\partial^2 K}{\partial \varkappa . \partial \lambda} &+ \varkappa . \lambda . \lambda_1^2 \frac{\partial K}{\partial \lambda} \\ + \mu_\varkappa^2 (1 - 2\lambda^2) \frac{\partial K}{\partial \varkappa} &+ \varkappa (1 - 2\lambda^2) K\Big) \\ - \frac{\lambda}{4\vartheta_5^3}\left(\mu_\varkappa^2 . \frac{\partial K}{\partial \varkappa} + \varkappa . K\right)\left(\lambda . \lambda_1^2 . \frac{\partial K}{\partial \lambda} + (1 - 2\lambda^2) K\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi \cdot \frac{\partial^2 \vartheta_5}{\partial \varkappa . \partial \mu} = \frac{\lambda . \lambda_1}{2\mu_\varkappa^3 . \vartheta_5} . \left(\mu_\varkappa^4 . \frac{\partial^2 K}{\partial \varkappa . \partial \mu} - \mu . \mu_\varkappa^2 . \frac{\partial K}{\partial \varkappa} + . \varkappa . \mu_\varkappa^2 . \frac{\partial K}{\partial \mu} + \varkappa . \mu . K\right) \\ - \frac{\lambda^2 . \lambda_1^2}{4\mu_\varkappa^2 . \vartheta_5^3}\left(\mu_\varkappa^2 . \frac{\partial K}{\partial \varkappa} + \varkappa . K\right)\left(\mu_\varkappa^2 . \frac{\partial K}{\partial \mu} - \mu . K\right). \end{aligned}$$

Die fehlenden Differentialquotienten entstehen aus den obigen durch Vertauschung von $\varkappa$ und μ.

Mithin ergeben sich für K die Differentialgleichungen (3):

$$\sum \frac{\partial^2 K}{\partial \varkappa^2} \cdot \varkappa^2 . \varkappa_1^4 + 2 \sum \frac{\partial^2 K}{\partial \varkappa . \partial \lambda} \cdot \varkappa . \lambda . \varkappa_1^2 . \lambda_1^2$$
$$+ \sum \frac{\partial K}{\partial \varkappa} \cdot \varkappa . \varkappa_1^2 (5 - 5\varkappa^2 - 3\lambda^2 - 3\mu^2)$$
$$= 4K(-1 + \Sigma(2\varkappa^2 - \varkappa^2 . \lambda^2 - \varkappa^4)),$$

$$\sum \frac{\partial^2 K}{\partial \varkappa^2} \cdot \varkappa_1^4 . \lambda^2 . \mu^2 + 2 \sum \frac{\partial^2 K}{\partial \varkappa . \partial \lambda} \cdot \varkappa . \lambda . \varkappa_1^2 . \lambda_1^2 . \mu^2$$
$$+ \sum \frac{\partial K}{\partial \varkappa} \cdot \frac{\varkappa_1^2}{\varkappa} (\lambda^2 . \mu^2 + \mu^2 . \varkappa^2 + \varkappa^2 . \lambda^2 - 9\varkappa^2 . \lambda^2 . \mu^2)$$
$$= 4K(-4\varkappa^2 . \lambda^2 . \mu^2 + \Sigma \varkappa^2 . \lambda^2),$$

$$\sum \frac{\partial^2 K}{\partial \varkappa^2} \cdot \varkappa^2 . \varkappa_1^4 (\lambda^2 + \mu^2) + \sum \frac{\partial^2 K}{\partial \varkappa . \partial \lambda} \varkappa . \lambda . \varkappa_1^2 . \lambda_1^2 (\varkappa^2 + \lambda^2 + 2\mu^2)$$
$$+ \sum \frac{\partial K}{\partial \varkappa} \cdot \varkappa . \varkappa_1^2 (\varkappa^2 + 4\lambda^2 + 4\mu^2 - 5\lambda^2 . \mu^2 - 6\mu^2 . \varkappa^2 - 6\varkappa^2 . \lambda^2 - 2\lambda^4 - 2\mu^4)$$
$$= 2K(-4\varkappa^2 . \lambda^2 . \mu^2 + \Sigma(-\varkappa^2 + 6\varkappa^2 . \lambda^2 - 3(\varkappa^2 . \lambda^4 + \lambda^2 . \varkappa^4) + \varkappa^4)),$$

$$\sum \frac{\partial^2 K}{\partial \varkappa^2} \cdot \varkappa^2 . \varkappa_1^4 . \lambda^2 . \mu^2 (\lambda^2 + \mu^2)$$
$$+ \sum \frac{\partial^2 K}{\partial \varkappa \, \partial \lambda} \cdot \varkappa . \lambda . \varkappa_1^2 . \lambda_1^2 . \mu^2 (\lambda^2 . \mu^2 + \mu^2 . \varkappa^2 + 2\varkappa^2 . \lambda^2)$$
$$+ \sum \frac{\partial K}{\partial \varkappa} \cdot \varkappa . \varkappa_1^2 . \lambda^2 . \mu^2 (3\varkappa^2 + 2\lambda^2 + 2\mu^2 - 3\lambda^2 . \mu^2 - 8\mu^2 . \varkappa^2 - 8\varkappa^2 . \lambda^2)$$
$$= 2K . \varkappa^2 . \lambda^2 . \mu^2 (-1 + \Sigma(5\varkappa^2 - 6\varkappa^2 . \lambda^2)),$$

$$2 \sum \frac{\partial^2 K}{\partial \varkappa^2} \cdot \varkappa^2 . \varkappa_1^4 . \lambda^2 . \mu^2 + 2 \sum \frac{\partial^2 K}{\partial \varkappa . \partial \lambda} \cdot \varkappa . \lambda . \varkappa_1^2 \lambda_1^2 . \mu^2 (\varkappa^2 + \lambda^2)$$
$$+ \sum \frac{\partial K}{\partial \varkappa} \cdot c_\varkappa''$$
$$- \frac{2}{K} \left(\sum \frac{\partial K}{\partial \varkappa} \cdot \varkappa . \varkappa_1^2 + K . m_1 \right) \cdot \left(\sum \frac{\partial K}{\partial \varkappa} \cdot \varkappa . \varkappa_1^2 . \lambda^2 . \mu^2 + K m_3 \right)$$
$$+ \frac{1}{2K} \left(\sum \frac{\partial K}{\partial \varkappa} \cdot \varkappa . \varkappa_1^2 (\lambda^2 + \mu^2) + K . m_2 \right)^2 = c,$$

$$\sum \frac{\partial^2 K}{\partial \varkappa^2} \cdot \varkappa^2 . \varkappa_1^4 (\lambda^2 + \mu^2)^2$$
$$+ \sum \frac{\partial^2 K}{\partial \varkappa . \partial \lambda} \varkappa . \lambda . \varkappa_1^2 . \lambda_1^2 (\lambda^2 + \mu^2)(\mu^2 + \varkappa^2) + \sum \frac{\partial K}{\partial \varkappa} d_\varkappa''$$
$$+ \frac{2}{K} \left(\sum \frac{\partial K}{\partial \varkappa} \cdot \varkappa . \varkappa_1^2 + K . m_1 \right) \left(\sum \frac{\partial K}{\partial \varkappa} \cdot \varkappa . \varkappa_1^2 . \lambda^2 . \mu^2 + K . m_3 \right)$$
$$- \frac{1}{2K} \left(\sum \frac{\partial K}{\partial \varkappa} \cdot \varkappa . \varkappa_1^2 (\lambda^2 + \mu^2) + K . m_2 \right)^2 = d.$$

Dabei ist gesetzt (4):

$$m_1 = 2 - \varkappa^2 - 2\lambda^2 - \mu^2, \quad m_3 = \varkappa^2 . \mu^2(1 - 3\lambda^2),$$

$$m_2 = \varkappa^2 + \lambda^2 + \mu^2 - 3\lambda^2 . \mu^2 - \mu^2 . \varkappa^2 - 3\varkappa^2 . \lambda^2,$$

$$c_\varkappa'' = 2\varkappa . \varkappa_1^2 . \mu^2(\varkappa^2 + 3\lambda^2 - \lambda^2 . \mu^2 - \mu^2 . \varkappa^2 - 6\varkappa^2 . \lambda^2 - 2\lambda^4),$$

$$c_\lambda'' = 4 . \lambda . \lambda_1^2 . \varkappa^2 . \mu^2(2 - \varkappa^2 - 3\lambda^2 - \mu^2),$$

$$c = 4\varkappa^2 . \mu^2(-1 + \varkappa^2 + 7\lambda^2 + \mu^2 - 3\lambda^2 . \mu^2 - \mu^2 . \varkappa^2 - 3\varkappa^2 . \lambda^2 - 3\lambda^4),$$

$$d_\varkappa'' = \varkappa . \varkappa_1^2(8\lambda^2 . \mu^2 + \mu^2 . \varkappa^2 + 3\varkappa^2 . \lambda^2 + 2\lambda^4 - 8\lambda^4 . \varkappa^2 - 5\lambda^4 . \mu^2$$
$$+ 2\mu^4 - 6\mu^4 . \varkappa^2 - 7\mu^4 . \lambda^2 - 14\varkappa^2 . \lambda^2 . \mu^2),$$

$$d_\lambda'' = \lambda . \lambda_1^2(3\lambda^2 . \mu^2 + 6\mu^2 . \varkappa^2 + 3\varkappa^2 . \lambda^2 + 2\varkappa^4 - 8\varkappa^4 . \lambda^2 - 5\varkappa^4 . \mu^2$$
$$+ 2\mu^4 - 5\mu^4 . \varkappa^2 - 8\mu^4 . \lambda^2 - 14\varkappa^2 . \lambda^2 . \mu^2),$$

$$d = 4(-\lambda^2 . \mu^2 - \varkappa^2 . \lambda^2 + 2\varkappa^4 . \lambda^2 + \varkappa^4 . \mu^2 + 2\varkappa^2 . \lambda^4 + 2\mu^2 . \lambda^4$$
$$+ \mu^4 . \varkappa^2 + 2\mu^4 . \lambda^2 + 8\varkappa^2 . \lambda^2 . \mu^2 - 3\lambda^4 . \mu^2 - 2\mu^4 . \varkappa^4$$
$$- 3\varkappa^4 . \lambda^4 - 4\varkappa^4 . \lambda^2 . \mu^2 - 4\lambda^4 . \varkappa^2 . \mu^2 - 4\mu^4 . \varkappa^2 . \lambda^2).$$

Die Indices, nach denen zu summieren ist, sind in dem Gleichungssysteme der Einfachheit halber fortgelassen worden, da es klar sein dürfte, wie dieselben in den einzelnen Fällen lauten.

Die vier ersten dieser Gleichungen zusammen mit derjenigen, die durch Summation der beiden letzten entsteht, können in eine einfachere Form gebracht werden. Nach einigen Rechnungen ergeben sich die Gleichungen (5):

$$\frac{\lambda . \lambda_1^2}{(\lambda^2 - \mu^2)^2}\left[(\mu^2 - \lambda^2)\frac{\partial^2 K}{\partial\lambda . \partial\mu} + \mu . \frac{\partial K}{\partial\lambda} - \lambda . \frac{\partial K}{\partial\mu}\right]$$
$$- \frac{\varkappa . \varkappa_1^2}{(\varkappa^2 - \mu^2)^2}\left[(\varkappa^2 - \mu^2)\frac{\partial^2 K}{\partial\mu . \partial\varkappa} + \varkappa . \frac{\partial K}{\partial\mu} - \mu . \frac{\partial K}{\partial\varkappa}\right]$$
$$= \frac{\mu}{\mu^2 - \varkappa^2 . \lambda^2 - \mu^2}\left[\varkappa . \varkappa_1^2 . \frac{\partial K}{\partial\varkappa} + \lambda . \lambda_1^2 . \frac{\partial K}{\partial\lambda} + \mu . \mu_1^2 . \frac{\partial K}{\partial\mu}\right.$$
$$\left. - 2(\varkappa^2 + \lambda^2 - 1)K\right] - \frac{\partial K}{\partial\mu},$$

$$\varkappa_1^2 . \frac{\partial^2 K}{\partial\varkappa^2} = \left(\frac{\varkappa . \lambda_1^2}{\lambda^2 - \varkappa^2} + \frac{\varkappa . \mu_1^2}{\mu^2 - \varkappa^2} + \frac{5\varkappa^2 - 1}{\varkappa}\right)\frac{\partial K}{\partial\varkappa}$$
$$- \frac{\lambda . \lambda_1^2}{\lambda^2 - \varkappa^2} . \frac{\partial K}{\partial\lambda} - \frac{\mu . \mu_1^2}{\mu^2 - \varkappa^2} . \frac{\partial K}{\partial\mu} + 4K,$$

und vier andere, die aus ihnen durch cyklische Vertauschung von $\varkappa$, λ, μ entstehen.

Bei diesen Gleichungen nun kann die lineare Transformation analog wie bei den im vorigen Paragraphen betrachteten angewandt werden.

Es zeigt sich dann, dafs die Integrale derselben lauten:

$$K_{11}\,.\,K_{22} - K_{12}\,.\,K_{21}, \quad K_{11}'\,.\,K_{22} - K_{12}\,.\,K_{21}',$$
$$K_{12}'\,.\,K_{22} - K_{12}\,.\,K_{22}', \quad K_{11}\,.\,K_{21}' - K_{11}'\,.\,K_{21},$$
$$K_{11}\,.\,K_{22}' - K_{12}'\,.\,K_{21}, \quad K_{11}'\,.\,K_{22}' - K_{12}'\,.\,K_{21}'.$$

§ 33.*)

Die Multiplikation der Thetafunktionen.

Das Problem der Multiplikation der Thetafunktionen lautet:

Es sollen die Gröfsen $\vartheta_\alpha(\!(nv)\!) = \vartheta_\alpha(nv_1, nv_2)$ durch die ursprünglichen Thetafunktionen dargestellt werden.

Man überzeugt sich leicht, dafs die gesuchten Gröfsen $\vartheta_\alpha(\!(nv)\!)$ sämtlich Thetafunktionen $n^{2\text{ter}}$ Ordnung sind, also bis auf eine gewisse Anzahl von Konstanten unmittelbar nach gegebenen Regeln durch die ursprünglichen Thetafunktionen darstellbar. Behufs der Konstantenbestimmung gehen wir zu den Betrachtungen des Paragraph 13 zurück, indem wir auch die dort gewählten Bezeichnungen a, b, c, d wieder aufnehmen. Aus dem Additionstheorem, wie es an dem genannten Orte entwickelt ist, folgt dann unmittelbar der

Lehrsatz.

Bilden die vier Funktionen $\vartheta_\alpha(\!(v)\!)$, $\vartheta_\beta(\!(v)\!)$, $\vartheta_\gamma(\!(v)\!)$, $\vartheta_\delta(\!(v)\!)$ ein beliebiges Göpelsches Quadrupel, ist ferner $\vartheta_\varepsilon(\!(v)\!)$ eine beliebige Thetafunktion, so ist für willkürliche ganze Zahlen m und n das Produkt:

$$\vartheta_\varepsilon((m+n)v_1,\ (m+n)v_2)\,.\,\vartheta_\varepsilon((m-n)v_1,\ (m-n)v_2)$$

eine ganze homogene Funktion $2(m^2+n^2)^{\text{ter}}$ Ordnung der Gröfsen $\vartheta_\alpha(\!(v)\!)$, $\vartheta_\beta(\!(v)\!)$, $\vartheta_\gamma(\!(v)\!)$, $\vartheta_\delta(\!(v)\!)$. Die Koefficienten setzen sich rational aus den Thetafunktionen für die Nullwerte der Argumente zusammen.

Wir spezialisieren und nehmen das Quadrupel:

$$\vartheta_0(\!(v)\!),\quad \vartheta_{12}(\!(v)\!),\quad \vartheta_{34}(\!(v)\!),\quad \vartheta_5(\!(v)\!).$$

Es ergiebt sich dann aus den in § 13 entwickelten Formeln unmittelbar die Gleichung:

---

*) Cf. Krause: Math. Annalen 17.

$$(1)\quad \vartheta_0 \cdot \vartheta_0((2v)) \cdot \prod_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} (\vartheta_0^2 + \varepsilon_1 \cdot \vartheta_{12}^2 + \varepsilon_2 \cdot \vartheta_{34}^2 + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \vartheta_5^2)$$
$$= a(\vartheta_0((v))^4 + \vartheta_{12}((v))^4 + \vartheta_{34}((v))^4 + \vartheta_5((v))^4)$$
$$+ 2b(\vartheta_0((v))^2 \cdot \vartheta_{12}((v))^2 + \vartheta_{34}((v))^2 \cdot \vartheta_5((v))^2)$$
$$+ 2c(\vartheta_0((v))^2 \cdot \vartheta_{34}((v))^2 + \vartheta_5((v))^2 \cdot \vartheta_{12}((v))^2)$$
$$+ 2d(\vartheta_0((v))^2 \cdot \vartheta_5((v))^2 + \vartheta_{12}((v))^2 \cdot \vartheta_{34}((v))^2).$$
$$\varepsilon_1, \varepsilon_2 = 1, -1.$$

Unter Berücksichtigung der Göpelschen biquadratischen Relation können wir diese Gleichung auch schreiben:

$$(2)\quad \vartheta_0((2v)) = \vartheta_0 \Big[\frac{\vartheta_0((v))^2 . \vartheta_{12}((v))^2 + \vartheta_{34}((v))^2 . \vartheta_5((v))^2}{\vartheta_0^2 . \vartheta_{12}^2 - \vartheta_{34}^2 . \vartheta_5^2}$$
$$+ \frac{\vartheta_0((v))^2 . \vartheta_{34}((v))^2 + \vartheta_5((v))^2 . \vartheta_{12}((v))^2}{\vartheta_0^2 . \vartheta_{34}^2 - \vartheta_5^2 . \vartheta_{12}^2}$$
$$+ \frac{\vartheta_0((v))^2 . \vartheta_5((v))^2 + \vartheta_{34}((v))^2 . \vartheta_{12}((v))^2}{\vartheta_0^2 . \vartheta_5^2 - \vartheta_{34}^2 . \vartheta_{12}^2} \Big]$$
$$- \frac{2a . \vartheta_{12} . \vartheta_{34} . \vartheta_5 . \vartheta_0((v)) . \vartheta_{12}((v)) . \vartheta_{34}((v)) . \vartheta_5((v))}{(\vartheta_0^2 . \vartheta_{12}^2 - \vartheta_{34}^2 . \vartheta_5^2)(\vartheta_0^2 . \vartheta_{34}^2 - \vartheta_5^2 . \vartheta_{12}^2)(\vartheta_0^2 . \vartheta_5^2 - \vartheta_{34}^2 . \vartheta_{12}^2)}.$$

Die Formeln für $\vartheta_{12}((2v))$, $\vartheta_{34}((2v))$, $\vartheta_5((2v))$ sind hieraus durch lineare Transformation zu erhalten. Die Formeln für die Multiplikation mit 3 gestalten sich komplizierter. Eine der einfachsten ist folgende.

Wir setzen:

$$(3)\quad \begin{aligned} B &= \vartheta_0((v))^2 \cdot \vartheta_{12}((v))^2 - \vartheta_{34}((v))^2 \cdot \vartheta_5((v))^2, \\ B' &= \vartheta_0((v))^4 + \vartheta_{12}((v))^4 - \vartheta_{34}((v))^4 - \vartheta_5((v))^4, \\ C &= \vartheta_0((v))^2 \cdot \vartheta_{34}((v))^2 - \vartheta_5((v))^2 \cdot \vartheta_{12}((v))^2, \\ C' &= \vartheta_0((v))^4 + \vartheta_{34}((v))^4 - \vartheta_5((v))^4 - \vartheta_{12}((v))^4, \\ D &= \vartheta_0((v))^2 \cdot \vartheta_5((v))^2 - \vartheta_{12}((v))^2 \cdot \vartheta_{34}((v))^2, \\ D' &= \vartheta_0((v))^4 + \vartheta_5((v))^4 - \vartheta_{12}((v))^4 - \vartheta_{34}((v))^4. \end{aligned}$$

Für die Nullwerte der Argumente möge an Stelle von

$$B,\ B',\ C,\ C',\ D,\ D'$$

gesetzt werden

$$B_0,\ B_0',\ C_0,\ C_0',\ D_0,\ D_0'.$$

Dann wird:

$$
(4)\quad \vartheta_0(\!(3v)\!)\,.\,\vartheta_0(\!(v)\!)\,.\prod_{\varepsilon_1,\,\varepsilon_2}(\vartheta_0^2+\varepsilon_1\,.\,\vartheta_{12}^2+\varepsilon_2\,.\,\vartheta_{34}^2+\varepsilon_1\,.\,\varepsilon_2\,.\,\vartheta_5^2)
$$

$$
\begin{aligned}
&=\vartheta_0(\!(v)\!)^2\Big[\prod_{\varepsilon_1,\,\varepsilon_2}(\vartheta_0(\!(v)\!)^2+\varepsilon_1\,.\,\vartheta_{12}(\!(v)\!)^2+\varepsilon_2\,.\,\vartheta_{34}(\!(v)\!)^2+\varepsilon_1\,.\,\varepsilon_2\,.\,\vartheta_5(\!(v)\!)^2)\\
&\qquad -4\,(\vartheta_{12}(\!(v)\!)^4\,.\,B'+\vartheta_{34}(\!(v)\!)^4\,.\,C'+\vartheta_5(\!(v)\!)^4\,.\,D')\\
&\qquad +16\,.\,\vartheta_0(\!(v)\!)^2\,.\,\vartheta_{12}(\!(v)\!)^2\,.\,\vartheta_{34}(\!(v)\!)^2\,.\,\vartheta_5(\!(v)\!)^2\Big]\\
&\quad +4\left[\frac{\vartheta_{12}(\!(v)\!)^2\,.\,B^2\,.\,B_0'}{B_0}+\frac{\vartheta_{34}(\!(v)\!)^2\,.\,C^2\,.\,C_0'}{C_0}+\frac{\vartheta_5(\!(v)\!)^2\,.\,D^2\,.\,D_0'}{D_0}\right]\\
&\quad -4\,.\,\vartheta_{12}(\!(v)\!)^2\,.\,\vartheta_{34}(\!(v)\!)^2\,.\,\vartheta_5(\!(v)\!)^2\,(\vartheta_0(\!(v)\!)^4+\vartheta_{34}(\!(v)\!)^4+\vartheta_{12}(\!(v)\!)^4+\vartheta_5(\!(v)\!)^4).\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \varepsilon_1,\,\varepsilon_2=+1,-1.
\end{aligned}
$$

Nehmen wir wiederum die Göpelsche biquadratische Relation mit hinzu, so folgt das Resultat, daſs auch die rechte Seite den Faktor $\vartheta_0(\!(v)\!)$ besitzt, so daſs $\vartheta_0(\!(3v)\!)$ eine ganze homogene Funktion neunter Ordnung der Gröſsen $\vartheta_0(\!(v)\!)$, $\vartheta_{12}(\!(v)\!)$, $\vartheta_{34}(\!(v)\!)$, $\vartheta_5(\!(v)\!)$ wird. Durch Substitution halber Perioden oder lineare Transformation können hieraus die Formeln für $\vartheta_{12}(\!(3v)\!)$, $\vartheta_{34}(\!(3v)\!)$, $\vartheta_5(\!(3v)\!)$ gewonnen werden.

Mit Hülfe weniger Schlüsse folgt hieraus der

Lehrsatz.

Ist n eine beliebige ganze Zahl, so lassen sich die vier Funktionen $\vartheta_0(\!(nv)\!)$, $\vartheta_{12}(\!(nv)\!)$, $\vartheta_{34}(\!(nv)\!)$, $\vartheta_5(\!(nv)\!)$ als ganze homogene Funktionen $n^{2\text{ter}}$ Ordnung der Gröſsen $\vartheta_0(\!(v)\!)$, $\vartheta_{12}(\!(v)\!)$, $\vartheta_{34}(\!(v)\!)$, $\vartheta_5(\!(v)\!)$ darstellen. Die Koefficienten setzen sich rational aus den vier Gröſsen ϑ_0, ϑ_{12}, ϑ_{34}, ϑ_5 zusammen.

Durch Anwendung der linearen Transformation ergeben sich die Resultate:

I. Die in dem vorigen Lehrsatz definierten Gleichungen bleiben richtig, wenn man links und rechts die Thetafunktionen mit den Indices 0, 12, 34, 5 resp. multipliziert mit 1, i^a, i^b, i^c, vorausgesetzt, daſs $a+b+c$ eine gerade Zahl ist.

II. Die in dem vorigen Lehrsatz definierten Gleichungen ändern sich nicht oder gehen in einander über, wenn man die Indices 0, 12, 34, 5 in ganz beliebiger Weise vertauscht.

Die Substitution halber Perioden ergiebt die Resultate:

I. Ist n eine ungerade Zahl, so ändern die vorhin definierten Gleichungen sich nicht, wenn an Stelle von:

$$\vartheta_0((nv)),\ \vartheta_{12}((nv)),\ \vartheta_{34}((nv)),\ \vartheta_5((nv)),\ \vartheta_0((v)),\ \vartheta_{12}((v)),\ \vartheta_{34}((v)),\ \vartheta_5((v))$$

resp. gesetzt wird:

$$\vartheta_{12}((nv)),\ \vartheta_0((nv)),\ \vartheta_5((nv)),\ \vartheta_{34}((nv)),\ \vartheta_{12}((v)),\ \vartheta_0((v)),\ \vartheta_5((v)),\ \vartheta_{34}((v)),$$
$$\vartheta_{34}((nv)),\ \vartheta_5((nv)),\ \vartheta_0((nv)),\ \vartheta_{12}((nv)),\ \vartheta_{34}((v)),\ \vartheta_5((v)),\ \vartheta_0((v)),\ \vartheta_{12}((v)),$$
$$\vartheta_5((nv)),\ \vartheta_{34}((nv)),\ \vartheta_{12}((nv)),\ \vartheta_0((nv)),\ \vartheta_5((v)),\ \vartheta_{34}((v)),\ \vartheta_{12}((v)),\ \vartheta_0((v)).$$

II. Ist dagegen n eine gerade Zahl, so bleiben die Gleichungen richtig, wenn man die Funktionen:

$$\vartheta_0((nv)),\ \vartheta_{12}((nv)),\ \vartheta_{34}((nv)),\ \vartheta_5((nv))$$

ungeändert läfst, dagegen an Stelle von:

$$\vartheta_0((v)),\ \vartheta_{12}((v)),\ \vartheta_{34}((v)),\ \vartheta_5((v))$$

resp. setzt:

$$\vartheta_{12}((v)),\ \vartheta_0((v)),\ \vartheta_5((v)),\ \vartheta_{34}((v)),$$
$$\vartheta_{34}((v)),\ \vartheta_5((v)),\ \vartheta_0((v)),\ \vartheta_{12}((v)),$$
$$\vartheta_5((v)),\ \vartheta_{34}((v)),\ \vartheta_{12}((v)),\ \vartheta_0((v)).$$

Ganz allgemein gilt der

Lehrsatz.

Bilden die geraden Thetafunktionen

$$\vartheta_\alpha((v)),\ \vartheta_\beta((v)),\ \vartheta_\gamma((v)),\ \vartheta_\delta((v))$$

ein Göpelsches Quadrupel, so sind die Funktionen

$$\vartheta_\alpha((nv)),\ \vartheta_\beta((nv)),\ \vartheta_\gamma((nv)),\ \vartheta_\delta((nv))$$

ganze homogene Funktionen $n^{2\text{ter}}$ Ordnung der Gröfsen

$$\vartheta_\alpha((v)),\ \vartheta_\beta((v)),\ \vartheta_\gamma((v)),\ \vartheta_\delta((v)),$$

deren Koefficienten rationale Funktionen der Gröfsen

$$\vartheta_\alpha,\quad \vartheta_\beta,\quad \vartheta_\gamma,\quad \vartheta_\delta$$

sind.

Für die Koefficienten ergeben sich ähnliche Beziehungen wie im speziellen Falle.

Durch Substitution halber Perioden erhalten wir den

Lehrsatz.

Bilden die beiden geraden Funktionen $\vartheta_\alpha((v))$, $\vartheta_\beta((v))$ mit den ungeraden Funktionen $\vartheta_\gamma((v))$, $\vartheta_\delta((v))$ ein Göpelsches Quadrupel und sind $\vartheta_{\alpha_1}((v))$, $\vartheta_{\beta_1}((v))$, $\vartheta_{\gamma_1}((v))$, $\vartheta_{\delta_1}((v))$ die vier geraden Funktionen, die aus ihnen durch Substitution halber Perioden entstanden sind, so sind für ein ungerades n die Funktionen $\vartheta_\alpha((nv))$, $\vartheta_\beta((nv))$, $\vartheta_\gamma((nv))$, $\vartheta_\delta((nv))$ homogene ganze

Funktionen $n^{2\text{ter}}$ Ordnung der Gröfsen

$$\vartheta_\alpha(\!(v)\!),\quad \vartheta_\beta(\!(v)\!),\quad \vartheta_\gamma(\!(v)\!),\quad \vartheta_\delta(\!(v)\!),$$

deren Koefficienten sich rational aus den Gröfsen

$$\vartheta_{\alpha_1},\quad \vartheta_{\beta_1},\quad \vartheta_{\gamma_1},\quad \vartheta_{\delta_1}$$

zusammensetzen lassen.

Die Aufstellung der Koefficientenbeziehungen kann auch hier füglich unterbleiben.

Ist n schliefslich eine gerade Zahl, im übrigen die Bedingungen des letzten Lehrsatzes erfüllt, so sind die Thetafunktionen

$$\vartheta_\alpha(\!(nv)\!),\quad \vartheta_\beta(\!(nv)\!),\quad \vartheta_\gamma(\!(nv)\!),\quad \vartheta_\delta(\!(nv)\!)$$

nach gegebenen Regeln durch die ursprünglichen darstellbar. Die Koefficienten sind rationale Funktionen der ursprünglichen Thetafunktionen für die Nullwerte der Argumente.

§ 34.*)

Die Multiplikation der σ- und der hyperelliptischen Funktionen.

Aus der Multiplikation der Thetafunktionen folgt unmittelbar die Multiplikation der σ-Funktionen und damit die der hyperelliptischen Funktionen. Die Aufgabe derselben ist es, die Funktionen $\sigma_\alpha(nu_1, nu_2)$ resp. $al_\alpha(nu_1, nu_2)$ durch die ursprünglichen darzustellen. Wir erhalten nun für die Multiplikation die nötigen Lehrsätze, wenn wir in den Formeln des vorigen Paragraphen an Stelle der ursprünglichen Thetafunktionen und der Thetafunktionen mit den Argumenten nv_1, nv_2 uns die ursprünglichen σ- resp. hyperelliptischen Funktionen und die σ- resp. hyperelliptischen Funktionen mit den Argumenten nu_1, nu_2 eingesetzt denken. Die Koefficienten werden dann rationale Funktionen der Gröfsen $\varkappa^2$, λ^2, μ^2. Einer jeden Koefficientenbeziehung, die sich bei den Thetafunktionen ergeben hat, entspricht dann auch eine unmittelbar anzugebende Beziehung bei den σ- und bei den hyperelliptischen Funktionen.

Überdies aber zeigt es sich, dafs interessante Rekursionsformeln stattfinden.

In der That, wir fanden die Beziehungen:

*) Cf. Krause, Mathematische Annalen 26.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\partial u_1^2} = -2 \sum^k \frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\partial \varkappa} \cdot \varkappa \cdot \varkappa_1^2, \\
(1) \qquad &\frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\partial u_1 . \partial u_2} = - \sum^k \frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\partial \varkappa} \cdot \varkappa . \varkappa_1^2 (\lambda^2 + \mu^2), \\
&\frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\partial u_2^2} = -2 \sum^k \frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\partial \varkappa} \cdot \varkappa . \varkappa_1^2 . \lambda^2 . \mu^2.
\end{aligned}
$$

In diesen Gleichungen ist die Summation nach $\varkappa$, λ, μ zu nehmen.

Wir setzen nun wie früher:

$$\vartheta_\alpha(v_1, v_2) = f_\alpha(u_1, u_2)$$

oder einfach:

$$(2) \qquad \vartheta_\alpha(v_1, v_2) = f_\alpha .$$

Die zu entwickelnden Formeln gelten einstweilen für alle Thetafunktionen. Wir wollen unter solchen Umständen den Index α zunächst fortlassen.

Nun ist:

$$\frac{\partial \vartheta(v_1, v_2)}{\partial \varkappa} = \frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial \varkappa} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial \varkappa} + \frac{\partial f}{\partial \varkappa},$$

oder also:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \vartheta(v_1, v_2)}{\partial \varkappa} &= \frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot \left(v_1 \cdot \frac{\partial K_{11}}{\partial k} + v_2 \cdot \frac{\partial K_{12}}{\partial \varkappa}\right) \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial u_2} \left(v_1 \cdot \frac{\partial K_{21}}{\partial \varkappa} + v_2 \cdot \frac{\partial K_{22}}{\partial \varkappa}\right) + \frac{\partial f}{\partial \varkappa} \\
&= \frac{1}{K} \cdot \frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot (u_1 . \varkappa_{11} + u_2 . \varkappa_{12}) \\
&\quad + \frac{1}{K} \cdot \frac{\partial f}{\partial u_2} (u_1 . \varkappa_{21} + u_2 . \varkappa_{22}) + \frac{\partial f}{\partial \varkappa} \\
&= \frac{1}{K} \cdot \sum_1^2 \frac{\partial f}{\partial u_\epsilon} (u_1 . \varkappa_{\epsilon 1} + u_2 . \varkappa_{\epsilon 2}) + \frac{\partial f}{\partial \varkappa} .
\end{aligned}
$$

Hierbei ist gesetzt:

$$\varkappa_{11} = K_{22} \cdot \frac{\partial K_{11}}{\partial \varkappa} - K_{21} \cdot \frac{\partial K_{12}}{\partial \varkappa}, \quad \varkappa_{12} = - K_{12} \cdot \frac{\partial K_{11}}{\partial \varkappa} + K_{11} \cdot \frac{\partial K_{12}}{\partial \varkappa},$$

$$\varkappa_{21} = K_{22} \cdot \frac{\partial K_{21}}{\partial \varkappa} - K_{21} \cdot \frac{\partial K_{22}}{\partial \varkappa}, \quad \varkappa_{22} = - K_{12} \cdot \frac{\partial K_{21}}{\partial \varkappa} + K_{11} \cdot \frac{\partial K_{22}}{\partial \varkappa} .$$

Demgemäfs erhalten wir folgende drei Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2} + \frac{2}{K}\cdot\sum_1^2{}^{\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial u_\varepsilon}\cdot\sum{}^{\varkappa}(u_1 . \varkappa_{\varepsilon 1} + u_2 . \varkappa_{\varepsilon 2})\,\varkappa . \varkappa_1^2$$
$$+ 2\sum{}^{\varkappa}\frac{\partial f}{\partial \varkappa}\cdot \varkappa . \varkappa_1^2 = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u_1 . \partial u_2} + \frac{1}{K}\cdot\sum_1^2{}^{\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial u_\varepsilon}\cdot\sum{}^{\varkappa}(u_1 . \varkappa_{\varepsilon 1} + u_2 . \varkappa_{\varepsilon 2})\varkappa . \varkappa_1^2(\lambda^2 + \mu^2)$$
$$(3) \qquad + \sum{}^{\varkappa}\frac{\partial f}{\partial \varkappa}\cdot \varkappa . \varkappa_1^2(\lambda^2 + \mu^2) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2} + \frac{2}{K}\cdot\sum_1^2{}^{\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial u_\varepsilon}\cdot\sum{}^{\varkappa}(u_1 . \varkappa_{\varepsilon 1} + u_2 . \varkappa_{\varepsilon 2})\varkappa . \varkappa_1^2 . \lambda^2 . \mu^2$$
$$+ 2\sum{}^{\varkappa}\frac{\partial f}{\partial \varkappa}\cdot \varkappa . \varkappa_1^2 . \lambda^2 . \mu^2 = 0.$$

Die Summe nach $\varkappa$ ist über $\varkappa$, λ, μ zu nehmen.

Wir nehmen jetzt ferner:

$$(4) \qquad \vartheta_\alpha(nv_1, nv_2) = f_\alpha(nv_1, nv_2) = F_\alpha.$$

Auch hier möge der Index α einstweilen fortgelassen werden. Dann leistet F den Gleichungen Genüge:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u_1^2} + \frac{2n^2}{K}\cdot\sum_1^2{}^{\varepsilon}\frac{\partial F}{\partial u_\varepsilon}\cdot\sum{}^{\varkappa}(u_1 . \varkappa_{\varepsilon 1} + u_2 . \varkappa_{\varepsilon 2})\varkappa . \varkappa_1^2$$
$$+ 2n^2\sum{}^{\varkappa}\frac{\partial F}{\partial \varkappa}\cdot \varkappa . \varkappa_1^2 = 0,$$

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial u_1 . \partial u_2} + \frac{n^2}{K}\cdot\sum_1^2{}^{\varepsilon}\frac{\partial F}{\partial u_\varepsilon}\cdot\sum{}^{\varkappa}(u_1 . \varkappa_{\varepsilon 1} + u_2 . \varkappa_{\varepsilon 2})\varkappa . \varkappa_1^2(\lambda^2 + \mu^2)$$
$$+ n^2\sum{}^{\varkappa}\frac{\partial F}{\partial \varkappa}\cdot \varkappa . \varkappa_1^2(\lambda^2 + \mu^2) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u_2^2} + \frac{2n^2}{K}\cdot\sum_1^2{}^{\varepsilon}\frac{\partial F}{\partial u_\varepsilon}\cdot\sum{}^{\varkappa}(u_1 . \varkappa_{\varepsilon 1} + u_2 . \varkappa_{\varepsilon 2})\varkappa . \varkappa_1^2 . \lambda^2 . \mu^2$$
$$+ 2n^2\sum{}^{\varkappa}\frac{\partial F}{\partial \varkappa}\, \varkappa . \varkappa_1^2 . \lambda^2 . \mu^2 = 0.$$

Wir wollen uns zunächst mit der Transformation der ersten dieser drei Gleichungen beschäftigen. Dieselbe kann in die Form gebracht werden:

$$(6)\quad \frac{\partial^2 \log F}{\partial u_1^2} + \left(\frac{\partial \log F}{\partial u_1}\right)^2 + \frac{2n^2}{K}\sum_1^2{}^{\varepsilon} \frac{\partial \log F}{\partial u_\varepsilon} \cdot \sum{}^{\varkappa}(u_1 . \varkappa_{\varepsilon 1} + u_2 . \varkappa_{\varepsilon 2})\varkappa . \varkappa_1^2$$
$$+ 2n^2 \sum{}^{\varkappa} \frac{\partial \log F}{\partial \varkappa} \cdot \varkappa . \varkappa_1^2 = 0,$$

denn es ist:

$$\frac{\partial^2 \log F}{\partial u_1^2} + \left(\frac{\partial \log F}{\partial u_1}\right)^2 = \frac{1}{F} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u_1^2}.$$

Genau so folgt für f die Gleichung:

$$(7)\quad \frac{\partial^2 \log f}{\partial u_1^2} + \left(\frac{\partial \log f}{\partial u_1}\right)^2 + \frac{2}{K}\sum_1^2{}^{\varepsilon} \frac{\partial \log f}{\partial u_\varepsilon} \sum{}^{\varkappa}(u_1 . \varkappa_{\varepsilon 1} + u_2 \cdot \varkappa_{\varepsilon 2})\varkappa . \varkappa_1^2$$
$$+ 2 \sum{}^{\varkappa} \frac{\partial \log f}{\partial \varkappa} \cdot \varkappa . \varkappa_1^2 = 0.$$

Wir setzen nun:

$$(8)\qquad W_\alpha = \frac{F_\alpha}{f_\alpha^{n^2}}$$

und lassen einstweilen den Index α fort, dann erhalten wir für W die Gleichung:

$$(9)\quad \frac{\partial^2 W}{\partial u_1^2} + 2n^2 \cdot \frac{\partial W}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \log f}{\partial u_1}$$
$$+ \frac{2n^2}{K} \cdot \sum_1^2{}^{\varepsilon} \frac{\partial W}{\partial u_\varepsilon} \cdot \sum{}^{\varkappa}(u_1 . \varkappa_{\varepsilon 1} + u_2 . \varkappa_{\varepsilon 2})\varkappa . \varkappa_1^2$$
$$+ 2n^2 \sum{}^{\varkappa} \frac{\partial W}{\partial \varkappa} \cdot \varkappa . \varkappa_1^2 + n^2(1 - n^2) . W \cdot \frac{\partial^2 \log f}{\partial u_1^2} = 0$$

Wir wollen jetzt unter $\vartheta_\alpha(v_1, v_2)$, $\vartheta_\beta(v_1, v_2)$, $\vartheta_\gamma(v_1, v_2)$, $\vartheta_\delta(v_1, v_2)$ vier Thetafunktionen verstehen, die ein Göpelches Quadrupel bilden und setzen:

$$(10)\qquad x_1 = \frac{f_\beta}{f_\alpha},\quad x_2 = \frac{f_\gamma}{f_\alpha},\quad x_3 = \frac{f_\delta}{f_\alpha}.$$

Es kann dann W als Funktion von x_1, x_2, x_3, $\varkappa$, λ, μ angesehen werden, und zwar wird:

$$\frac{\partial W}{\partial u_\varepsilon} = \sum{}^{r} \frac{\partial W}{\partial x_r} \cdot \frac{\partial x_r}{\partial u_\varepsilon},\quad \frac{\partial W}{\partial \varkappa} = \left(\frac{\partial W}{\partial \varkappa}\right) + \sum{}^{r} \frac{\partial W}{\partial x_r} \cdot \frac{\partial x_r}{\partial \varkappa},$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u_1^2} = \sum{}^{r} \frac{\partial^2 W}{\partial x_r^2} \cdot \left(\frac{\partial x_r}{\partial u_1}\right)^2 + 2\sum \frac{\partial^2 W}{\partial x_r . \partial x_s} \cdot \frac{\partial x_r}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial x_s}{\partial u_1}$$
$$+ \sum{}^{r} \left(\frac{\partial W}{\partial x_r}\right) \cdot \frac{\partial^2 x_r}{\partial u_1^2}.$$

Führen wir den Index α ein, so nimmt die Gleichung für W_α die Form an:

$$\begin{aligned}(11)\quad &\sum^r \frac{\partial^2 W_\alpha}{\partial x_r^2}\cdot\left(\frac{\partial x_r}{\partial u_1}\right)^2 + 2\sum \frac{\partial^2 W_\alpha}{\partial x_r.\partial x_s}\cdot\frac{\partial x_r}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial x_s}{\partial u_1}\\ &+ 2n^2\sum^\varkappa \frac{\partial W_\alpha}{\partial \varkappa}\varkappa.\varkappa_1^2 + n^2(1-n^2).\ W_\alpha\cdot\frac{\partial^2 \log f_\alpha}{\partial u_1^2}\\ &+\sum^r \frac{\partial W_\alpha}{\partial x_r}\left[\frac{\partial^2 x_r}{\partial u_1^2} + 2n^2\cdot\frac{\partial \log f_\alpha}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial x_r}{\partial u_1}\right.\\ &\qquad + \frac{2n^2}{K}\sum_1^{2}{}^{\varepsilon} \frac{\partial x_r}{\partial u_\varepsilon}\cdot\sum^\varkappa(u_1.\varkappa_{\varepsilon 1}+u_2.\varkappa_{\varepsilon 2})\varkappa.\varkappa_1^2\\ &\qquad\qquad \left. + 2n^2\sum^\varkappa \frac{\partial x_r}{\partial \varkappa}\cdot\varkappa\cdot\varkappa_1^2\right] = 0.\end{aligned}$$

Aus der Gleichung, welcher die Gröfsen f_α, f_β, f_γ, f_δ Genüge leisten, folgt unmittelbar die Beziehung:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 \log x_1}{\partial u_1^2} + \left(\frac{\partial \log f_\beta}{\partial u_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial \log f_\alpha}{\partial u_1}\right)^2\\ &\quad + \frac{2}{K}\sum_1^{2}{}^{\varepsilon} \frac{\partial \log x_1}{\partial u_\varepsilon}\cdot\sum^\varkappa(u_1.\varkappa_{\varepsilon 1}+u_2\cdot\varkappa_{\varepsilon 2})\varkappa.\varkappa_1^2\\ &\quad + 2\sum^\varkappa \frac{\partial \log x_1}{\partial \varkappa}\cdot\varkappa.\varkappa_1^2 = 0,\end{aligned}$$

oder also:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 \log x_1}{\partial u_1^2} + \left(\frac{\partial \log x_1}{\partial u_1}\right)^2 + 2\frac{\partial \log f_\alpha}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial \log x_1}{\partial u_1}\\ &\quad + \frac{2}{K}\sum_1^{2}{}^{\varepsilon} \frac{\partial \log x_1}{\partial u_\varepsilon}\sum^\varkappa(u_1.\varkappa_{\varepsilon 1}+u_2.\varkappa_{\varepsilon 2})\varkappa.\varkappa_1^2\\ &\quad + 2\sum^\varkappa \frac{\partial \log x_1}{\partial \varkappa}.\varkappa.\varkappa_1^2 = 0,\end{aligned}$$

oder also:

$$\begin{aligned}(12)\quad &\frac{\partial^2 x_1}{\partial u_1^2} + 2\frac{\partial \log f_\alpha}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial u_1}\\ &+ \frac{2}{K}\cdot\sum^\varepsilon \frac{\partial x_1}{\partial u_\varepsilon}\cdot\sum^\varkappa(u_1.\varkappa_{\varepsilon 1}+u_2.\varkappa_{\varepsilon 2})\varkappa.\varkappa_1^2\\ &+ 2\sum^\varkappa \frac{\partial x_1}{\partial \varkappa}\cdot\varkappa.\varkappa_1^2 = 0.\end{aligned}$$

Die analogen Gleichungen gelten für x_2 und x_3.

Berücksichtigen wir diese Gleichungen, so nimmt die Gleichung für W_α die Form an:

$$\sum_r \frac{\partial^2 W_\alpha}{\partial x_r^2}\left(\frac{\partial x_r}{\partial u_1}\right)^2 - 2\sum \frac{\partial^2 W_\alpha}{\partial x_r . \partial x_s}\cdot\frac{\partial x_r}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial x_s}{\partial u_1}$$
$$+\sum_r \frac{\partial W_\alpha}{\partial x_r}(1-n^2)\frac{\partial^2 x_r}{\partial u_1^2} + 2n^2\sum_\varkappa \frac{\partial W_\alpha}{\partial \varkappa}\cdot\varkappa\cdot\varkappa_1^2$$
$$+ n^2(1-n^2)\, W_\alpha \cdot \frac{\partial^2 \log f_\alpha}{\partial u_1^2} = 0.$$

Genau so ergeben sich die Gleichungen:

$$\sum_r \frac{\partial^2 W_\alpha}{\partial x_r^2}\cdot\frac{\partial x_r}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial x_r}{\partial u_2} + \sum \frac{\partial^2 W_\alpha}{\partial x_r . \partial x_s}\left(\frac{\partial x_r}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial x_s}{\partial u_2} + \frac{\partial x_r}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial x_s}{\partial u_1}\right)$$
$$+\sum_r \frac{\partial W_\alpha}{\partial x_r}(1-n^2)\cdot\frac{\partial^2 x_r}{\partial u_1 . \partial u_2}$$
$$+ n^2\sum_\varkappa \frac{\partial W_\alpha}{\partial \varkappa}\cdot\varkappa\cdot\varkappa_1^2(\lambda^2+\mu^2)$$
$$+ n^2(1-n^2)\, W_\alpha\cdot\frac{\partial^2 \log f_\alpha}{\partial u_1 . \partial u_2} = 0,$$

$$\sum_r \frac{\partial^2 W_\alpha}{\partial x_r^2}\cdot\left(\frac{\partial x_r}{\partial u_2}\right)^2 + \sum \frac{\partial^2 W_\alpha}{\partial x_r . \partial x_s}\cdot\frac{\partial x_r}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial x_s}{\partial u_2}$$
$$+\sum_r \frac{\partial W_\alpha}{\partial x_r}(1-n^2)\cdot\frac{\partial^2 x_r}{\partial u_2^2} + 2n\sum_\varkappa \frac{\partial W_\alpha}{\partial \varkappa}\cdot\varkappa\,.\,\varkappa_1^2\,.\,\lambda^2\,.\,\mu^2$$
$$+ n^2 . (1-n^2) . W_\alpha\cdot\frac{\partial^2 \log f_\alpha}{\partial u_2^2} = 0.$$

Es mögen dieses die Gleichungen (13) sein.

Diesen drei Gleichungen leistet die Funktion Genüge:

$$W_\alpha = \frac{f_\alpha(nu_1, nu_2)}{f_\alpha(u_1, u_2)^{n^2}}.$$

Dieselben erhalten eine bessere Form, wenn wir

$$Z_\alpha = W_\alpha \,.\, \vartheta_\alpha^{n^2-1}$$

setzen, d. h.

$$Z_\alpha = \frac{\sigma_\alpha(nu_1, nu_2)}{\sigma_\alpha(u_1, u_2)^{n^2}}. \tag{14}$$

Zu dem Behuf setzen wir:

$$\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial u_s^2} = \frac{1}{\vartheta_\alpha}\left(\frac{\partial^2\vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\partial u_s^2}\right)_{v_1=v_2=0} + f_{ss}^\alpha,$$
$$\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial u_1 . \partial u_2} = \frac{1}{\vartheta_\alpha}\left(\frac{\partial^2\vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\partial u_1 . \partial u_2}\right)_{v_1=v_2=0} + f_{12}^\alpha. \tag{15}$$

Es ist nun:

$$\frac{\partial W_\alpha}{\partial \varkappa} = \frac{\partial Z_\alpha}{\partial \varkappa} \cdot \frac{1}{\vartheta_\alpha^{n-1}} + (1-n^2) Z_\alpha \cdot \frac{1}{\vartheta_\alpha^{n^2}} \cdot \frac{\partial \vartheta_\alpha}{\partial \varkappa},$$

und ähnliche Gleichungen ergeben sich für λ und μ. Nun gelten die zuerst in diesem Paragraphen aufgestellten Gleichungen für alle Werte von v_1 und v_2, also auch für $v_1 = v_2 = 0$. Nehmen wir das hinzu, so ergeben sich für Z_α die Differentialgleichungen (16):

$$\sum^r \frac{\partial^2 Z_\alpha}{\partial x_r^2} \cdot \left(\frac{\partial x_r}{\partial u_1}\right)^2 + 2 \sum \frac{\partial^2 Z_\alpha}{\partial x_r . \partial x_s} \cdot \frac{\partial x_r}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial x_s}{\partial u_1} + \sum^r \frac{\partial Z_\alpha}{\partial x_r} (1-n^2) \frac{\partial^2 x_r}{\partial u_1^2}$$
$$+ 2n^2 \sum^\varkappa \frac{\partial Z_\alpha}{\partial \varkappa} \cdot \varkappa . \varkappa_1^2 + n^2(1-n^2) . Z_\alpha . f_{11}^\alpha = 0,$$

$$\sum^r \frac{\partial^2 Z_\alpha}{\partial x_r^2} \cdot \frac{\partial x_r}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial x_r}{\partial u_2} + \sum \frac{\partial^2 Z_\alpha}{\partial x_r . \partial x_s} \cdot \left(\frac{\partial x_r}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial x_s}{\partial u_2} + \frac{\partial x_r}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial x_s}{\partial u_1}\right)$$
$$+ \sum^r \frac{\partial Z_\alpha}{\partial x_r} (1-n^2) \cdot \frac{\partial^2 x_r}{\partial u_1 . \partial u_2}$$
$$+ n^2 \sum^\varkappa \frac{\partial Z_\alpha}{\partial \varkappa} \cdot \varkappa . \varkappa_1^2 (\lambda^2 + \mu^2) + n^2(1-n^2) . Z_\alpha . f_{12}^\alpha = 0,$$

$$\sum^r \frac{\partial^2 Z_\alpha}{\partial x_r^2} \cdot \left(\frac{\partial x_r}{\partial u_2}\right)^2 + 2 \sum \frac{\partial^2 Z_\alpha}{\partial x_r . \partial x_s} \cdot \frac{\partial x_r}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial x_s}{\partial u_2}$$
$$+ \sum^r \frac{\partial Z_\alpha}{\partial x_r} (1-n^2) \frac{\partial^2 x_r}{\partial u_2^2} + 2n^2 \sum^\varkappa \frac{\partial Z_\alpha}{\partial \varkappa} \cdot \varkappa . \varkappa_1^2 . \lambda^2 . \mu^2$$
$$+ n^2(1-n^2) . Z_\alpha . f_{22}^\alpha = 0.$$

Damit aber sind wir am Ziele. In den früheren Paragraphen ist gezeigt worden, dafs und wie die Gröfsen:

$$\left(\frac{\partial x_r}{\partial u_s}\right)^2, \frac{\partial x_r}{\partial u_1} \frac{\partial x_r}{\partial u_2}, \frac{\partial x_r}{\partial u_1} \frac{\partial x_s}{\partial u_2} + \frac{\partial x_r}{\partial u_2} \frac{\partial x_s}{\partial u_1}, \frac{\partial^2 x_r}{\partial u_s^2}, \frac{\partial^2 x_r}{\partial u_1 . \partial u_2}$$

sich als ganze rationale Funktionen der Gröfsen x_r darstellen lassen und Methoden zur Koefficientenbestimmung gegeben worden. Da die Ausdrücke, die sich hierbei ergeben, ziemlich kompliziert sind, so mögen sie nicht wieder aufgenommen werden. Das analoge gilt von den Gröfsen f_{ss}^α, f_{12}^α. Dann aber ergiebt die Anwendung dieser Differentialgleichungen eine Reihe von Rekursionsformeln zwischen den Koefficienten, die bei der Multiplikation der σ-Funktionen auftreten.

§ 35.*)

Die Transformation zweiten Grades.

Wir wenden uns nunmehr zu der Transformation zweiten Grades. Bei derselben können wir uns vermöge der allgemeinen Betrachtungen auf fünfzehn Repräsentanten beschränken, welchen die Determinanten

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ i & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i' & 0 & -i & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ i & i'' & 2 & 0 \\ i' & i & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

entsprechen.

Wir wollen ganz allgemein eine Transformation ins Auge fassen, bei welcher:

$$a_1 = a_2 = a_3 = b_2 = b_3 = c_3 = 0$$

ist.

Setzen wir:

$$\Pi_\lambda(v_1, v_2) = \vartheta_\lambda(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') \tag{1}$$

wobei λ die Charakteristik:

$$\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix}$$

bedeutet, so finden die Gleichungen statt:

$$\begin{aligned} \Pi_\lambda(v_1 + 1, v_2) &= (-1)^{\mathfrak{g}_1} . \Pi_\lambda(v_1, v_2), \\ \Pi_\lambda(v_1, v_2 + 1) &= (-1)^{\mathfrak{g}_2} . \Pi_\lambda(v_1, v_2), \\ \Pi_\lambda(v_1 + \tau_{11}, v_2 + \tau_{12}) &= (-1)^{\mathfrak{h}_1} . \Pi_\lambda(v_1, v_2) . e^{-2\pi i(2v_1 + \tau_{11})}, \\ \Pi_\lambda(v_1 + \tau_{12}, v_2 + \tau_{22}) &= (-1)^{\mathfrak{h}_2} . \Pi_\lambda(v_1, v_2) . e^{-2\pi i(2v_2 + \tau_{22})}, \end{aligned} \tag{2}$$

wobei:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_1 &= g_1 . a_0, \\ \mathfrak{g}_2 &= g_1 . b_0 + g_2 . b_1, \\ \mathfrak{h}_2 &= g_1 . c_0 + g_2 . c_1 + h_2 . c_2 + c_1 . c_2, \\ \mathfrak{h}_1 &= g_1 . d_0 + g_2 . d_1 + h_2 . d_2 + h_1 . d_3 + d_0 . d_3 + d_1 . d_2 \end{aligned} \tag{3}$$

gesetzt ist.

---

*) Cf. Koenigsberger: Crelle 67. Pringsheim: Mathem. Annalen 9. Rohn: Mathem. Annalen 15.

Hieraus folgt, dafs die sämtlichen transformierten Thetafunktionen Thetafunktionen zweiter Ordnung mit der Charakteristik

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{g}_1 & \mathfrak{g}_2 \\ \mathfrak{h}_1 & \mathfrak{h}_2 \end{bmatrix}$$

sind. Dieselben können also nach gegebenen Regeln durch die ursprünglichen Thetafunktionen dargestellt werden. Diese Darstellung ist je nach der Charakteristik eine verschiedene. Wir wollen zunächst den Fall ins Auge fassen, dafs die Charakteristik Null ist. Die Frage, wann das eintritt, kommt auf die Lösung der Kongruenzen hinaus:

$$\left.\begin{aligned} 0 &\equiv a_0 . x, \\ 0 &\equiv b_0 . x + b_1 . y, \\ 0 &\equiv c_0 . x + c_1 . y + c_2 . z + c_1 . c_2, \\ 0 &\equiv d_0 . x + d_1 . y + d_2 . z + d_3 . w + d_0 . d_3 + d_1 . d_2 \end{aligned}\right\} \mod 2,$$

wobei die Bedingungsgleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} c_0 . d_3 + c_1 . d_2 - c_2 . d_1 &= 0, \\ b_0 . d_3 + b_1 . d_2 &= 0, \\ a_0 . d_3 = b_1 . c_2 &= 2. \end{aligned}$$

Man überzeugt sich leicht, dafs bei beliebig vorgelegten Werten der Gröfsen a, b, c, d sich immer vier und nur vier Systeme x, y, z, w ergeben. Genauer spezialisiert ergeben sich für die vier Arten der in diesem Paragraphen zuerst aufgestellten Transformationen resp. die Thetafunktionen mit den Indices 5, 01, 4, 23; 5, 01, 34, 2; 5, 4, 12, 03; 5, 34, 12, 0.

Mit andern Worten, wir finden, dafs die 60 Funktionen:

$$\vartheta_\alpha(2v_1,\ 2v_2,\ 2\tau_{11},\ 2\tau_{12},\ 2\tau_{22}),\quad \alpha = 5,\ 01,\ 4,\ 23,$$

$$\vartheta_\beta\left(2v_1,\ v_2,\ 2\tau_{11},\ \tau_{12},\ \frac{\tau_{22} - i}{2}\right),\quad \beta = 5,\ 01,\ 34,\ 2,$$

$$\vartheta_\gamma\left(v_1 + i . v_2,\ 2v_2,\ \frac{-i_1 + \tau_{11} + 2i . \tau_{12} + i^2 . \tau_{22}}{2},\ \tau_{12} + i . \tau_{22},\ 2\tau_{22}\right),$$
$$\gamma = 5,\ 4,\ 12,\ 03,$$

$$\vartheta_\delta\left(v_1,\ v_2,\ \frac{-i_1 + \tau_{11}}{2},\ \frac{-i + \tau_{12}}{2},\ \frac{-i_2 + \tau_{22}}{2}\right),\quad \delta = 5,\ 34,\ 12,\ 0$$

sämtlich Thetafunktionen zweiter Ordnung mit der Charakteristik Null sind. Dieselben lassen sich daher sämtlich durch die Quadrate von vier Thetafunktionen, zwischen denen keine lineare Relation besteht, linear ausdrücken. Die Konstantenbestimmung kann mit

Hülfe der Substitution halber Perioden stattfinden. Hierbei finden folgende Gesetze statt.

Vermehrt man v_1 und v_2 um resp.

$$\frac{1}{2} m_1 + \frac{1}{2} n_1 . \tau_{11} + \frac{1}{2} n_2 . \tau_{12}, \quad \frac{1}{2} m_2 + \frac{1}{2} n_1 . \tau_{12} + \frac{1}{2} n_2 . \tau_{22},$$

so wird v_1' und v_2' vermehrt um resp.

$$\frac{1}{2} \mu_1 + \frac{1}{2} \nu_1 . \tau_{11}' + \frac{1}{2} \nu_2 . \tau_{12}', \quad \frac{1}{2} \mu_2 + \frac{1}{2} \nu_1 . \tau_{12}' + \frac{1}{2} \nu_2 . \tau_{22}',$$

wobei die Beziehungen stattfinden:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= m_1 a_0 + m_2 b_0 + n_1 d_0 + n_2 c_0, \\ \mu_2 &= m_2 b_1 + n_1 d_1 + n_2 c_1, \\ \nu_2 &= n_1 d_2 + n_2 c_2, \\ \nu_1 &= n_1 d_3. \end{aligned}$$

Daraus folgt unmittelbar, dafs es immer vier Substitutionen halber Perioden giebt, welche eine beliebige transformierte Thetafunktion in sich überführen. Es folgt ferner, dafs mit Hülfe der Substitution halber Perioden eine jede transformierte Thetafunktion nur in drei andere transformierte übergeführt werden kann und zwar jedes Mal auf vier verschiedene Arten. Es ist nicht schwer, die Substitutionen zu fixieren, welche eine beliebige transformierte Funktion in sich selbst überführen.

In der That, vermehren wir v_1 und v_2 um resp.

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{2} d_3 & , \; 0, \\ \frac{1}{2} d_2 & , \; \frac{1}{2} c_2 \\ \frac{1}{2} (- d_0 + a_0 . \tau_{11} + b_0 . \tau_{12}), & \frac{1}{2} (- c_0 + a_0 . \tau_{21} + b_0 . \tau_{22}), \\ \frac{1}{2} (- d_1 + b_1 . \tau_{12}) & , \; \frac{1}{2} (- c_1 + b_1 . \tau_{22}), \end{array}$$

so sind unter diesen vier Paaren immer zwei, welche nach dem Modul 2 von Null verschieden sind. Nennen wir sie $\omega_\alpha, w_\alpha; \omega_\beta, w_\beta$, so entspricht den Vermehrungen von v_1 und v_2 um resp.:

$$\begin{array}{c} 0, \; 0 \\ \omega_\alpha, \; w_\alpha \\ \omega_\beta, \; w_\beta \\ \omega_\alpha + \omega_\beta, \; w_\alpha + w_\beta \end{array}$$

eine Vermehrung von v_1' und v_2' um ganze Multipla von Perioden.

Man wird nun zu der einfachsten Darstellung unserer 60 Funktionen gelangen, wenn man als ursprüngliche Thetafunktionen vier solche wählt, welche bei den soeben definierten Substitutionen halber Perioden in einander übergehen. Es giebt, wie man sich leicht überzeugt, vier solcher Systeme von ursprünglichen Thetafunktionen, und zwar erschöpfen diese Systeme die 16 Thetafunktionen. Ein jedes System ist ein Göpelsches Quadrupel. Unter diesen vier Göpelschen Quadrupeln giebt es dann eins und nur eins, welches aus lauter geraden Thetafunktionen besteht. Dieses Quadrupel greifen wir heraus, dann wird die Darstellung der dazu gehörenden transformierten Thetafunktion lauten:

$$\Pi_\lambda(v_1, v_2) = c\big(\vartheta_\alpha(v_1, v_2)^2 + \varepsilon_1 . \vartheta_\beta(v_1, v_2)^2 + \varepsilon_2 . \vartheta_\gamma(v_1, v_2)^2 + \varepsilon_1 . \varepsilon_2 . \vartheta_\delta(v_1, v_2)^2\big), \tag{4}$$

wobei c eine Konstante ist und ε_1 und ε_2 die positive oder negative Einheit bedeuten können.

Wir nehmen jetzt den speziellen Fall:

$$\vartheta_5(2v_1, 2v_2, 2\tau_{11}, 2\tau_{12}, 2\tau_{22}).$$

In demselben wird:

$$\vartheta_5(2v_1, 2v_2, 2\tau_{11}, 2\tau_{12}, 2\tau_{22}) = c\big(\vartheta_5(v_1, v_2)^2 + \vartheta_{12}(v_1, v_2)^2 + \vartheta_{34}(v_1, v_2)^2 + \vartheta_0(v_1, v_2)^2\big).$$

Die Konstante ergiebt sich durch Nullsetzen der Argumente aus der Gleichung:

$$\vartheta_5(0, 0, 2\tau_{11}, 2\tau_{12}, 2\tau_{22}) = c(\vartheta_5^2 + \vartheta_{12}^2 + \vartheta_{34}^2 + \vartheta_0^2),$$

oder, wenn wir die transformierte Thetafunktion durch einen grofsen Buchstaben bezeichnen, aus der Gleichung:

$$\Theta_5 = c(\vartheta_5^2 + \vartheta_{12}^2 + \vartheta_{34}^2 + \vartheta_0^2).$$

Nun überzeugt man sich aber durch mechanisches Quadrieren leicht, dafs die Gleichung besteht:

$$4\Theta_5^2 = \vartheta_5^2 + \vartheta_{12}^2 + \vartheta_{34}^2 + \vartheta_0^2. \tag{5}$$

Hieraus folgt:

$$c = \frac{1}{4\Theta_5}, \tag{6}$$

$$4\Theta_5 . \vartheta_5(2v_1, 2v_2, 2\tau_{11}, 2\tau_{12}, 2\tau_{22}) = \vartheta_5(v_1, v_2)^2 + \vartheta_{12}(v_1, v_2)^2 + \vartheta_{34}(v_1, v_2)^2 + \vartheta_0(v_1, v_2)^2. \tag{7}$$

Genau so wird:

$$
\begin{aligned}
&4\,\Theta_{01}\,.\,\vartheta_{01}(2v_1,\ 2v_2,\ 2\tau_{11},\ 2\tau_{12},\ 2\tau_{22})\\
&\qquad = \vartheta_5(v_1,\ v_2)^2 - \vartheta_{12}(v_1,\ v_2)^2 + \vartheta_{34}(v_1,\ v_2)^2 - \vartheta_0(v_1,\ v_2)^2,\\
(8)\quad &4\,\Theta_4\ .\,\vartheta_4\,(2v_1,\ 2v_2,\ 2\tau_{11},\ 2\tau_{12},\ 2\tau_{22})\\
&\qquad = \vartheta_5(v_1,\ v_2)^2 + \vartheta_{12}(v_1,\ v_2)^2 - \vartheta_{34}(v_1,\ v_2)^2 - \vartheta_0(v_1,\ v_2)^2,\\
&4\,\Theta_{23}\,.\,\vartheta_{23}(2v_1,\ 2v_2,\ 2\tau_{11},\ 2\tau_{12},\ 2\tau_{22})\\
&\qquad = \vartheta_5(v_1,\ v_2)^2 - \vartheta_{12}(v_1,\ v_2)^2 - \vartheta_{34}(v_1,\ v_2)^2 + \vartheta_0(v_1,\ v_2)^2.
\end{aligned}
$$

Wollte man auch die übrigen 56 transformierten Funktionen durch dieselben Gröfsen ausdrücken, so ergeben sich kompliziertere Ausdrücke. So z. B. wird:

$$
\begin{aligned}
&2\,\Theta_5\,.\,\vartheta_5\Big(2v_1,\ v_2,\ 2\tau_{11},\ \tau_{12},\ \frac{\tau_{22}}{2}\Big)(\vartheta_2{}^4 - \vartheta_{01}{}^4)\\
&\quad = (\vartheta_{23}{}^2\,.\,\vartheta_3{}^2 + \vartheta_{14}{}^2\,.\,\vartheta_{01}{}^2)(\vartheta_0(v_1,\ v_2)^2 + \vartheta_{34}(v_1,\ v_2)^2)\\
&\quad + (\vartheta_2{}^4 - \vartheta_{01}{}^4 - \vartheta_{14}{}^2.\vartheta_2{}^2 - \vartheta_{23}{}^2.\vartheta_{01}{}^2)(\vartheta_5(v_1,\ v_2)^2 + \vartheta_{12}(v_1,\ v_2)^2),\\
&2\,\Theta_5\,.\,\vartheta_5\Big(v_1,\ 2v_2,\ \frac{\tau_{11}}{2},\ \tau_{12},\ 2\tau_{22}\Big)(\vartheta_2{}^4 - \vartheta_{01}{}^4)\\
&\quad = (\vartheta_{23}{}^2\,.\,\vartheta_{03}{}^2 + \vartheta_4{}^2\,.\,\vartheta_{14}{}^2)(\vartheta_0(v_1,\ v_2)^2 + \vartheta_{12}(v_1,\ v_2)^2)\\
(9)\quad &\quad + (\vartheta_2{}^4 - \vartheta_{01}{}^4 - \vartheta_{23}{}^2.\vartheta_4{}^2 - \vartheta_{03}{}^2.\vartheta_{14}{}^2)(\vartheta_5(v_1,\ v_2)^2 + \vartheta_{34}(v_1,\ v_2)^2),\\
&\Theta_5\,.\,\vartheta_5\Big(v_1,\ v_2,\ \frac{\tau_{11}}{2},\ \frac{\tau_{12}}{2},\ \frac{\tau_{22}}{2}\Big)(\vartheta_2{}^4 - \vartheta_{01}{}^4)\\
&\quad = (\vartheta_{14}{}^2\,.\,\vartheta_4{}^2 + \vartheta_{14}{}^2\,.\,\vartheta_{01}{}^2 - \vartheta_2{}^2\,.\,\vartheta_{03}{}^2)\,.\,\vartheta_0(v_1,\ v_2)^2\\
&\quad + (\vartheta_2{}^4 - \vartheta_{01}{}^4 - \vartheta_4{}^2.\,\vartheta_{01}{}^2 - \vartheta_{23}{}^2.\,\vartheta_{01}{}^2 - \vartheta_{23}{}^2\,.\,\vartheta_4{}^2)\,.\,\vartheta_5(v_1,\ v_2)^2\\
&\quad + (\vartheta_4{}^2\,.\,\vartheta_2{}^2 + \vartheta_{23}{}^2\,.\,\vartheta_2{}^2 - \vartheta_{14}{}^2\,.\,\vartheta_{03}{}^2)\,.\,\vartheta_{34}(v_1,\ v_2)^2\\
&\quad + (\vartheta_{23}{}^2\,.\,\vartheta_{03}{}^2 + \vartheta_{01}{}^2\,.\,\vartheta_{03}{}^2 - \vartheta_{14}{}^2\,.\,\vartheta_2{}^2)\,.\,\vartheta_{12}(v_1,\ v_2)^2.
\end{aligned}
$$

Ganz analog lassen sich die übrigen Fälle erledigen. Zu einer jeden von Null verschiedenen Charakteristik gehören 12 transformierte Thetafunktionen, von denen sechs gerade, sechs ungerade Funktionen sind. Eine jede derselben enthält zwei willkürliche Konstanten und läfst sich nach gegebenen Regeln durch die ursprünglichen Thetafunktionen ausdrücken. Die Konstantenbestimmung erfolgt wiederum durch Substitution halber Perioden. Auch hier ist es möglich, die ursprünglichen Thetafunktionen so auszuwählen, dafs die Konstanten sich nur um das Vorzeichen von einander unterscheiden.

Für den speziellen, vorhin betrachteten Repräsentanten ergiebt sich:

$$
\begin{aligned}
& 2\Theta_{12} \,.\, \vartheta_{12}(2v_1,\, 2v_2,\, 2\tau_{11},\, 2\tau_{12},\, 2\tau_{22}) \\
& \qquad = \vartheta_5(v_1,\, v_2) \,.\, \vartheta_{12}(v_1,\, v_2) + \vartheta_0(v_1,\, v_2) \,.\, \vartheta_{34}(v_1,\, v_2), \\
& 2\Theta_{34} \,.\, \vartheta_{34}(2v_1,\, 2v_2,\, 2\tau_{11},\, 2\tau_{12},\, 2\tau_{22}) \\
& \qquad = \vartheta_5(v_1,\, v_2) \,.\, \vartheta_{34}(v_1,\, v_2) + \vartheta_0(v_1,\, v_2) \,.\, \vartheta_{12}(v_1,\, v_2), \\
& 2\Theta_{0} \,.\, \vartheta_{0}\,(2v_1,\, 2v_2,\, 2\tau_{11},\, 2\tau_{12},\, 2\tau_{22}) \\
& \qquad = \vartheta_5(v_1,\, v_2) \,.\, \vartheta_{0}\,(v_1,\, v_2) + \vartheta_{12}(v_1,\, v_2) \,.\, \vartheta_{34}(v_1,\, v_2), \\
(10)\quad & 2\Theta_{03} \,.\, \vartheta_{03}(2v_1,\, 2v_2,\, 2\tau_{11},\, 2\tau_{12},\, 2\tau_{22}) \\
& \qquad = \vartheta_5(v_1,\, v_2) \,.\, \vartheta_{12}(v_1,\, v_2) - \vartheta_0(v_1,\, v_2) \,.\, \vartheta_{34}(v_1,\, v), \\
& 2\Theta_{2} \,.\, \vartheta_{2}\,(2v_1,\, 2v_2,\, 2\tau_{11},\, 2\tau_{12},\, 2\tau_{22}) \\
& \qquad = \vartheta_5(v_1,\, v_2) \,.\, \vartheta_{34}(v_1,\, v_2) - \vartheta_0(v_1,\, v_2) \,.\, \vartheta_{12}(v_1,\, v_2), \\
& 2\Theta_{14} \,.\, \vartheta_{14}(2v_1,\, 2v_2,\, 2\tau_{11},\, 2\tau_{12},\, 2\tau_{22}) \\
& \qquad = \vartheta_5(v_1,\, v_2) \,.\, \vartheta_{0}(v_1,\, v_2) - \vartheta_{12}(v_1,\, v_2) \,.\, \vartheta_{34}(v_1,\, v_2).
\end{aligned}
$$

Die noch fehlenden Formeln sind aus den hier stehenden durch Substitution halber Perioden zu entwickeln.

Übrigens ist es nur nötig, die ganze Formenmannigfaltigkeit für einen Repräsentanten zu kennen, um sie mit Hülfe der linearen Transformation für alle Repräsentanten zu kennen. In der That, es wäre das bewiesen, wenn stets Zahlen a, b, c, d und a', b', c', d' je einer linearen Transformation so bestimmt werden können, daſs die Gleichung stattfindet:

$$
(11)\quad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}
\begin{vmatrix} u_0 & 0 & 0 & 0 \\ v_0 & v_1 & 0 & 0 \\ w_0 & w_1 & w_2 & 0 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix} u_0' & 0 & 0 & 0 \\ v_0' & v_1' & 0 & 0 \\ w_0' & w_1' & w_2' & 0 \\ x_0' & x_1' & x_2' & x_3' \end{vmatrix}
\begin{vmatrix} a_0' & a_1' & a_2' & a_3' \\ b_0' & b_1' & b_2' & b_3' \\ c_0' & c_1' & c_2' & c_3' \\ d_0' & d_1' & d_2' & d_3' \end{vmatrix},
$$

wobei die beiden andern Determinanten zu beliebig gewählten Repräsentanten gehören. Die Richtigkeit der Behauptung zeigt eine einfache Rechnung.

Hierbei tritt der eine Übelstand auf, daſs die Zahlen a, b, c, d den entsprechenden Zahlen a', b', c', d' im allgemeinen nach dem Modul 2 nicht kongruent sein werden — es ist aber nicht schwer, die Zahlen so zu wählen, daſs Kongruenz stattfindet. In der That, wir nehmen an, daſs die ganze Formenmannigfaltigkeit bekannt sei für die Transformation

$$
\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.
$$

Nehmen wir dann an, dafs auf der rechten Seite die Determinante steht:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

so haben wir zu setzen:

$$\begin{array}{llll} a_0 = 0, & a_1 = 1, & a_2 = 0, & a_3 = 0, \\ b_0 = 0, & b_1 = 0, & b_2 = 0, & b_3 = 1, \\ c_0 = 1, & c_1 = 0, & c_2 = 0, & \\ d_0 = 0, & d_1 = 0, & d_2 = 1, & d_3 = 0, \end{array}$$

und ferner für

$$\begin{array}{ll} 1) & i = 0;\ c_3 = 0, \\ 2) & i = 1;\ c_3 = -1. \end{array}$$

Nehmen wir zweitens an, dafs auf der rechten Seite die Determinante steht:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ i & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i' & 0 & -i & 2 \end{vmatrix},$$

so haben wir zu setzen:

$$\begin{array}{llll} a_0 = 0, & a_1 = 0, & a_2 = 0, & a_3 = 1 \\ b_0 = 0, & b_1 = 1, & b_2 = 0, & \\ c_0 = 0, & c_1 = 0, & c_2 = 1, & c_3 = 0, \\ d_0 = 1, & d_1 = 0, & & \end{array}$$

und ferner für:

$$\begin{array}{ll} 1) & i = 0,\ i' = 0 : b_3 = 0,\ d_2 = 0,\ d_3 = 0, \\ 2) & i = 0,\ i' = 1 : b_3 = 0,\ d_2 = 0,\ d_3 = -1, \\ 3) & i = 1,\ i' = 0 : b_3 = -1,\ d_2 = 1,\ d_3 = 0, \\ 4) & i = 1,\ i' = 1 : b_3 = -1,\ d_2 = 1,\ d_3 = -1. \end{array}$$

Nehmen wir drittens an, dafs auf der rechten Seite die Determinante steht:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ i & i'' & 2 & 0 \\ i' & i & 0 & 2 \end{vmatrix},$$

so haben wir zu setzen:

$$\begin{array}{llll} a_0 = 0, & a_1 = 0, & a_2 = 0, & a_3 = 1, \\ b_0 = 0, & b_1 = 0, & b_2 = 1, & b_3 = 0, \\ c_0 = 0, & c_1 = 1, & & \\ d_0 = 1, & d_1 = 0, & & \end{array}$$

und falls:

$$\begin{array}{lrrrr}
1)\ i = 0,\ i' = 0,\ i'' = 0: & c_2 = 0, & c_3 = 0, & d_2 = 0, & d_3 = 0, \\
2)\ i = 0,\ i' = 0,\ i'' = 1: & c_2 = -1, & c_3 = 0, & d_2 = 0, & d_3 = 0, \\
3)\ i = 0,\ i' = 1,\ i'' = 0: & c_2 = 0, & c_3 = 0, & d_2 = 0, & d_3 = -1, \\
4)\ i = 0,\ i' = 1,\ i'' = 1: & c_2 = -1, & c_3 = 0, & d_2 = 0, & d_3 = -1, \\
5)\ i = 1,\ i' = 0,\ i'' = 0: & c_2 = 0, & c_3 = -1, & d_2 = -1, & d_3 = 0, \\
6)\ i = 1,\ i' = 0,\ i'' = 1: & c_2 = -1, & c_3 = -1, & d_2 = -1, & d_3 = 0, \\
7)\ i = 1,\ i' = 1,\ i'' = 0: & c_2 = 0, & c_3 = -1, & d_2 = -1, & d_3 = -1, \\
8)\ i = 1,\ i' = 1,\ i'' = 1: & c_2 = -1, & c_3 = -1, & d_2 = -1, & d_3 = -1.
\end{array}$$

Die Zahlen $a' \ldots$ sind dann in jedem dieser Fälle den entsprechenden Zahlen $a \ldots$ nach dem Modul 2 kongruent.

Eine Hauptanwendung der Transformation 2ten Grades besteht darin, daſs mit ihrer Hülfe die Thetarelationen in eleganter und übersichtlicher Weise abgeleitet werden können. Die Betrachtungen haben viele Ähnlichkeit mit den Betrachtungen des § 10 und mögen daher fortbleiben. Ferner steht die Theorie der Transformation 2ten Grades in engster Beziehung mit der Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels von vier Elementen, welche von Borchardt entwickelt worden ist. Mit ihrer Hülfe kann in gewissen Fällen ϑ_5 berechnet werden, wenn die Moduln $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 gegeben sind.

Aus der Transformation der Thetafunktionen folgt unmittelbar die Transformation der hyperelliptischen Funktionen. Jedenfalls ergiebt sich das Resultat, daſs auch in diesem Falle die transformierten Funktionen rationale Funktionen der ursprünglichen sind.

§ 36.*)

Die allgemeine Transformation unpaaren Grades. Erste Methode der Koefficientenbestimmung.

Wir wenden uns jetzt zu der allgemeinen Transformation unpaaren Grades. Nach den Betrachtungen des § 22 sind wir berechtigt anzunehmen, dafs der Grad eine Primzahl n sei. Ferner sind wir berechtigt, uns auf die Repräsentanten zu beschränken und zwar fanden wir hierbei die Determinanten:

$$\begin{vmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ i & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i_1 & 0 & -i & n \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ i_1 & i_2 & n & 0 \\ i & i_1 & 0 & n \end{vmatrix}.$$

Durch Zusammensetzung dieser Determinanten mit den Determinanten:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & ai & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ ai & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ ai_1 & 0 & -ai & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ ai_1 & ai_2 & 1 & 0 \\ ai & ai_1 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

bei welchen

$$an \equiv -1 \bmod 8$$

ist, ergiebt sich das Resultat, dafs wir berechtigt sind, in den ursprünglichen Determinanten die Elemente, welche links von den Diagonalgliedern stehen, als durch 8 teilbar anzunehmen.

Wir beschränken uns auf diese soeben definierten Transformationen.

Setzt man dann:

$$1) \qquad \Pi_\lambda(v_1, v_2) = \vartheta_\lambda(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}'),$$

wobei λ die Charakteristik

$$\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix}$$

bedeutet, so finden die Gleichungen statt:

---

*) Königsberger: Crelle 67. Krause: Acta mathematica 3.

$$
(2)\quad
\begin{aligned}
&\Pi_\lambda(v_1+1,\ v_2)=(-1)^{g_1}.\Pi_\lambda(v_1,\ v_2),\\
&\Pi_\lambda(v_1,\ v_2+1)=(-1)^{g_2}.\Pi_\lambda(v_1,\ v_2),\\
&\Pi_\lambda(v_1+\tau_{11},\ v_2+\tau_{12})=(-1)^{h_1}.\Pi_\lambda(v_1,\ v_2).e^{-n\pi i(2v_1+\tau_{11})},\\
&\Pi_\lambda(v_1+\tau_{12},\ v_2+\tau_{22})=(-1)^{h_2}.\Pi_\lambda(v_1,\ v_2).e^{-n\pi i(2v_2+\tau_{22})}.
\end{aligned}
$$

Dabei ist die transformierte Funktion zugleich mit der ursprünglichen gerade oder ungerade. Hieraus folgt, daſs die transformierten Thetafunktionen Thetafunktionen n^{ter} Ordnung mit derselben Charakteristik, wie die ursprünglichen sind. Dieselben können dann nach gegebenen Regeln durch die ursprünglichen ausgedrückt werden. Die einzige Schwierigkeit, die hierbei auftritt, ist die Bestimmung der Konstanten, welche in den fertigen Formeln auftreten. Wir bestimmen dieselben zunächst auf folgende Weise, indem wir einen bestimmten Fall ins Auge fassen.

Es ist:

$$
(3)\quad
\begin{aligned}
&\vartheta_5(v_1',\ v_2',\ \tau_{11}',\ \tau_{12}',\ \tau_{22}')\\
&\quad=\Sigma e_{\alpha\beta\gamma\delta}.\vartheta_5(v_1,\ v_2)^\alpha.\vartheta_1(v_1,\ v_2)^\beta.\vartheta_{02}(v_1,\ v_2)^\gamma.\vartheta_{34}(v_1,\ v_2)^\delta,\\
&\quad\alpha+\beta+\gamma+\delta=n,\ \ \beta+\gamma\equiv\gamma+\delta\equiv 0 \bmod 2,\ \ \delta<4.
\end{aligned}
$$

Vermehrt man nun v_1 und v_2 um resp.

$$\frac{1}{2}m_1+\frac{1}{2}n_1.\tau_{11}+\frac{1}{2}n_2.\tau_{12};\ \ \frac{1}{2}m_2+\frac{1}{2}n_1.\tau_{12}+\frac{1}{2}n_2.\tau_{22},$$

so werden v_1' und v_2' vermehrt um resp.:

$$\frac{1}{2}m_1.a_0+\frac{1}{2}n_1.d_3.\tau_{11}'+\frac{1}{2}n_2.c_2.\tau_{12}',$$

$$\frac{1}{2}m_2.b_1+\frac{1}{2}n_1.d_3.\tau_{12}'+\frac{1}{2}n_2.c_2.\tau_{22}',$$

wenn man von geraden Vielfachen von Perioden absieht.

Hieraus folgt, daſs wir durch Substitution halber Perioden aus der obigen Formel 15 neue erhalten, welche die Form haben:

$$
(4)\quad
\begin{aligned}
&\vartheta_a(v_1',\ v_2',\ \tau_{11}',\ \tau_{12}'\ \tau_{22}')\\
&\quad=\Sigma e_{\alpha\beta\gamma\delta}.i^{\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}}.\vartheta_{\eta_1}(v_1,\ v_2)^\alpha.\vartheta_{\eta_2}(v_1,\ v_2)^\beta.\vartheta_{\eta_3}(v_1,\ v_2)^\gamma.\vartheta_{\eta_4}(v_1,\ v_2)^\delta.
\end{aligned}
$$

In diesen Gleichungen denken wir uns an Stelle der Thetafunktionen die σ-Funktionen eingeführt; wir denken uns ferner durch $\sigma_5(u_1,\ u_2)^n$ beide Seiten einer jeden Gleichung dividiert und endlich an Stelle von den transformierten σ-Funktionen, die wir durch:

$$\sigma_a(u_1',\ u_2')'$$

bezeichnen wollen, gesetzt:

$$\frac{\sigma_a(u_1', u_2')'}{\sigma_5(u_1', u_2')'} \cdot \sigma_5(u_1', u_2')'.$$

Wir erhalten dann 16 Gleichungen, in denen die Unbekannten $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$ linear vorkommen.

Jetzt denken wir uns beide Seiten entwickelt nach Potenzen von u_1 und u_2, indem wir hinzunehmen, daſs die Beziehungen bestehen:

$$\begin{aligned} u_1' &= M_0 . u_1 + M_1 . u_2, \\ u_2' &= M_2 . u_1 + M_3 . u_2. \end{aligned} \tag{5}$$

Die auf den rechten Seiten stehenden Funktionen $al_a(u_1, u_2)$ lassen sich dann nach gegebenen Regeln in Potenzreihen von u_1 und u_2 entwickeln. Die Koefficienten sind jedenfalls rationale Funktionen von ϑ_a. Auf der linken Seite lassen sich die Funktionen:

$$\frac{\sigma_a(u_1', u_2')'}{\sigma_5(u_1', u_2')'}$$

auch nach Potenzen von u_1 und u_2 entwickeln, so zwar, daſs die Koefficienten sich rational aus den transformierten Funktionen Θ_a und den Gröſsen M_0, M_1, M_2, M_3 zusammensetzen lassen.

Ferner sind dann noch die Funktionen:

$$\frac{\sigma_5(u_1', u_2')'}{\sigma_5(u_1, u_2)^n}$$

nach Potenzen von u_1 und u_2 zu entwickeln. Wir wollen in dieser Entwicklung die Koefficienten mit Ausnahme des konstanten Gliedes als Unbekannte ansehen und sie durch den Buchstaben y bezeichnen. Es bestehen thatsächlich zwischen diesen Koefficienten einfache Beziehungen, indessen sehen wir davon ab.

Setzen wir nun die Koefficienten der einzelnen Potenzen von u_1 und u_2 links und rechts einander gleich und zwar bis zu den Gliedern $2r + 1^{\text{ter}}$ Ordnung incl., so erhalten wir $(r+1)(16r+22)$ lineare Gleichungen mit den $(r+1)^2 - 1 + \frac{n^2+1}{2}$ Unbekannten $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$ und y. Lassen wir daher r wachsen, so müssen wir im Stande sein, sämtliche Unbekannte als rationale Funktionen von

$$\vartheta_a, \Theta_a, M_0, M_1, M_2, M_3$$

auszudrücken, während zwischen diesen Gröſsen selbst unendlich viele Beziehungen rationaler Natur bestehen.

An Stelle des Systems von 16 Gleichungen, das wir in Betracht

gezogen haben, hätten wir auch ein System von 16 Gleichungen wählen können, welches aus dem ursprünglichen durch Division aller Gleichungen durch die erste entsteht. Dasselbe bietet den Vorzug, daſs die Gröſsen y fortfallen. Im übrigen würden sich die analogen Resultate ergeben.

Das Problem kann aber noch weiter reduziert werden. Dazu beweisen wir, daſs alle Produkte der Konstanten zu je zwei sich als rationale Funktionen der Gröſsen ϑ_a und Θ_a allein ausdrücken lassen.

In der That, die Quadrate der Thetafunktionen lassen sich linear durch die Quadrate von vier solcher Funktionen ausdrücken, zwischen denen eine Göpelsche biquadratische Relation besteht. So z. B. ist (6):

$$\begin{aligned}
N \,.\, \vartheta_{23}(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')^2 = {} & \Theta_5^2 \,.\, \Theta_{23}^2 \,.\, \vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')^2 \\
& - \Theta_5^2 \,.\, \Theta_{03}^2 \,.\, \vartheta_{02}(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')^2 \\
& + \Theta_{34}^2 \,.\, \Theta_{23}^2 \,.\, \vartheta_{34}(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')^2 \\
& - \Theta_{34}^2 \,.\, \Theta_{03}^2 \,.\, \vartheta_1(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')^2, \\
N \,.\, \vartheta_0(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')^2 = {} & \Theta_{23}^2 \,.\, \Theta_{14}^2 \,.\, \vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')^2 \\
& - \Theta_{14}^2 \,.\, \Theta_{03}^2 \,.\, \vartheta_{02}(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')^2 \\
& + \Theta_4^2 \,.\, \Theta_{23}^2 \,.\, \vartheta_1(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')^2 \\
& - \Theta_4^2 \,.\, \Theta_{03}^2 \,.\, \vartheta_{34}(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')^2, \\
N \,.\, \vartheta_3(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')^2 = {} & \Theta_{34}^2 \,.\, \Theta_4^2 \,.\, \vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')^2 \\
& - \Theta_5^2 \,.\, \Theta_{14}^2 \,.\, \vartheta_{02}(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')^2 \\
& - \Theta_{34}^2 \,.\, \Theta_{14}^2 \,.\, \vartheta_1(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')^2 \\
& + \Theta_5^2 \,.\, \Theta_4^2 \,.\, \vartheta_{34}(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')^2, \\
N = {} & \Theta_{23}^4 + \Theta_{03}^4.
\end{aligned}$$

Die übrigen Formeln sind aus den hier stehenden durch Substitution halber Perioden abzuleiten.

Denken wir uns nun diese Gleichungen dividiert durch $\vartheta_5(v_1, v_2)^{2n}$ und uns an Stelle der Gröſsen

$$\frac{\vartheta_a(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')^2}{\vartheta_5(v_1, v_2)^{2n}}$$

die Werte eingesetzt, die sich aus dem ursprünglichen Systeme von 16 Gleichungen ergeben. Wir erhalten dann 12 lineare Gleichungen mit den Unbekannten $e_{\alpha\beta\gamma\delta} \,.\, e_{\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1}$. Die Koefficienten setzen sich unter Adjunktion von ϑ_a und Θ_a aus den Funktionen $al_a(u_1, u_2)$ zusammen. Indem wir dann die Reihenentwicklungen der hyper-

elliptischen Funktionen einführen, erhalten wir unmittelbar das gewünschte Resultat.

Wenn aber die Produkte aller Koefficienten zu je zwei sich rational aus den Gröfsen ϑ_a und Θ_a zusammensetzen lassen, so thun es die Gröfsen M_0, M_1, M_2, M_3 auch.

In der That, bilden wir die Produkte:

$$\vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') \,.\, \vartheta_{02}(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}'),$$

$$\vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') \,.\, \vartheta_1\,(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}'),$$

differenzieren dieselben und setzen nach der Differentiation die Argumente gleich Null, so überzeugen wir uns leicht von der Richtigkeit der Behauptung.

Hieraus aber folgt der

Lehrsatz.

Alle Konstanten, welche bei der Transformation n^{ten} Grades auftreten, lassen sich rational durch die Gröfsen ϑ_a und Θ_a ausdrücken. Zwischen diesen Gröfsen selbst bestehen unendlich viele rationale Beziehungen.

Zu gleicher Zeit folgt aus den früheren Betrachtungen, dafs der Quotient je zweier Konstanten sich rational durch die Quotienten $\frac{\vartheta_a}{\vartheta_5}$, $\frac{\Theta_a}{\Theta_5}$ ausdrücken läfst.

Die Zahl der Thetarelationen, die wir auf die genannte Weise erhalten, läfst sich noch vermöge folgender Bemerkungen vermehren. Erstens zeigt sich bei der unpaaren Transformation die lineare Transformation von hervorragender Bedeutung.

Die Anwendbarkeit derselben beruht auf folgender Bemerkung.

Wenn $(u_0\ v_1\ w_2\ x_3)$ und $(u_0'\ v_1'\ w_2'\ x_3')$ zwei ganz beliebige Repräsentanten sind, so lassen sich immer zwei lineare Transformationen $(a_0\ b_1\ c_2\ d_3)$ und $(a_0'\ b_1'\ c_2'\ d_3')$ derart bestimmen, dafs wird:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_0 & 0 & 0 & 0 \\ v_0 & v_1 & 0 & 0 \\ w_0 & w_1 & w_2 & 0 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_0' & 0 & 0 & 0 \\ v_0' & v_1' & 0 & 0 \\ w_0' & w_1' & w_2' & 0 \\ x_0' & x_1' & x_2' & x_3' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0' & a_1' & a_2' & a_3' \\ b_0' & b_1' & b_2' & b_3' \\ c_0' & c_1' & c_2' & c_3' \\ d_0' & d_1' & d_2' & d_3' \end{vmatrix}.$$

Die Richtigkeit dieses fundamentalen Satzes zeigt eine einfache Rechnung. Dabei folgt zu gleicher Zeit, dafs die Zahlen a, b, c, d den entsprechenden Zahlen a', b', c', d' nach dem Modul 2 kongruent

sind. Dann aber können alle die Sätze, die wir für die lineare Transformation gefunden haben, für die allgemeine Transformation verwerthet werden. Die einzigen Schwierigkeiten sind Zeichenschwierigkeiten, die bei der Umkehrung der Transformationen eintreten. Indessen sind auch diese vermöge der getroffenen Wahl der Repräsentanten nur von geringfügiger Bedeutung. —

Ferner zeigt sich folgende Bemerkung von Bedeutung. Wir fanden, dafs zu jeder Transformation $(a_0\ b_1\ c_2\ d_3)$ eine andere von der Form gehört:

$$\begin{vmatrix} d_3 & c_3 & -b_3 & -a_3 \\ d_2 & c_2 & -b_2 & -a_2 \\ -d_1 & -c_1 & b_1 & a_1 \\ -d_0 & -c_0 & b_0 & a_0 \end{vmatrix}.$$

Wir nennen dieselbe die zu der ursprünglichen supplementäre Transformation. Wie man sich leicht überzeugt, führt die Aufeinanderfolge der beiden Transformationen zur Multiplikation. Dieser Umstand macht die supplementäre Transformation zur Auffindung weiterer Thetarelationen in hervorragender Weise geeignet.

Jedenfalls folgt aus den vorhergehenden Untersuchungen das Resultat, dafs die transformierten hyperelliptischen Funktionen sich rational durch die ursprünglichen ausdrücken lassen.

§ 37.*)

Die Transformation dritten Grades. Beziehungen zur Zahlentheorie.

Wir wollen jetzt zunächst den Fall ins Auge fassen, dafs $n = 3$ ist.

Dann ist:

$$(1)\quad \vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') = e_1 . \vartheta_5(v_1, v_2)^3 + e_2 . \vartheta_5(v_1, v_2) . \vartheta_1(v_1, v_2)^2$$
$$+ e_3 . \vartheta_5(v_1, v_2) . \vartheta_{02}(v_1, v_2)^2 + e_4 . \vartheta_5(v_1, v_2) . \vartheta_{34}(v_1, v_2)^2$$
$$+ e_5 . \vartheta_1(v_1, v_2) . \vartheta_{02}(v_1, v_2) . \vartheta_{34}(v_1, v_2).$$

Substituieren wir halbe Perioden und setzen dann $v_1 = v_2 = 0$, so erhalten wir die Gleichungen:

*) Cf. Koenigsberger: Crelle 67. Krause: Acta mathematica 3.

$$\Theta_5 \,.\, \vartheta_5 = e_1 \,.\, \vartheta_5^4 + e_4 \,.\, \vartheta_5^2 \,.\, \vartheta_{34}^2, \quad \Theta_{34} \,.\, \vartheta_{34} = e_1 \,.\, \vartheta_{34}^4 + e_4 \,.\, \vartheta_{34}^2 \,.\, \vartheta_5^2,$$

$$\Theta_{03} \,.\, \vartheta_{03} = e_1 \,.\, \vartheta_{03}^4 + e_3 \,.\, \vartheta_{03}^2 \,.\, \vartheta_{23}^2, \quad \Theta_{23} \,.\, \vartheta_{23} = e_1 \,.\, \vartheta_{23}^4 - e_3 \,.\, \vartheta_{23}^2 \,.\, \vartheta_{03}^2,$$

$$\Theta_4 \,.\, \vartheta_4 = e_2 \,.\, \vartheta_4^4 - e_2 \,.\, \vartheta_4^2 \,.\, \vartheta_{14}^2, \quad \varepsilon \,.\, \Theta_{14} \,.\, \vartheta_{14} = e_1 \,.\, \vartheta_{14}^4 + e_2 \,.\, \vartheta_{14}^2 \,.\, \vartheta_4^2,$$

$$\begin{aligned}
\Theta_0 \,.\, \vartheta_0 &= e_1 \,.\, \vartheta_0^4 + e_2 \,.\, \vartheta_0^2 \,.\, \vartheta_{01}^2 + e_3 \,.\, \vartheta_0^2 \,.\, \vartheta_2^2 + e_4 \,.\, \vartheta_0^2 \,.\, \vartheta_{12}^2 \\
&\qquad + e_5 \,.\, \vartheta_0 \,.\, \vartheta_{01} \,.\, \vartheta_2 \,.\, \vartheta_{12}, \\
\Theta_{01} \,.\, \vartheta_{01} &= e_1 \,.\, \vartheta_{01}^4 - e_2 \,.\, \vartheta_{01}^2 \,.\, \vartheta_0^2 - e_3 \,.\, \vartheta_{01}^2 \,.\, \vartheta_{12}^2 + e_4 \,.\, \vartheta_{01}^2 \,.\, \vartheta_2^2 \\
&\qquad - e_5 \,.\, \vartheta_0 \,.\, \vartheta_{01} \,.\, \vartheta_2 \,.\, \vartheta_{12}, \\
\Theta_2 \,.\, \vartheta_2 &= e_1 \,.\, \vartheta_2^4 - e_2 \,.\, \vartheta_2^2 \,.\, \vartheta_{12}^2 - e_3 \,.\, \vartheta_2^2 \,.\, \vartheta_0^2 + e_4 \,.\, \vartheta_2^2 \,.\, \vartheta_{01}^2 \\
&\qquad - e_5 \,.\, \vartheta_0 \,.\, \vartheta_{01} \,.\, \vartheta_2 \,.\, \vartheta_{12}, \\
\Theta_{12} \,.\, \vartheta_{12} &= e_1 \,.\, \vartheta_{12}^4 + e_2 \,.\, \vartheta_{12}^2 \,.\, \vartheta_2^2 + e_3 \,.\, \vartheta_{12}^2 \,.\, \vartheta_{01}^2 + e_4 \,.\, \vartheta_{12}^2 \,.\, \vartheta_0^2 \\
&\qquad + e_5 \,.\, \vartheta_0 \,.\, \vartheta_{01} \,.\, \vartheta_2 \,.\, \vartheta_{12}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Dabei ist gesetzt:

$$\varepsilon = (-1)^{\frac{c_2 + \delta_2 - 2}{2}}.$$

Mit Hülfe der Theorie der supplementären Transformation ergiebt sich dann ferner:

$$\begin{aligned}
\vartheta_5(nv_1, nv_2) &= e_1' \,.\, \vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')^3 \\
&\quad + e_2' \,.\, \vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') \,.\, \vartheta_1(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')^2 \\
&\quad + e_3' \,.\, \vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') \,.\, \vartheta_{02}(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')^2 \\
&\quad + e_4' \,.\, \vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') \,.\, \vartheta_{34}(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')^2 \\
&\quad + e_5' \,.\, \vartheta_1(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') \,.\, \vartheta_{02}(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') \\
&\quad \,.\, \vartheta_{34}(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}').
\end{aligned} \tag{3}$$

Betrachtungen einfacher Natur zeigen, daſs die obigen zehn Gleichungen ungeändert bleiben, wenn man e_α' an Stelle von e_α, Θ_α an Stelle von ϑ_α und umgekehrt setzt.

Aus den Gleichungen folgt:

$$\begin{aligned}
e_1 &= \frac{\Theta_{34} \,.\, \vartheta_{34} - \Theta_5 \,.\, \vartheta_5}{\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4}, \\
e_2 &= \frac{\varepsilon \Theta_{14} \,.\, \vartheta_4^3 - \Theta_4 \,.\, \vartheta_{14}^3}{\vartheta_4 \,.\, \vartheta_{14} (\vartheta_4^4 + \vartheta_{14}^4)}, \\
e_3 &= \frac{\Theta_{03} \,.\, \vartheta_{23}^3 - \Theta_{23} \,.\, \vartheta_{03}^3}{\vartheta_{03} \,.\, \vartheta_{23} (\vartheta_{23}^4 + \vartheta_{03}^4)}, \\
e_4 &= \frac{\Theta_5 \,.\, \vartheta_{34}^3 - \Theta_{34} \,.\, \vartheta_5^3}{\vartheta_5 \,.\, \vartheta_{34} (\vartheta_{34}^4 - \vartheta_5^4)}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Ebenso einfach ist die Bestimmung von e_5 und den Gröſsen e_α'.

Zu gleicher Zeit ergeben sich die Thetarelationen:

$$(5)\quad \begin{aligned} \Theta_{03} \cdot \vartheta_{03} + \Theta_{23} \cdot \vartheta_{23} + \quad \Theta_{34} \cdot \vartheta_{34} &= \Theta_5 \cdot \vartheta_5, \\ \Theta_{01} \cdot \vartheta_{01} + \Theta_{12} \cdot \vartheta_{12} + \varepsilon \cdot \Theta_{14} \cdot \vartheta_{14} &= \Theta_5 \cdot \vartheta_5, \\ \Theta_4 \cdot \vartheta_4 + \varepsilon \cdot \Theta_{14} \cdot \vartheta_{14} + \quad \Theta_{34} \cdot \vartheta_{34} &= \Theta_5 \cdot \vartheta_5, \end{aligned}$$

und ferner (6):

$$\begin{aligned} \Theta_0 \cdot \vartheta_0 + \Theta_{01} \cdot \vartheta_{01} &= e_1(\vartheta_0^4 + \vartheta_{01}^4) - e_3 \cdot \vartheta_{03}^2 \cdot \vartheta_{23}^2 + e_4 \cdot \vartheta_5^2 \cdot \vartheta_{34}^2 \\ &= e_1'(\Theta_0^4 + \Theta_{01}^4) - e_3' \cdot \Theta_{03}^2 \cdot \Theta_{23}^2 + e_4' \cdot \Theta_5^2 \cdot \Theta_{34}^2, \\ \Theta_0 \cdot \vartheta_0 + \Theta_2 \cdot \vartheta_2 &= e_1(\vartheta_0^4 + \vartheta_2^4) + e_2 \cdot \vartheta_4^2 \cdot \vartheta_{14}^2 + e_4 \cdot \vartheta_5^2 \cdot \vartheta_{34}^2 \\ &= e_1'(\Theta_0^4 + \Theta_2^4) + e_2' \cdot \Theta_4^2 \cdot \Theta_{14}^2 + e_4' \cdot \Theta_5^2 \cdot \Theta_{34}^2, \\ \Theta_0 \cdot \vartheta_0 - \Theta_{12} \cdot \vartheta_{12} &= e_1(\vartheta_0^4 - \vartheta_{12}^4) + e_2 \cdot \vartheta_4^2 \cdot \vartheta_{14}^2 - e_3 \cdot \vartheta_{03}^2 \cdot \vartheta_{23}^2 \\ &= e_1'(\Theta_0^4 - (\Theta_{12}^4) + e_2' \cdot \Theta_4^2 \cdot \Theta_{14}^2 - e_3' \cdot \Theta_{03}^2 \cdot \Theta_{23}^2. \end{aligned}$$

Wir wollen nun wieder wie früher die Thetafunktionen aufgefaſst als Funktionen von u_1 und u_2 durch $f_a(u_1, u_2)$ bezeichnen, d. h. setzen:

$$\vartheta_a(v_1, v_2) = f_a(u_1, u_2);$$

die transformierten Funktionen mögen durch groſse Buchstaben von den ursprünglichen unterschieden werden, d. h. es möge sein:

$$\vartheta_a(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') = F_a(u_1', u_2').$$

Die ersten Differentialquotienten nach u_s resp. u_s' für die Nullwerte der Argumente bezeichnen wir durch:

$$f_a'(u_s)_0 \text{ resp. } F_a'(u_s')_0.$$

Unter diesen Voraussetzungen ergiebt sich durch Differenzieren das Gleichungssystem (7):

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1 \cdot F_3'(u_2')_0 \cdot M_{\varepsilon+1} \\ &\qquad = (-e_3 \cdot \vartheta_{14}^2 + e_4 \cdot \vartheta_4^2) f_3'(u_s)_0 + e_5 \cdot \vartheta_4 \cdot \vartheta_{14} \cdot f_{13}'(u_s)_0, \\ &\varepsilon_2 (F_{13}'(u_1')_0 \cdot M_{\varepsilon-1} + F_{13}'(u_2')_0 \cdot M_{\varepsilon+1}) \\ &\qquad = (e_3 \cdot \vartheta_4^2 + e_4 \cdot \vartheta_{14}^2) f_{13}'(u_s)_0 - e_5 \cdot \vartheta_4 \cdot \vartheta_{14} \cdot f_3'(u_s)_0, \\ &\varepsilon_1 \cdot F_{24}'(u_1')_0 \cdot M_{\varepsilon-1} \\ &\qquad = (-e_2 \cdot \vartheta_{03}^2 + e_4 \cdot \vartheta_{23}^2) f_{24}'(u_s)_0 - e_5 \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_{03} \cdot f_{04}'(u_s)_0, \\ &\varepsilon_1 (F_{04}'(u_1')_0 \cdot M_{\varepsilon-1} + F_{04}'(u_2')_0 \cdot M_{\varepsilon+1}) \\ &\qquad = (e_2 \cdot \vartheta_{23}^2 + e_4 \cdot \vartheta_{03}^2) f_{04}'(u_s)_0 + e_5 \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_{03} \cdot f_{24}'(u_s)_0, \\ &\varepsilon_2 (F_{02}'(u_1')_0 \cdot M_{\varepsilon-1} + F_{02}'(u_2')_0 \cdot M_{\varepsilon+1}) \\ &\qquad = (e_2 \cdot \vartheta_{34}^2 + e_3 \cdot \vartheta_5^2) f_{02}'(u_s)_0 + e_5 \cdot \vartheta_5 \cdot \vartheta_{34} \cdot f_1'(u_s)_0, \\ &\varepsilon_2 (F_1'(u_1')_0 \cdot M_{\varepsilon-1} + F_1'(u_2')_0 \cdot M_{\varepsilon+1}) \\ &\qquad = (e_2 \cdot \vartheta_5^2 + e_3 \cdot \vartheta_{34}^2) f_1'(u_s)_0 + e_5 \cdot \vartheta_5 \cdot \vartheta_{34} \cdot f_{02}'(u_s)_0. \end{aligned}$$

In diesen Gleichungen ist gesetzt:

$$\varepsilon_1 = (-1)^{\frac{c_2-1}{2}}, \quad \varepsilon_2 = (-1)^{\frac{d_2-1}{2}}.$$

Hieraus folgen unmittelbar die Werte von M_0, M_1, M_2, M_3 (8):

$$\varepsilon_1 \cdot M_0 = \vartheta_{03} \cdot \vartheta_{14} \cdot \frac{\Theta_{34} . \Theta_4 . \Theta_5}{\vartheta_{34} . \vartheta_4 . \vartheta_5} \frac{(-e_2 . \vartheta_{03}^2 + e_4 . \vartheta_{23}^2) \vartheta_{12} . \vartheta_0 + e_5 . \vartheta_{23}^2 . \vartheta_{01} . \vartheta_2}{\Theta_{03} . \Theta_{12} . \Theta_0 . \Theta_{14}},$$

$$\varepsilon_1 \cdot M_1 = \vartheta_{03} \cdot \vartheta_{23} \cdot \frac{\Theta_{34} . \Theta_4 . \Theta_5}{\vartheta_{34} . \vartheta_4 . \vartheta_5} \cdot e_5 \cdot \frac{\vartheta_{14} . \vartheta_{01} . \vartheta_2 . \vartheta_{23}}{\Theta_{03} . \Theta_{12} . \Theta_0 . \Theta_{14}},$$

$$\varepsilon_1 \cdot M_2 = \vartheta_4 \cdot \vartheta_{14} \cdot \frac{\Theta_{34}^2 . \Theta_4^2 . \Theta_5^2}{\vartheta_{34}^2 . \vartheta_4^2 . \vartheta_5^2} \cdot e_5 \cdot \frac{\vartheta_{23} . \vartheta_{03} . \vartheta_4 . \vartheta_5^2 . \vartheta_{34}^2}{\Theta_{01} . \Theta_{12} . \Theta_{23} . \Theta_2 . \Theta_{03} . \Theta_0 . \Theta_{14}},$$

$$\varepsilon_1 \cdot M_3 = \vartheta_{03} \cdot \vartheta_{14} \cdot \frac{\vartheta_{23} . \Theta_{34}^2 . \Theta_4^2 . \Theta_5^2}{\Theta_{23} . \vartheta_{34}^2 . \vartheta_4^2 . \vartheta_5^2} \cdot$$
$$\frac{(-e_3 . \vartheta_{14}^2 + e_4 . \vartheta_4^2) \vartheta_{01} . \vartheta_{12} . \vartheta_2 . \vartheta_0 + e_5 . \vartheta_{34}^2 . \vartheta_4^2 . \vartheta_5^2 . \mu^2}{\Theta_{01} . \Theta_{12} . \Theta_2 . \Theta_{03} . \Theta_0 . \Theta_{14}}.$$

Dabei ist vermöge der früheren Betrachtungen (9):

$$M_0 . M_3 - M_1 . M_2 = M = a_0 . b_1 \cdot \frac{\Theta_{34}^3 . \Theta_4^3 . \Theta_5^3}{\vartheta_{34}^3 . \vartheta_4^3 . \vartheta_5^3} \cdot \frac{\vartheta_{01} . \vartheta_{12} . \vartheta_{23} . \vartheta_2 . \vartheta_{03} . \vartheta_0 . \vartheta_{14}}{\Theta_{01} . \Theta_{12} . \Theta_{23} . \Theta_2 . \Theta_{03} . \Theta_0 . \Theta_{14}}.$$

Es bleiben demnach noch acht Thetarelationen aus den obigen zwölf Gleichungen übrig. Dieselben lassen sich in übersichtlicher Weise darstellen, wenn wir die folgende Bezeichnungsweise einführen:

$$(10) \quad \begin{aligned} &(F_a'(u_1')_0 . M_0 + F_a'(u_2')_0 . M_2) f_a'(u_2)_0 \\ &- (F_a'(u_1')_0 . M_1 + F_a'(u_2')_0 . M_3) f_a'(u_1)_0 = d_a, \\ &(F_a'(u_1')_0 . M_0 + F_a'(u_2')_0 . M_2) f_b'(u_2)_0 \\ &- (F_a'(u_1')_0 . M_1 + F_a'(u_2')_0 . M_3) f_b'(u_1)_0 = d_a^b. \end{aligned}$$

Dann nehmen die obigen zwölf Gleichungen die Form an:

$$e_5 . \lambda_\varkappa^2 \cdot \frac{\vartheta_{12} . \vartheta_{01} . \vartheta_2 . \vartheta_0}{\Theta_5 . \vartheta_5} = \varepsilon_1 . d_3 = \varepsilon_2 . d_{13} = -\varepsilon_1 . d_{24} = -\varepsilon_1 . d_{04}$$
$$= -\varepsilon_2 . d_{02} = \varepsilon_2 . d_1,$$

$$(11) \quad \begin{aligned} \varepsilon_1 . d_3^{13} &= \quad (e_3 . \vartheta_{14}^2 - e_4 . \vartheta_4^2) \frac{\lambda_\varkappa^2 . \vartheta_{12} . \vartheta_{01} . \vartheta_2 . \vartheta_0}{\vartheta_4 . \vartheta_{14} . \vartheta_5 . \Theta_5}, \\ \varepsilon_2 . d_{13}^3 &= \quad (e_3 . \vartheta_4^2 + e_4 . \vartheta_{14}^2) \frac{\lambda_\varkappa^2 . \vartheta_{12} . \vartheta_{01} . \vartheta_2 . \vartheta_0}{\vartheta_4 . \vartheta_{14} . \vartheta_5 . \Theta_5}, \\ \varepsilon_1 . d_{24}^{04} &= \quad (e_2 . \vartheta_{03}^2 - e_4 . \vartheta_{23}^2) \frac{\lambda_\varkappa^2 . \vartheta_{12} . \vartheta_{01} . \vartheta_2 . \vartheta_0}{\vartheta_{03} . \vartheta_{23} . \vartheta_5 . \Theta_5}, \\ \varepsilon_1 . d_{04}^{24} &= -(e_2 . \vartheta_{23}^2 + e_4 . \vartheta_{03}^2) \frac{\lambda_\varkappa^2 . \vartheta_{12} . \vartheta_{01} . \vartheta_2 . \vartheta_0}{\vartheta_{03} . \vartheta_{23} . \vartheta_5 . \Theta_5}, \\ \varepsilon_2 . d_{02}^{1} &= \quad (e_2 . \vartheta_{34}^2 + e_3 . \vartheta_5^2) \frac{\lambda_\varkappa^2 . \vartheta_{12} . \vartheta_{01} . \vartheta_2 . \vartheta_0}{\vartheta_5 . \vartheta_{34} . \vartheta_5 . \Theta_5}, \\ \varepsilon_2 . d_1^{02} &= -(e_2 . \vartheta_5^2 + e_3 . \vartheta_{34}^2) \frac{\lambda_\varkappa^2 . \vartheta_{12} . \vartheta_{01} . \vartheta_2 . \vartheta_0}{\vartheta_5 . \vartheta_{34} . \vartheta_5 . \Theta_5}. \end{aligned}$$

Durch Anwendung der supplementären Transformation erhält man ein neues System von Formeln. Man kann dasselbe aus dem entwickelten erhalten, indem man an Stelle von e_a: e_a', von ϑ_a: Θ_a und umgekehrt setzt, ferner an Stelle von M_0, M_1, M_2, M_3 resp.: $\frac{3M_3}{M}$, $-\frac{3M_1}{M}$, $-\frac{3M_2}{M}$, $\frac{3M_0}{M}$ und endlich ε_2, ε_1 an Stelle von ε_1, ε_2. Durch Vergleichung erhält man die eleganten Thetarelationen:

$$(12)\quad \begin{aligned}
3(-e_3 \,.\, \vartheta_{14}^2 + e_4 \,.\, \vartheta_4^2) &= N(e_3' \,.\, \Theta_4^2 + e_4' \,.\, \Theta_{14}^2) \frac{\vartheta_4 \,.\, \vartheta_{14}}{\Theta_4 \,.\, \varepsilon \Theta_{14}},\\
3(e_3 \,.\, \vartheta_4^2 + e_4 \,.\, \vartheta_{14}^2) &= N(-e_3' \,.\, \Theta_{14}^2 + e_4' \,.\, \Theta_4^2) \frac{\vartheta_4 \,.\, \vartheta_{14}}{\Theta_4 \,.\, \varepsilon \Theta_{14}},\\
3(e_2 \,.\, \vartheta_{23}^2 + e_4 \,.\, \vartheta_{03}^2) &= N(e_2' \,.\, \Theta_{03}^2 - e_4' \,.\, \Theta_{23}^2) \frac{\vartheta_{23} \,.\, \vartheta_{03}}{\Theta_{23} \,.\, \Theta_{03}},\\
3(e_2 \,.\, \vartheta_{03}^2 - e_4 \,.\, \vartheta_{23}^2) &= N(e_2' \,.\, \Theta_{23}^2 + e_4' \,.\, \Theta_{03}^2) \frac{\vartheta_{23} \,.\, \vartheta_{03}}{\Theta_{23} \,.\, \Theta_{03}},\\
3(e_2 \,.\, \vartheta_5^2 + e_3 \,.\, \vartheta_{34}^2) &= N(e_2' \,.\, \Theta_{34}^2 + e_3' \,.\, \Theta_5^2) \frac{\vartheta_5 \,.\, \vartheta_{34}}{\Theta_5 \,.\, \Theta_{34}},\\
3(e_2 \,.\, \vartheta_{34}^2 + e_3 \,.\, \vartheta_5^2) &= N(e_2' \,.\, \Theta_5^2 + e_3' \,.\, \Theta_{34}^2) \frac{\vartheta_5 \,.\, \vartheta_{34}}{\Theta_5 \,.\, \Theta_{34}}.
\end{aligned}$$

In diesen Formeln ist gesetzt:

$$N = a_0 \cdot b_1 \cdot \frac{\Theta_{34} \,.\, \Theta_5 \,.\, \Theta_{03} \,.\, \Theta_{23} \,.\, \Theta_4 \,.\, \Theta_{14}}{\vartheta_{34} \,.\, \vartheta_5 \,.\, \vartheta_{03} \,.\, \vartheta_{23} \,.\, \vartheta_4 \,.\, \vartheta_{14}}.$$

Auf diese Weise haben sich eine Anzahl von Thetarelationen ergeben. Dieselben zerfallen in zwei Kategorien. In der einen treten lediglich die Quotienten von Thetafunktionen auf d. h. $\frac{\vartheta_a}{\vartheta_5}$, $\frac{\Theta_a}{\Theta_5}$; in der andern findet dasselbe nicht statt. Durch Fortsetzung des Differenzierens kann die Zahl der Relationen bis ins unendliche vermehrt werden.

Die ersten Relationen, welche in diesem Paragraphen entwickelt worden sind, rühren von Königsberger her. Dieselben lassen sich auf rein arithmetischem Wege in einfacher Weise folgendermaſsen ableiten.

Setzt man:

$$(13)\quad \begin{aligned}
\mu &= \frac{2i + 1 - (2j + 1)}{4},\\
m &= \frac{2i + 1 + 3(2j + 1)}{4},
\end{aligned}$$

so folgt umgekehrt:

$$(14)\qquad \begin{aligned} 2i + 1 &= m + 3\mu, \\ 2j + 1 &= m - \mu, \end{aligned}$$

und es ist:

$$(15)\qquad m^2 + 3\mu^2 = \left(\frac{2i+1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{2j+1}{2}\right)^2.$$

Fügen wir die Bedingung hinzu, daſs $m + \mu$ eine ungerade Zahl ist, dann folgt, daſs einem jeden solchen Wertsysteme m, μ ein ganzzahliges Wertsystem $2i + 1$, $2j + 1$ entspricht. Das umgekehrte findet nicht statt. Es muſs:

$$2i + 1 \equiv 2j + 1 \bmod 4$$

sein, damit sich ganzzahlige Werte für m und μ ergeben. Lassen wir daher unter der Einschränkung, daſs:

$$m + \mu \equiv 1 \bmod 2$$

ist, m und μ sowohl, als auch i und j alle ganzen Zahlen durchlaufen, so wird die Form $m^2 + 3\mu^2$ dieselben Zahlen darstellen wie die Form:

$$\left(\frac{2i+1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{2j+1}{2}\right)^2$$

und zwar die zweite doppelt so oft, wie die erste.

Setzen wir ferner:

$$(16)\qquad \begin{aligned} 2n + 1 &= l + 3\lambda, \\ 2\nu + 1 &= l - \lambda,. \end{aligned}$$

so gilt das analoge von den Formen

$$\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{2\nu+1}{2}\right)^2 \quad \text{und} \quad l^2 + 3\lambda^2.$$

Zu gleicher Zeit folgt die Gleichung:

$$(17)\qquad m(2n+1) + 3\mu(2\nu+1) = l(2i+1) + 3\lambda(2j+1).$$

Mithin werden die beiden Potenzreihen:

$$\sum_m \sum_\mu \sum_n \sum_\nu x^{m^2+3\mu^2} \cdot y^{m(2n+1)+3\mu(2\nu+1)} \cdot z^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{2\nu+1}{2}\right)^2}$$

und:

$$\sum_l \sum_\lambda \sum_i \sum_j x^{\left(\frac{2i+1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{2j+1}{2}\right)^2} \cdot y^{l(2i+1)+3\lambda(2j+1)} \cdot z^{l^2+3\lambda^2}$$

einander gleich, wenn die Voraussetzung gemacht wird:

$$m + \mu \equiv l + \lambda \equiv 1 \bmod 2.$$

Im übrigen ist die Summation nach allen Indices von $-\infty$ bis $+\infty$ zu erstrecken. Setzt man nun:

$$x = e^{\pi i \tau_{11}}, \quad z = e^{\pi i \tau_{22}}, \quad y = e^{\pi i \tau_{12}},$$

so hat man für den Repräsentanten:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(18)\begin{cases} \vartheta_4 \,.\, \Theta_4 - \vartheta_{03} \,.\, \Theta_{03} \\ = 2 \sum\limits^{m} \sum\limits^{\mu} \sum\limits^{n} \sum\limits^{\nu} x^{m^2+3\mu^2} \,.\, y^{m(2n+1)+3\mu(2\nu+1)} \,.\, z^{\frac{(2n+1)^2+3(2\nu+1)^2}{4}}, \\ \qquad\qquad m + \mu \equiv 1 \bmod 2, \\ \vartheta_{01} \,.\, \Theta_{01} - \vartheta_2 \,.\, \Theta_2 \\ = 2 \sum\limits^{l} \sum\limits^{\lambda} \sum\limits^{i} \sum\limits^{j} x^{\left(\frac{2i+1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{2j+1}{2}\right)^2} \,.\, y^{l(2i+1)+3\lambda(2j+1)} \,.\, z^{l^2+3\lambda^2}, \\ \qquad\qquad \lambda + l \equiv 1 \bmod 2. \end{cases}$$

Mithin ergiebt sich die Gleichung:

$$(19) \qquad \vartheta_4 \cdot \Theta_4 - \vartheta_{03} \cdot \Theta_{03} = \vartheta_{01} \cdot \Theta_{01} - \vartheta_2 \cdot \Theta_2.$$

Allerdings ist dieselbe nur für einen bestimmten Repräsentanten abgeleitet — indessen würde die Ableitung für die andern ganz analog sein.

§ 38.*)

Die Transformation fünften Grades.

Im Falle $n = 5$ können wir setzen:

$$\begin{aligned}(1)\ \vartheta_5((v', \tau')) = {} & e_1 \,.\, \vartheta_5((v))^3 \,.\, \vartheta_1((v))^2 + e_2 \,.\, \vartheta_5((v))^3 \,.\, \vartheta_{02}((v))^2 \\ & + e_3 \,.\, \vartheta_5((v))^3 \,.\, \vartheta_{34}((v))^2 + e_4 \,.\, \vartheta_5((v))^2 \,.\, \vartheta_1((v)) \,.\, \vartheta_{02}((v)) \,.\, \vartheta_{34}((v)) \\ & + e_5 \,.\, \vartheta_5((v)) \,.\, \vartheta_1((v))^4 + e_6 \,.\, \vartheta_5((v)) \,.\, \vartheta_{02}((v))^4 \\ & + e_7 \,.\, \vartheta_5((v)) \,.\, \vartheta_{34}((v))^4 + e_8 \,.\, \vartheta_5((v)) \,.\, \vartheta_{02}((v))^2 \,.\, \vartheta_{34}((v))^2 \\ & + e_9 \,.\, \vartheta_5((v)) \,.\, \vartheta_{34}((v))^2 \,.\, \vartheta_1((v))^2 + e_{10} \,.\, \vartheta_5((v)) \,.\, \vartheta_1((v))^2 \,.\, \vartheta_{02}((v))^2 \\ & + e_{11} \,.\, \vartheta_1((v))^3 \,.\, \vartheta_{02}((v)) \,.\, \vartheta_{34}((v)) + e_{12} \,.\, \vartheta_1((v)) \,.\, \vartheta_{02}((v))^3 \,.\, \vartheta_{34}((v)) \\ & + e_{13} \,.\, \vartheta_1((v)) \,.\, \vartheta_{02}((v)) \,.\, \vartheta_{34}((v))^3. \end{aligned}$$

---

*) Cf. Krause: Mathem. Annalen 16. Acta mathematica 3.

Mit Hülfe der Substitution halber Perioden ergiebt sich dann (2):

$$e_1 = \frac{\Theta_{14} . \vartheta_{14}^3 - \Theta_4 . \vartheta_4^3}{\vartheta_4^2 . \vartheta_{14}^2 (\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4)}, \qquad e_5 = \frac{\Theta_{14} . \vartheta_4 + \Theta_4 . \vartheta_{14}}{\vartheta_4 . \vartheta_{14} (\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4)},$$

$$e_2 = \frac{\Theta_{03} . \vartheta_{03}^3 - \Theta_{23} . \vartheta_{23}^3}{\vartheta_{23}^2 . \vartheta_{03}^2 (\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4)}, \qquad e_6 = \frac{\Theta_{03} . \vartheta_{23} + \Theta_{23} . \vartheta_{03}}{\vartheta_{03} . \vartheta_{23} (\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4)},$$

$$e_3 = \frac{\Theta_5 . \vartheta_5^3 - \Theta_{34} . \vartheta_{34}^3}{\vartheta_{34}^2 . \vartheta_5^2 (\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4)}, \qquad e_7 = \frac{\Theta_{34} . \vartheta_5 - \Theta_5 . \vartheta_{34}}{\vartheta_{34} . \vartheta_5 (\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4)}.$$

$$\begin{aligned}\frac{\Theta_2}{\vartheta_2} - \frac{\Theta_{01}}{\vartheta_{01}} + \frac{\Theta_0}{\vartheta_0} - \frac{\Theta_{12}}{\vartheta_{12}} = {} & 2e_1 . \vartheta_4^2 . \vartheta_{14}^2 + (e_5 - e_6 - e_7)(\vartheta_4^4 - \vartheta_{14}^4) \\ & + 2e_8 \cdot \vartheta_4^2 \cdot \vartheta_{14}^2 + e_{11} \cdot \frac{\vartheta_5^2 . \vartheta_{34}^2 . \vartheta_{03}^2 . \vartheta_{23}^2}{\vartheta_2 . \vartheta_0 . \vartheta_{01} . \vartheta_{12}} \\ & + e_{12} \cdot \frac{\vartheta_4^2 . \vartheta_{14}^2 (\vartheta_0^2 . \vartheta_{12}^2 - \vartheta_2^2 . \vartheta_{01}^2)}{\vartheta_2 . \vartheta_0 . \vartheta_{01} . \vartheta_{12}} \\ & - e_{13} \cdot \frac{\vartheta_4^2 . \vartheta_{14}^2 (\vartheta_{01}^2 . \vartheta_{12}^2 + \vartheta_2^2 . \vartheta_0^2)}{\vartheta_2 . \vartheta_0 . \vartheta_{01} . \vartheta_{12}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\Theta_2}{\vartheta_2} - \frac{\Theta_{01}}{\vartheta_{01}} - \frac{\Theta_0}{\vartheta_0} + \frac{\Theta_{12}}{\vartheta_{12}} = {} & 2e_2 . \vartheta_{03}^2 . \vartheta_{23}^2 + (e_5 - e_6 - e_7)(\vartheta_{03}^4 - \vartheta_{23}^4) \\ & - 2e_9 \cdot \vartheta_{03}^2 \cdot \vartheta_{23}^2 + e_{11} \cdot \frac{\vartheta_{03}^2 . \vartheta_{23}^2 (\vartheta_0^2 . \vartheta_{12}^2 - \vartheta_{01}^2 . \vartheta_2^2)}{\vartheta_2 . \vartheta_0 . \vartheta_{01} . \vartheta_{12}} \\ & + e_{12} \cdot \frac{\vartheta_4^2 . \vartheta_{14}^2 . \vartheta_5^2 . \vartheta_{34}^2}{\vartheta_2 . \vartheta_0 . \vartheta_{01} . \vartheta_{12}} \\ & - e_{13} \cdot \frac{\vartheta_{03}^2 . \vartheta_{23}^2 (\vartheta_2^2 . \vartheta_{12}^2 + \vartheta_0^2 . \vartheta_{01}^2)}{\vartheta_2 . \vartheta_0 . \vartheta_{01} . \vartheta_{12}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\Theta_2}{\vartheta_2} + \frac{\Theta_{01}}{\vartheta_{01}} + \frac{\Theta_0}{\vartheta_0} + \frac{\Theta_{12}}{\vartheta_{12}} = {} & 2e_3 . \vartheta_5^2 . \vartheta_{34}^2 + (e_5 + e_6 + e_7)(\vartheta_5^4 + \vartheta_{34}^4) \\ & + 2e_{10} . \vartheta_5^2 . \vartheta_{34}^2 + e_{11} \cdot \frac{\vartheta_5^2 . \vartheta_{34}^2 (\vartheta_0^2 . \vartheta_2^2 + \vartheta_{01}^2 . \vartheta_{12}^2)}{\vartheta_2 . \vartheta_0 . \vartheta_{01} . \vartheta_{12}} \\ & + e_{12} \cdot \frac{\vartheta_5^2 . \vartheta_{34}^2 (\vartheta_2^2 . \vartheta_{12}^2 + \vartheta_0^2 . \vartheta_{01}^2)}{\vartheta_2 . \vartheta_0 . \vartheta_{01} . \vartheta_{12}} \\ & - e_{13} \cdot \frac{\vartheta_{03}^2 . \vartheta_{23}^2 . \vartheta_4^2 . \vartheta_{14}^2}{\vartheta_2 . \vartheta_0 . \vartheta_{01} . \vartheta_{12}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Theta_2 = {} & - e_1 . \vartheta_2^3 . \vartheta_{12}^2 - e_2 . \vartheta_2^3 . \vartheta_0^2 + e_3 . \vartheta_2^3 . \vartheta_{01}^2 - e_4 . \vartheta_2^2 . \vartheta_{01} . \vartheta_{12} . \vartheta_0 \\ & + e_5 . \vartheta_2 . \vartheta_{12}^4 + e_6 . \vartheta_2 . \vartheta_0^4 + e_7 . \vartheta_2 . \vartheta_{01}^4 - e_8 . \vartheta_2 . \vartheta_0^2 . \vartheta_{01}^2 \\ & - e_9 . \vartheta_2 . \vartheta_{12}^2 . \vartheta_{01}^2 + e_{10} . \vartheta_2 . \vartheta_0^2 . \vartheta_{12}^2 + e_{11} . \vartheta_{12}^3 . \vartheta_0 . \vartheta_{01} \\ & + e_{12} . \vartheta_{12} . \vartheta_0^3 . \vartheta_{01} - e_{13} . \vartheta_{12} . \vartheta_0 . \vartheta_{01}^3.\end{aligned}$$

Diese Gleichungen lehren die Konstanten $e_1 \ldots e_{10}$ kennen, wenn die Konstanten e_{11}, e_{12}, e_{13} gegeben sind. Durch Anwendung der supplementären Transformation erhält man analoge Ausdrücke für die Gröfsen e_a'.

Durch Differenzieren ergeben sich für e_{11}, e_{12}, e_{13} die Werte:

$$(3)\qquad \begin{aligned} e_{11} &= \frac{\Theta_5 \,.\, \vartheta_5 (d_1 \,.\, \vartheta_5^2 + d_{02} \,.\, \vartheta_{34}^2)}{\lambda_\varkappa^2 \,.\, \vartheta_{12} \,.\, \vartheta_{01} \,.\, \vartheta_2 \,.\, \vartheta_0 (\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4)}, \\ e_{12} &= \frac{\Theta_5 \,.\, \vartheta_5 (d_{13} \,.\, \vartheta_4^2 - d_3 \,.\, \vartheta_{14}^2)}{\lambda_\varkappa^2 \,.\, \vartheta_{12} \,.\, \vartheta_{01} \,.\, \vartheta_2 \,.\, \vartheta_0 (\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4)}, \\ e_{13} &= \frac{\Theta_5 \,.\, \vartheta_5 (d_{24} \,.\, \vartheta_{23}^2 + d_{04} \,.\, \vartheta_{03}^2)}{\lambda_\varkappa^2 \,.\, \vartheta_{12} \,.\, \vartheta_{01} \,.\, \vartheta_2 \,.\, \vartheta_0 (\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4)}. \end{aligned}$$

Zu gleicher Zeit ergeben sich die Relationen (4):

$$\begin{aligned} d_1 \,.\, \vartheta_5^2 + d_{02} \,.\, \vartheta_{34}^2 &= d_{24} \,.\, \vartheta_{03}^2 - d_{04} \,.\, \vartheta_{23}^2, \\ d_3 \,.\, \vartheta_{14}^2 - d_{13} \,.\, \vartheta_4^2 &= d_1 \,.\, \vartheta_{34}^2 + d_{02} \,.\, \vartheta_5^2, \\ - d_{24} \,.\, \vartheta_{23}^2 - d_{04} \,.\, \vartheta_{03}^2 &= d_{13} \,.\, \vartheta_{14}^2 + d_3 \,.\, \vartheta_4^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_3^{13} &= -(e_6 \,.\, \vartheta_{14}^4 + e_7 \,.\, \vartheta_4^4 - e_8 \,.\, \vartheta_{14}^2 \,.\, \vartheta_4^2) \frac{\lambda_\varkappa^2 . \vartheta_{12} . \vartheta_{01} . \vartheta_2 . \vartheta_0}{\vartheta_4 . \vartheta_{14} . \Theta_5 . \vartheta_5}, \\ d_{13}^3 &= (e_6 \,.\, \vartheta_4^4 + e_7 \,.\, \vartheta_{14}^4 + e_8 \,.\, \vartheta_{14}^2 \,.\, \vartheta_4^2) \frac{\lambda_\varkappa^2 . \vartheta_{12} . \vartheta_{01} . \vartheta_2 . \vartheta_0}{\vartheta_4 . \vartheta_{14} . \Theta_5 . \vartheta_5}, \\ d_{24}^{04} &= -(e_5 \,.\, \vartheta_{03}^4 + e_7 \,.\, \vartheta_{23}^4 - e_9 \,.\, \vartheta_{23}^2 \,.\, \vartheta_{03}^2) \frac{\lambda_\varkappa^2 . \vartheta_{12} . \vartheta_{01} . \vartheta_2 . \vartheta_0}{\vartheta_{23} . \vartheta_{03} . \Theta_5 . \vartheta_5}, \\ d_{04}^{24} &= (e_5 \,.\, \vartheta_{23}^4 + e_7 \,.\, \vartheta_{03}^4 + e_9 \,.\, \vartheta_{23}^2 \,.\, \vartheta_{03}^2) \frac{\lambda_\varkappa^2 . \vartheta_{12} . \vartheta_{01} . \vartheta_2 . \vartheta_0}{\vartheta_{23} . \vartheta_{03} . \Theta_5 . \vartheta_5}, \\ d_{02}^1 &= (e_5 \,.\, \vartheta_{34}^4 + e_6 \,.\, \vartheta_5^4 + e_{10} \,.\, \vartheta_5^2 \,.\, \vartheta_{34}^2) \frac{\lambda_\varkappa^2 . \vartheta_{12} . \vartheta_{01} . \vartheta_2 . \vartheta_0}{\vartheta_5 . \vartheta_{34} . \Theta_5 . \vartheta_5}, \\ d_1^{02} &= -(e_5 \,.\, \vartheta_5^4 + e_6 \,.\, \vartheta_{34}^4 + e_{10} \,.\, \vartheta_5^2 \,.\, \vartheta_{34}^2) \frac{\lambda_\varkappa^2 . \vartheta_{12} . \vartheta_{01} . \vartheta_2 . \vartheta_0}{\vartheta_5 . \vartheta_{34} . \Theta_5 . \vartheta_5}. \end{aligned}$$

Durch Anwendung der supplementären Transformation erhält man zunächst drei analoge Ausdrücke für die Gröfsen e_{11}', e_{12}', e_{13}', sodann die drei Relationen:

$$(5)\qquad \begin{aligned} d_1 \,.\, \Theta_5^2 + d_{02} \,.\, \Theta_{34}^2 &= d_{24} \,.\, \Theta_{03}^2 - d_{04} \,.\, \Theta_{23}^2, \\ d_3 \,.\, \Theta_{14}^2 - d_{13} \,.\, \Theta_4^2 &= d_1 \,.\, \Theta_{34}^2 + d_{02} \,.\, \Theta_5^2, \\ - d_{24} \,.\, \Theta_{23}^2 - d_{04} \,.\, \Theta_{03}^2 &= d_{13} \,.\, \Theta_{14}^2 + d_3 \,.\, \Theta_4^2, \end{aligned}$$

und endlich sechs Ausdrücke für die Gröfsen d_a^b. Vergleicht man dieselben mit den vorhin gefundenen, so erhält man die Relationen (6):

$$\begin{aligned} & 5(e_6 \,.\, \vartheta_{14}^2 + e_7 \,.\, \vartheta_4^2 - e_8 \,.\, \vartheta_{14}^2 . \vartheta_4^2) \\ &= N(e_6' \,.\, \Theta_4^4 + e_7' \,.\, \Theta_{14}^4 + e_8' \,.\, \Theta_{14}^2 \,.\, \Theta_4^2) \frac{\vartheta_4 \,.\, \vartheta_{14}}{\Theta_4 \,.\, \Theta_{14}}, \\ & 5(e_6 \,.\, \vartheta_4^4 + e_7 \,.\, \vartheta_{14}^4 + e_8 \,.\, \vartheta_{14}^2 \,.\, \vartheta_4^2) \\ &= N(e_6' \,.\, \Theta_{14}^4 + e_7' \,.\, \Theta_4^4 - e_8' \,.\, \Theta_{14}^2 \,.\, \Theta_4^2) \frac{\vartheta_4 \,.\, \vartheta_{14}}{\Theta_4 \,.\, \Theta_{14}}, \end{aligned}$$

$$5(e_5 \,.\, \vartheta_{03}^4 + e_7 \,.\, \vartheta_{23}^4 - e_9 \,.\, \vartheta_{23}^2 \,.\, \vartheta_{03}^2)$$
$$= N(e_5' \,.\, \Theta_{23}^4 + e_7' \,.\, \Theta_{03}^4 + e_9' \,.\, \Theta_{23}^2 \,.\, \Theta_{03}^2)\,\frac{\vartheta_{23} \,.\, \vartheta_{03}}{\Theta_{23} \,.\, \Theta_{03}},$$
$$5(e_5 \,.\, \vartheta_{23}^4 + e_7 \,.\, \vartheta_{03}^4 + e_9 \,.\, \vartheta_{23}^2 \,.\, \vartheta_{03}^2)$$
$$= N(e_5' \,.\, \Theta_{03}^4 + e_7' \,.\, \Theta_{23}^4 - e_9' \,.\, \Theta_{23}^2 \,.\, \Theta_{03}^2)\,\frac{\vartheta_{23} \,.\, \vartheta_{03}}{\Theta_{23} \,.\, \Theta_{03}},$$
$$5(e_5 \,.\, \vartheta_{34}^4 + e_6 \,.\, \vartheta_5^4 + e_{10} \,.\, \vartheta_5^2 \,.\, \vartheta_{34}^2)$$
$$= N(e_5' \,.\, \Theta_5^4 + e_6' \,.\, \Theta_{34}^4 + e_{10}' \,.\, \Theta_5^2 \,.\, \Theta_{34}^2)\,\frac{\vartheta_5 \,.\, \vartheta_{34}}{\Theta_5 \,.\, \Theta_{34}},$$
$$5(e_5 \,.\, \vartheta_5^4 + e_6 \,.\, \vartheta_{34}^4 + e_{10} \,.\, \vartheta_5^2 \,.\, \vartheta_{34}^2)$$
$$= N(e_5' \,.\, \Theta_{34}^4 + e_6' \,.\, \Theta_5^4 + e_{10}' \,.\, \Theta_5^2 \,.\, \Theta_{34}^2)\,\frac{\vartheta_5 \,.\, \vartheta_{34}}{\Theta_5 \,.\, \Theta_{34}}.$$

Hieraus folgen die Thetarelationen:

$$5\left(\frac{\Theta_{34}}{\vartheta_{34}} - \frac{\Theta_5}{\vartheta_5} + \frac{\Theta_{23}}{\vartheta_{23}} + \frac{\Theta_{03}}{\vartheta_{03}}\right)$$
$$= a_0 \,.\, b_1\left(\frac{\vartheta_{34}}{\Theta_{34}} - \frac{\vartheta_5}{\Theta_5} + \frac{\vartheta_{23}}{\Theta_{23}} + \frac{\vartheta_{03}}{\Theta_{03}}\right)\frac{\Theta_{34} \,.\, \Theta_5 \,.\, \Theta_{23} \,.\, \Theta_{03}}{\vartheta_{34} \,.\, \vartheta_5 \,.\, \vartheta_{23} \,.\, \vartheta_{03}},$$
$$5\left(\frac{\Theta_4}{\vartheta_4} + \frac{\Theta_{14}}{\vartheta_{14}} + \frac{\Theta_{34}}{\vartheta_{34}} - \frac{\Theta_5}{\vartheta_5}\right)$$
$$= a_0 \,.\, b_1\left(\frac{\vartheta_4}{\Theta_4} + \frac{\vartheta_{14}}{\Theta_{14}} + \frac{\vartheta_{34}}{\Theta_{34}} - \frac{\vartheta_5}{\Theta_5}\right)\frac{\Theta_4 \,.\, \Theta_{14} \,.\, \Theta_{34} \,.\, \Theta_5}{\vartheta_4 \,.\, \vartheta_{14} \,.\, \vartheta_{34} \,.\, \vartheta_5},$$
$$-5\left(\frac{\Theta_{23}}{\vartheta_{23}} + \frac{\Theta_{03}}{\vartheta_{03}} - \frac{\Theta_4}{\vartheta_4} - \frac{\Theta_{14}}{\vartheta_{14}}\right)$$
$$= a_0 \,.\, b_1\left(\frac{\vartheta_{23}}{\Theta_{23}} + \frac{\vartheta_{03}}{\Theta_{03}} - \frac{\vartheta_4}{\Theta_4} - \frac{\vartheta_{14}}{\Theta_{14}}\right)\frac{\Theta_{23} \,.\, \Theta_{03} \,.\, \Theta_4 \,.\, \Theta_{14}}{\vartheta_{23} \,.\, \vartheta_{03} \,.\, \vartheta_4 \,.\, \vartheta_{14}}.$$

Auf diese Weise sind die 13 Konstanten $e_1 \ldots e_{13}$ durch die Gröfsen ϑ_a, Θ_a, M_0, M_1, M_2, M_3 ausgedrückt, während sich zwischen diesen Gröfsen selbst eine Reihe von Beziehungen ergeben haben. Aus diesen können die Gröfsen M_0, M_1, M_2, M_3 als Funktionen von ϑ_a und Θ_a dargestellt werden. Da die Ausdrücke ziemlich komplizierter Natur werden, begnügen wir uns anzudeuten, wie man zu ihnen gelangen kann.

Aus den Gleichungen, die für die Gröfsen d_a gefunden waren, ergeben sich die Proportionen (8):

$$d_3 : d_{13} : d_{24} : d_{04} : d_{02} : d_1$$
$$= \Theta_4^2 \,.\, \vartheta_{03}^2 + \Theta_{03}^2 \,.\, \vartheta_4^2 - \Theta_5^2 \,.\, \vartheta_{12}^2 - \Theta_{12}^2 \,.\, \vartheta_5^2 + \Theta_0^2 \,.\, \vartheta_{34}^2 + \Theta_{34}^2 \,.\, \vartheta_0^2 :$$
$$\Theta_{14}^2 \,.\, \vartheta_{03}^2 + \Theta_{03}^2 \,.\, \vartheta_{14}^2 + \Theta_5^2 \,.\, \vartheta_2^2 + \Theta_2^2 \,.\, \vartheta_5^2 - \Theta_{01}^2 \,.\, \vartheta_{34}^2 - \Theta_{34}^2 \,.\, \vartheta_{01}^2 :$$
$$-\Theta_{03}^2 \,.\, \vartheta_{23}^2 - \Theta_{23}^2 \,.\, \vartheta_{03}^2 - \Theta_0^2 \,.\, \vartheta_2^2 - \Theta_2^2 \,.\, \vartheta_0^2 + \Theta_{01}^2 \,.\, \vartheta_{12}^2 + \Theta_{12}^2 \,.\, \vartheta_{01}^2 :$$

$$
\begin{aligned}
&-\Theta_{03}^2.\vartheta_{03}^2+\Theta_{23}^2.\vartheta_{23}^2-\Theta_{14}^2.\vartheta_{14}^2-\Theta_4^2.\vartheta_4^2-\Theta_0^2.\vartheta_0^2+\Theta_2^2.\vartheta_2^2\\
&\qquad-\Theta_{01}^2.\vartheta_{01}^2+\Theta_{12}^2.\vartheta_{12}^2+\Theta_5^2.\vartheta_5^2-\Theta_{34}^2.\vartheta_{34}^2:\\
&\Theta_{23}^2.\vartheta_{34}^2+\Theta_{34}^2.\vartheta_{23}^2-\Theta_{14}^2.\vartheta_{12}^2-\Theta_{12}^2.\vartheta_{14}^2-\Theta_4^2.\vartheta_2^2-\Theta_2^2.\vartheta_4^2:\\
&-\Theta_{23}^2.\vartheta_5^2-\Theta_5^2.\vartheta_{23}^2+\Theta_{14}^2.\vartheta_0^2+\Theta_0^2.\vartheta_{14}^2+\Theta_4^2.\vartheta_{01}^2+\Theta_{01}^2.\vartheta_4^2.
\end{aligned}
$$

Sind aber die Verhältnisse der Gröfsen d_a bestimmt, so sind es die Verhältnisse der Gröfsen M auch, da die Beziehungen bestehen:

$$
(9)\quad
\begin{aligned}
d_3 &= \frac{\vartheta_{01}.\Theta_{01}.\vartheta_{12}.\Theta_{12}.\vartheta_{23}.\Theta_{23}.\vartheta_2.\Theta_2.\vartheta_{03}.\Theta_{03}.\vartheta_0.\Theta_0.\vartheta_{14}.\Theta_{14}}{\vartheta_{34}^2.\Theta_{34}^2.\vartheta_4^2.\Theta_4^2.\vartheta_5^2.\Theta_5^2} M_2,\\
d_{13} &= \frac{\vartheta_{23}.\Theta_{23}.\vartheta_{03}.\Theta_{03}}{\vartheta_4.\Theta_4}(M_0.\mu^2+M_2.\mu^2.\mu_1^2-M_1-M_3.\mu_1^2),\\
d_{24} &= -\frac{\vartheta_{03}.\Theta_{03}.\vartheta_{12}.\Theta_{12}.\vartheta_0.\Theta_0.\vartheta_{14}.\Theta_{14}}{\vartheta_{34}.\Theta_{34}.\vartheta_4.\Theta_4.\vartheta_5.\Theta_5}.M_1,\\
d_{04} &= \frac{\vartheta_{14}.\Theta_{14}.\vartheta_{01}.\Theta_{01}.\vartheta_2.\Theta_2.\vartheta_{23}.\Theta_{23}}{\vartheta_{34}.\Theta_{34}.\vartheta_4.\Theta_4.\vartheta_5.\Theta_5}(M_0+M_2-M_1-M_3),\\
d_{02} &= \frac{\vartheta_{12}.\Theta_{12}.\vartheta_{01}.\Theta_{01}}{\vartheta_5.\Theta_5}(M_0.\lambda^2+M_2.\lambda^2.\lambda_1^2-M_1-M_3.\lambda_1^2),\\
d_1 &= \frac{\vartheta_2.\Theta_2.\vartheta_0.\Theta_0}{\vartheta_{34}.\Theta_{34}}(M_0.\varkappa^2+M_2.\varkappa^2.\varkappa_1^2-M_1-M_3.\varkappa_1^2).
\end{aligned}
$$

Sind aber die Verhältnisse der Gröfsen M_a bestimmt, so sind es die Gröfsen selbst auch.

Hiermit sind alle Konstanten, die bei der Transformation fünften Grades auftreten, als Funktionen von ϑ_a und Θ_a bestimmt, während zwischen diesen Gröfsen selbst sich eine Reihe von Relationen ergeben haben.

§ 39.*)

Die allgemeine Transformation unpaaren Grades. Weitere Methoden der Koefficientenbestimmung.

Aufser der bisher entwickelten Methode der Koefficientenbestimmung giebt es noch andere. Denken wir uns dazu ein Quadrupel transformierter Funktionen vorgelegt, welches aus zwei geraden und zwei ungeraden Funktionen besteht, etwa das Quadrupel: $\Pi_5(v_1, v_2)$, $\Pi_1(v_1, v_2)$, $\Pi_{02}(v_1, v_2)$, $\Pi_{34}(v_1, v_2)$, so läfst sich eine jede dieser vier Funktionen in bekannter Weise ganz und rational durch die Funktionen $\vartheta_5(v_1, v_2)$, $\vartheta_1(v_1, v_2)$, $\vartheta_{02}(v_1, v_2)$, $\vartheta_{34}(v_1, v_2)$ ausdrücken, so zwar, dafs die Konstanten in allen vier Gleichungen die nämlichen sind.

*) Cf. Brioschi: Comptes rendus. 1858. Königsberger: Crelle 67.

Vermehren wir nun v_1 und v_2 bei beliebig vorgelegter Transformation n^{ten} Grades um resp.:

$$\frac{1}{n}(\quad d_3 - a_3\,\tau_{11} - b_3\,\tau_{12}), \quad \frac{1}{n}(\quad c_3 - a_3\,\tau_{12} - b_3\,\tau_{22}),$$

$$\frac{1}{n}(\quad d_2 - a_2\,\tau_{11} - b_2\,\tau_{12}), \quad \frac{1}{n}(\quad c_2 - a_2\,\tau_{12} - b_2\,\tau_{22}),$$

$$\frac{1}{n}(-d_0 + a_0\,\tau_{11} + b_0\,\tau_{12}), \quad \frac{1}{n}(-c_0 + a_0\,\tau_{12} + b_0\,\tau_{22}),$$

$$\frac{1}{n}(-d_1 + a_1\,\tau_{11} + b_1\,\tau_{12}), \quad \frac{1}{n}(-c_1 + a_1\,\tau_{12} + b_1\,\tau_{22}),$$

so bleiben die transformierten Funktionen, vom Vorzeichen abgesehen, ungeändert, es wird also jedenfalls die Funktion $\Pi_{02}(v_1, v_2)$ auch nach der Substitution immer der Null gleich sein, wenn $v_1 = v_2 = 0$ gesetzt wird. Nun sind aber nach dem Modul n für einen jeden Repräsentanten zwei der soeben hingeschriebenen Paare von Null verschieden. Wir wollen sie bezeichnen durch $\omega_\alpha, w_\alpha; \omega_\beta, w_\beta$. Dann wird das analoge wie vorhin stattfinden, wenn wir an Stelle von v_1 und v_2 resp. setzen:

$$v_1 + m\,.\,\omega_\alpha + m_1\,.\,\omega_\beta, \quad v_2 + m\,.\,w_\alpha + m_1\,.\,w_\beta.$$

Setzen wir nun der Reihe nach

$$m = 1,\ 2, \cdots \frac{n-1}{2},\ m_1 = 1,\ 2, \cdots \frac{n-1}{2},$$

$$m = 1,\ 2, \cdots \frac{n-1}{2},\ m_1 = -1, -2, \cdots -\frac{n-1}{2},$$

$$m = 0,\ m_1 = 1,\ 2, \cdots \frac{n-1}{2};\ m = 1,\ 2, \cdots \frac{n-1}{2},\ m_1 = 0,$$

so erhalten wir eine Reihe linearer Gleichungen, deren Unbekannten die gesuchten Koefficienten sind, deren linke Seiten ferner der Null gleich sind. Diese Gleichungen genügen, um die Quotienten der Konstanten zu bestimmen und zwar erhalten wir den

Lehrsatz.

Die Quotienten der $\frac{n^2+1}{2}$ Konstanten, welche in den Ausdrücken der transformierten Funktionen $\Pi_5(v_1, v_2)$, $\Pi_{02}(v_1, v_2)$, $\Pi_1(v_1, v_2)$, $\Pi_{34}(v_1, v_2)$ auftreten, lassen sich rational durch die Gröfsen:

$$\frac{\vartheta_a(m\,.\,\omega_\alpha + m_1\,.\,\omega_\beta,\ m\,.\,w_\alpha + m_1\,.\,w_\beta)}{\vartheta_5(m\,.\,\omega_\alpha + m_1\,.\,\omega_\beta,\ m\,.\,w_\alpha + m_1\,.\,w_\beta)}\ (a = 1, 02, 34)$$

ausdrücken, wobei m und m_1 die vorhin definierten Werte annehmen können.

Wir haben bei den soeben angestellten Betrachtungen ein Quadrupel transformierter Funktionen zu Grunde gelegt, welches aus zwei geraden und zwei ungeraden Funktionen besteht. Es ist nicht schwer nachzuweisen, dafs das analoge Resultat auch für den Fall bestehen bleibt, dafs das Quadrupel aus vier geraden Funktionen besteht. Die Form, in welche die Koefficienten gebracht werden können, ist eine mannigfache. Legen wir wiederum ein spezielles Quadrupel zugrunde, so können wir mit Hülfe der Substitution halber Perioden auch folgenden Satz aussprechen.

Die Verhältnisse der $\frac{n^2+1}{2}$ Konstanten, welche in den Ausdrücken der vier transformierten Funktionen $\Pi_5(v_1, v_2)$, $\Pi_{23}(v_1, v_2)$, $\Pi_4(v_1, v_2)$, $\Pi_{01}(v_1, v_2)$ auftreten, lassen sich rational durch die Gröfsen:

$$\frac{\vartheta_{\varepsilon_1}(m \cdot \omega_\alpha + m_1 \cdot \omega_\beta,\; m \cdot w_\alpha + m_1 \cdot w_\beta)}{\vartheta_5(m \cdot \omega_\alpha + m_1 \cdot \omega_\beta,\; m \cdot w_\alpha + m_1 \cdot w_\beta)} \quad (\varepsilon_1 = 0,\, 1,\, 04,\, 14)$$

darstellen. Dabei haben die Gröfsen $m, m_1, \omega_\alpha, \omega_\beta, w_\alpha, w_\beta$ die vorhin angegebene Bedeutung. Es ist dieses eine zweite Art der Koefficientenbestimmung.

Eine dritte Art der Koefficientenbestimmung ergiebt sich vermöge folgender Bemerkungen, die von vornherein auf einen speziellen Fall bezogen werden mögen.

Wir setzen allgemein:

$$z_\alpha = \frac{\vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)},$$

dann sind die Funktionen:

$$\frac{\vartheta_\alpha(nv_1, nv_2, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22})}{\vartheta_5(nv_1, nv_2, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22})} \quad (\alpha = 2,\, 01,\, 34)$$

rationale Funktionen der Gröfsen z_2, z_{01}, z_{34}. Halten wir die ersteren fest, so ergiebt sich für die Gröfsen z_2, z_{01}, z_{34} ein System von drei Gleichungen. Es ist nicht schwer, die Wurzeln derselben zu bestimmen. Erstens wird den Gleichungen Genüge geleistet, wenn wir setzen:

$$z_\alpha = \frac{\vartheta_\alpha\left(v_1 + \frac{2m}{n},\; v_2 + \frac{2m_1}{n}\right)}{\vartheta_5\left(v_1 + \frac{2m}{n},\; v_2 + \frac{2m_1}{n}\right)},$$

und zweitens erhalten wir alle Wurzeln, wenn wir m und m_1 der Reihe nach die Werte $0, 1, \ldots n-1$ annehmen lassen. Es folgt

dieses aus den Betrachtungen des § 20. Sind aber die Wurzeln eines solchen Systems von Gleichungen bekannt, so sind es die Koefficienten auch, so dafs wir auf diese Art eine dritte Methode der Koefficientenbestimmung erhalten.

§ 40.*)

Die Modulargleichungen.

Bei Gelegenheit der ersten Methode der Koefficientenbestimmung ergaben sich eine Reihe von rationalen Beziehungen zwischen den ursprünglichen und den transformierten Thetafunktionen. Es sollen die hierbei bestehenden Gesetze jetzt näher untersucht werden.

Wir setzen dazu allgemein:

$$(1) \qquad \varphi_\alpha(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}) = \frac{\vartheta_\alpha(0, 0, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})}{\vartheta_5(0, 0, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})}.$$

Die zu den einzelnen Repräsentanten gehörenden transformierten Funktionen bezeichnen wir durch

$$\varphi_\alpha(\tau_{11}^{(\varepsilon)}, \tau_{12}^{(\varepsilon)}, \tau_{22}^{(\varepsilon)}).$$

Dann folgt, dafs die transformierten Funktionen:

$$\varphi_\alpha(\tau_{11}^{(\varepsilon)}, \tau_{12}^{(\varepsilon)}, \tau_{22}^{(\varepsilon)}) \qquad (\alpha = 23, 4, 01)$$

rationale Funktionen der Gröfsen:

$$\frac{\vartheta_\alpha\left(\frac{m + m_1 \cdot \tau_{11} + m_2 \cdot \tau_{12}}{n}, \frac{m' + m_1 \cdot \tau_{21} + m_2 \cdot \tau_{22}}{n}\right)}{\vartheta_5\left(\frac{m + m_1 \cdot \tau_{11} + m_2 \cdot \tau_{12}}{n}, \frac{m' + m_1 \cdot \tau_{21} + m_2 \cdot \tau_{22}}{n}\right)} \qquad \alpha = 23, 4, 01)$$

sind. Hierbei können die Zahlen m, m', m_1, m_2 alle Werte von 0 bis $n - 1$ durchlaufen. Wir bemerken, dafs es für die Folge von keiner wesentlichen Bedeutung ist, dafs die Ausdrucksform eine rationale ist. Eine algebraische Darstellung würde auch genügen.

Wir hätten ferner eine andere Ausdrucksform zugrunde legen können, etwa die, welche sich unmittelbar aus den Bemerkungen des vorigen Paragraphen ergiebt, die über die Darstellung der Gröfsen $\Pi_5(v_1, v_2)$, $\Pi_{23}(v_1, v_2)$, $\Pi_4(v_1, v_2)$, $\Pi_{01}(v_1, v_2)$ gemacht worden sind.

Wir bilden jetzt die Potenzsummen:

$$\sum\nolimits' \varphi_\alpha(\tau_{11}^{(\varepsilon)}, \tau_{12}^{(\varepsilon)}, \tau_{22}^{(\varepsilon)})^r,$$

die über alle repräsentierenden φ-Funktionen zu erstrecken sind. Um

*) Cf. Krause: Math. Annalen 19.

die Eigenschaften derselben zu finden, stellen wir die folgenden Betrachtungen an.

Es giebt nach dem Modul 2 zwei von einander verschiedene lineare Transformationen, welche die Indices 5, 23, 4, 01 ungeändert lassen. Es sind dieses die Transformationen:

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_0 & \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \mathfrak{b}_0 & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{b}_3 \\ \mathfrak{c}_0 & \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{c}_2 & \mathfrak{c}_3 \\ \mathfrak{d}_0 & \mathfrak{d}_1 & \mathfrak{d}_2 & \mathfrak{d}_3 \end{vmatrix},$$

deren Zahlen die Eigenschaften haben, dafs entweder ist:

$$1) \quad \mathfrak{a}_0 \equiv \mathfrak{b}_1 \equiv \mathfrak{c}_2 \equiv \mathfrak{d}_3 \equiv 1 \mod 2,$$

während die anderen Zahlen durch 2 teilbar sind, oder aber

$$2) \quad \mathfrak{a}_0 \equiv \mathfrak{b}_1 \equiv \mathfrak{c}_2 \equiv \mathfrak{d}_3 \equiv \mathfrak{a}_2 \equiv \mathfrak{b}_3 \equiv 1 \mod 2,$$

während die anderen Zahlen durch 2 teilbar sind.

Fügen wir noch die erfüllbaren Bedingungen hinzu, dafs

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_0 . \mathfrak{d}_0 + \mathfrak{b}_0 . \mathfrak{c}_0 &\equiv 0 \mod 8 \\ \mathfrak{a}_1 . \mathfrak{d}_1 + \mathfrak{b}_1 . \mathfrak{c}_1 &\equiv 0 \mod 8 \\ \mathfrak{c}_0 . \mathfrak{b}_1 &\equiv 0 \mod 4 \end{aligned}$$

ist, so folgt, dafs die drei Quotienten

$$\frac{\vartheta_{23}(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)}, \quad \frac{\vartheta_4(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)}, \quad \frac{\vartheta_{01}(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)}$$

für diese Transformation in sich selbst übergehen.

Wir wollen nun in den Gleichungen, die wir für $\varphi_\alpha(\tau_{11}^{(\epsilon)}, \tau_{12}^{(\epsilon)}, \tau_{22}^{(\epsilon)})$ fanden, links und rechts an Stelle von $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$, resp. $\mathfrak{t}_{11}, \mathfrak{t}_{12}, \mathfrak{t}_{22}$ setzen, wobei ist:

$$(2) \quad \begin{aligned} \mathfrak{N} . \mathfrak{t}_{11} &= (\mathfrak{c}\mathfrak{d})_{02} + (\mathfrak{a}\mathfrak{c})_{02} . \tau_{11} + 2(\mathfrak{b}\mathfrak{c})_{02} . \tau_{12} + (\mathfrak{d}\mathfrak{b})_{02} . \tau_{22} \\ &\quad + (\mathfrak{a}\mathfrak{b})_{02} (\tau_{12}^2 - \tau_{11} . \tau_{22}), \\ \mathfrak{N} . \mathfrak{t}_{12} &= (\mathfrak{c}\mathfrak{d})_{12} + (\mathfrak{a}\mathfrak{c})_{12} . \tau_{11} + (2(\mathfrak{b}\mathfrak{c})_{12} - 1) . \tau_{12} + (\mathfrak{d}\mathfrak{b})_{12} . \tau_{22} \\ &\quad + (\mathfrak{a}\mathfrak{b})_{12} (\tau_{12}^2 - \tau_{11} . \tau_{22}), \\ \mathfrak{N} . \mathfrak{t}_{22} &= (\mathfrak{c}\mathfrak{d})_{31} + (\mathfrak{a}\mathfrak{c})_{31} . \tau_{11} + 2(\mathfrak{b}\mathfrak{c})_{31} . \tau_{12} + (\mathfrak{d}\mathfrak{b})_{31} . \tau_{22} \\ &\quad + (\mathfrak{a}\mathfrak{b})_{31} (\tau_{12}^2 - \tau_{11} . \tau_{22}), \\ \mathfrak{N} \quad &= (\mathfrak{c}\mathfrak{d})_{23} + (\mathfrak{a}\mathfrak{c})_{23} . \tau_{11} + 2(\mathfrak{b}\mathfrak{c})_{23} . \tau_{12} + (\mathfrak{d}\mathfrak{b})_{23} . \tau_{22} \\ &\quad + (\mathfrak{a}\mathfrak{b})_{23} (\tau_{12}^2 - \tau_{11} . \tau_{22}), \end{aligned}$$

und zunächst die linken Seiten betrachten. Eine einfache Betrachtung zeigt erstens, dafs die repräsentierende Funktion $\varphi_\alpha(\tau_{11}^{(\epsilon)}, \tau_{12}^{(\epsilon)}, \tau_{22}^{(\epsilon)})$ dann übergeführt wird in eine andere repräsentierende Funktion; sie

zeigt ferner, dafs sie durch richtige Wahl der Transformationszahlen in eine beliebige andere repräsentierende Funktion übergeführt werden kann. Der Beweis beruht auf Betrachtungen, die schon in den früheren Paragraphen skizziert worden sind.

Seien:

$$\begin{vmatrix} u_0 & 0 & 0 & 0 \\ v_0 & v_1 & 0 & 0 \\ w_0 & w_1 & w_2 & 0 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} u_0' & 0 & 0 & 0 \\ v_0' & v_1' & 0 & 0 \\ w_0' & w_1' & w_2' & 0 \\ x_0' & x_1' & x_2' & x_3' \end{vmatrix}$$

zwei beliebige Repräsentanten, so findet stets eine Gleichung von der Form statt:

$$(3)\quad \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_0 & \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \mathfrak{b}_0 & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{b}_3 \\ \mathfrak{c}_0 & \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{c}_2 & \mathfrak{c}_3 \\ \mathfrak{d}_0 & \mathfrak{d}_1 & \mathfrak{d}_2 & \mathfrak{d}_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_0 & 0 & 0 & 0 \\ v_0 & v_1 & 0 & 0 \\ w_0 & w_1 & w_2 & 0 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_0' & 0 & 0 & 0 \\ v_0' & v_1' & 0 & 0 \\ w_0' & w_1' & w_2' & 0 \\ x_0' & x_1' & x_2' & x_3' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_0' & \mathfrak{a}_1' & \mathfrak{a}_2' & \mathfrak{a}_3' \\ \mathfrak{b}_0' & \mathfrak{b}_1' & \mathfrak{b}_2' & \mathfrak{b}_3' \\ \mathfrak{c}_0' & \mathfrak{c}_1' & \mathfrak{c}_2' & \mathfrak{c}_3' \\ \mathfrak{d}_0' & \mathfrak{d}_1' & \mathfrak{d}_2' & \mathfrak{d}_3' \end{vmatrix},$$

wobei die zweite Determinante rechts wiederum eine lineare Transformation darstellt, deren Zahlen den Zahlen der ersten Determinante links nach dem Modul 2 resp. kongruent sind, für welche ferner:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_0' \,.\, \mathfrak{d}_0' + \mathfrak{b}_0' \,.\, \mathfrak{c}_0' &\equiv 0 \mod 8 \\ \mathfrak{a}_1' \,.\, \mathfrak{d}_1' + \mathfrak{b}_1' \,.\, \mathfrak{c}_1' &\equiv 0 \mod 8 \\ \mathfrak{c}_0' \,.\, \mathfrak{b}_1' &\equiv 0 \mod 4 \end{aligned}$$

ist.

Damit ist der Beweis geliefert. Jedenfalls also folgt, dafs die Potenzsummen für die genannten Transformationen ihren Wert nicht ändern. Die rechten Seiten können es also auch nicht, und zwar finden hierbei folgende Übergänge statt.

Nehmen wir ganz allgemein die Funktion:

$$\frac{\vartheta_\alpha\left(\frac{m + m_1 \,.\, \tau_{11} + m_2 \,.\, \tau_{12}}{n},\ \frac{m' + m_1 \,.\, \tau_{12} + m_2 \,.\, \tau_{22}}{n}\right)}{\vartheta_5\left(\frac{m + m_1 \,.\, \tau_{11} + m_2 \,.\, \tau_{12}}{n},\ \frac{m' + m_1 \,.\, \tau_{12} + m_2 \,.\, \tau_{22}}{n}\right)}$$

und setzen an Stelle von τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} die vorhin definierten Ausdrücke, so ist dieses gleichbedeutend damit, als ob auf die Funktion:

$$\frac{\vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)}$$

die lineare Transformation:

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_0 & \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \mathfrak{b}_0 & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{b}_3 \\ \mathfrak{c}_0 & \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{c}_2 & \mathfrak{c}_3 \\ \mathfrak{d}_0 & \mathfrak{d}_1 & \mathfrak{d}_2 & \mathfrak{d}_3 \end{vmatrix}$$

angewendet wird, vorausgesetzt, dafs (4):

$$v_1 = \frac{M + M_1 \,.\, \tau_{11} + M_2 \,.\, \tau_{12}}{n}, \quad v_2 = \frac{M' + M_1 \,.\, \tau_{12} + M_2 \,.\, \tau_{22}}{n},$$

und:

$$\begin{aligned} M &= m \,.\, \mathfrak{d}_3 - m_1 \,.\, \mathfrak{d}_0 - m_2 \,.\, \mathfrak{d}_1 + m' \,.\, \mathfrak{d}_2, \\ M' &= m \,.\, \mathfrak{c}_3 - m_1 \,.\, \mathfrak{c}_0 - m_2 \,.\, \mathfrak{c}_1 + m' \,.\, \mathfrak{c}_2, \\ M_1 &= -m \,.\, \mathfrak{a}_3 + m_1 \,.\, \mathfrak{a}_0 + m_2 \,.\, \mathfrak{a}_1 - m' \,.\, \mathfrak{a}_2, \\ M_2 &= -m \,.\, \mathfrak{b}_3 + m_1 \,.\, \mathfrak{b}_0 + m_2 \,.\, \mathfrak{b}_1 - m' \,.\, \mathfrak{b}_2 \end{aligned}$$

ist.

Jedenfalls also folgt der

Lehrsatz.

Sämtliche Potenzsummen

$$\sum^{\varepsilon} \varphi_\alpha(\tau_{11}^{(\varepsilon)}, \tau_{12}^{(\varepsilon)}, \tau_{22}^{(\varepsilon)})^r$$

sind rationale Funktionen der Gröfsen:

$$\frac{\vartheta_\alpha\left(\frac{m + m_1 \,.\, \tau_{11} + m_2 \,.\, \tau_{12}}{n}, \frac{m' + m_1 \,.\, \tau_{12} + m_2 \,.\, \tau_{22}}{n}\right)}{\vartheta_5\left(\frac{m + m_1 \,.\, \tau_{11} + m_2 \,.\, \tau_{12}}{n}, \frac{m' + m_1 \,.\, \tau_{12} + m_2 \,.\, \tau_{22}}{n}\right)} \qquad \alpha = 23, 4, 01.$$

Dieselben bleiben für eine jede lineare Transformation ungeändert, für welche die Funktionen $\varphi_\alpha(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})$ ungeändert bleiben.

Bevor wir nun in unseren Betrachtungen weiter vorwärts gehen, stellen wir folgende Aufgabe:

Es sollen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen aufgestellt werden, die zwischen den Systemen $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$ und $\tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}'$ bestehen müssen, damit die Gleichungen stattfinden:

$$(5) \qquad \varphi_\alpha(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}) = \varphi_\alpha(\tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}'), \quad \alpha = 23, 4, 01.$$

Die beiden Systeme von Moduln leisten dabei den angegebenen Konvergenzbedingungen Genüge. Es ist nicht schwer, hinreichende Bedingungen zu finden. Die obigen Gleichungen bestehen, wenn die Gröfsen $\tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}'$ sich vermöge der bei der linearen Transformation auftretenden Gleichungen aus den Moduln $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$ bestimmen lassen, vorausgesetzt, dafs entweder ist:

1) $a_0 \equiv b_1 \equiv c_2 \equiv d_3 \equiv 1 \mod 2,$

während die anderen Zahlen durch 2 teilbar sind, oder aber

2) $a_0 \equiv b_1 \equiv c_2 \equiv d_3 \equiv a_2 \equiv b_3 \equiv 1 \mod 2,$

während die anderen Zahlen durch 2 teilbar sind; vorausgesetzt ferner, dafs:

$$a_0 \,.\, d_0 + b_0 \,.\, c_0 \equiv 0 \mod 8,$$
$$a_1 \,.\, d_1 + b_1 \,.\, c_1 \equiv 0 \mod 8,$$
$$c_0 \,.\, b_1 \equiv 0 \mod 4$$

ist.

Es soll gezeigt werden, dafs die hinreichenden Bedingungen auch die notwendigen sind.

Sind die Gröfsen τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} gegeben, so entsprechen ihnen ganz bestimmte Werte $\varkappa^2$, λ^2, μ^2, ebenso den Gröfsen τ_{11}', τ_{12}', τ_{22}. Wir wollen die letzteren durch K^2, Λ^2, M^2 bezeichnen. Dann folgt leicht, dafs, falls

$$\varphi_\alpha(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}) = \varphi_\alpha(\tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')$$

ist, jedenfalls sein mufs entweder:

$$\varkappa^2 = \mathsf{K}^2, \quad \lambda^2 = \Lambda^2, \quad \mu^2 = \mathsf{M}^2, \tag{6}$$

oder aber:

$$\varkappa^2 = \mathsf{K}^2, \quad \lambda^2 = \frac{\mathsf{K}^2}{\mathsf{M}^2}, \quad \mu^2 = \frac{\mathsf{K}^2}{\Lambda^2}. \tag{7}$$

Der zweite Fall kann durch einfache Transformation auf den ersten reduziert werden. Somit kommen wir zu dem Problem:

Es sollen die notwendigen Bedingungen zwischen den Gröfsen τ_{11}, τ_{12}, τ_{22}; τ_{11}', τ_{12}', τ_{22}' dafür aufgestellt werden, dafs

$$\varkappa^2 = \mathsf{K}^2, \quad \lambda^2 = \Lambda^2, \quad \mu^2 = \mathsf{M}^2$$

ist.

Wir wollen uns dazu für beliebige Werte v_1, v_2 und v_1', v_2' die Funktionen:

$$\vartheta_\alpha(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}) \text{ und } \vartheta_\alpha'(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')$$

gebildet denken. Die Funktionen sind eindeutig bestimmt, sobald die Gröfsen v_ε, $\tau_{\varepsilon\varepsilon_1}$; v_ε', $\tau_{\varepsilon\varepsilon_1}'$ gegeben sind. Unter eben derselben Annahme gehören zu den Argumenten der Thetafunktionen eindeutig bestimmte Argumente der hyperelliptischen Funktionen und zwar bestehen die Beziehungen:

$$\begin{aligned} u_1 &= K_{11} \,.\, v_1 + K_{12} \,.\, v_2, & u_1' &= C_{11} \,.\, v_1' + C_{12} \,.\, v_2', \\ u_2 &= K_{21} \,.\, v_1 + K_{22} \,.\, v_2, & u_2' &= C_{21} \,.\, v_1' + C_{22} \,.\, v_2'. \end{aligned} \tag{8}$$

Zu vorgelegten Wertsystemen v_s, τ_{ss_1}, v_s', τ'_{ss_1} gehören demnach eindeutig bestimmte Werte der Funktionen: $al_\alpha(u_1, u_2)$ und — wie sie bezeichnet werden mögen — der Funktionen $Al_\alpha(u_1', u_2')$.

Andrerseits sind diese Funktionen aber eindeutig bestimmt, sobald ihre Argumente und die zu ihnen gehörenden Werte $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 gegeben sind. Es folgt das aus den früheren Betrachtungen.

Wenn wir daher die Beziehungen festsetzen:

$$(9)\quad \begin{aligned} K_{11}\,.\,v_1 + K_{12}\,.\,v_2 &= C_{11}\,.\,v_1' + C_{12}\,.\,v_2', \\ K_{21}\,.\,v_1 + K_{22}\,.\,v_2 &= C_{21}\,.\,v_1' + C_{22}\,.\,v_2', \end{aligned}$$

so folgt, dafs die den vorgelegten Gröfsen v_s, τ_{ss_1}; v_s', τ'_{ss_1} entsprechenden hyperelliptischen Funktionen jedenfalls einander gleich sein müssen. Ersetzen wir die hyperelliptischen Funktionen durch die Thetafunktionen, so folgt dann mit Hülfe weniger Schlüsse, dafs die ungeraden Thetafunktionen mit den Argumenten v_s und den Moduln τ_{ss_1} zu gleicher Zeit mit den ungeraden Thetafunktionen verschwinden müssen, deren Argumente die Gröfsen v_s' und deren Moduln die Gröfsen τ'_{ss_1} sind. Nun verschwinden aber die sämtlichen ungeraden Thetafunktionen zu gleicher Zeit für alle Werte

$$v_1 = r + s\,.\,\tau_{11} + t\,.\,\tau_{12}, \quad v_2 = r' + s\,.\,\tau_{12} + t\,.\,\tau_{22}$$

und **nur** für diese, wenn r, s, t, r' willkürliche ganze Zahlen bedeuten. Setzen wir also $v_1' = 1$, $v_2' = 0$, so wird:

$$(10)\quad \begin{aligned} K_{11}\,.\,v_1 + K_{12}\,.\,v_2 &= C_{11}, \\ K_{21}\,.\,v_1 + K_{22}\,.\,v_2 &= C_{21}, \end{aligned}$$

also:

$$(11)\quad \begin{aligned} v_1 &= \frac{C_{11}\,.\,K_{22} - C_{21}\,.\,K_{12}}{K_{11}\,.\,K_{22} - K_{12}\,.\,K_{21}} = d_3 - a_3\,.\,\tau_{11} - b_3\,.\,\tau_{12}, \\ v_2 &= \frac{C_{21}\,.\,K_{11} - C_{11}\,.\,K_{21}}{K_{11}\,.\,K_{22} - K_{12}\,.\,K_{21}} = c_3 - a_3\,.\,\tau_{21} - b_3\,.\,\tau_{22}. \end{aligned}$$

Setzen wir ferner $v_1' = 0$, $v_2' = 1$, so wird:

$$(12)\quad \begin{aligned} K_{11}\,.\,v_1 + K_{12}\,.\,v_2 &= C_{12}, \\ K_{21}\,.\,v_1 + K_{22}\,.\,v_2 &= C_{22}, \end{aligned}$$

also

$$(13)\quad \begin{aligned} v_1 &= \frac{C_{12}\,.\,K_{22} - C_{22}\,.\,K_{12}}{K_{11}\,.\,K_{22} - K_{21}\,.\,K_{12}} = d_2 - a_2\,.\,\tau_{11} - b_2\,.\,\tau_{12}, \\ v_2 &= \frac{C_{22}\,.\,K_{11} - C_{12}\,.\,K_{21}}{K_{11}\,.\,K_{22} - K_{21}\,.\,K_{12}} = c_2 - a_2\,.\,\tau_{21} - b_2\,.\,\tau_{22}. \end{aligned}$$

Setzen wir ferner:

$$v_1' = \tau_{11}', \quad v_2' = \tau_{12}',$$

so wird:

$$(14)\quad \begin{aligned} v_1 &= (d_3 - a_3.\tau_{11} - b_3.\tau_{12})\tau_{11}' + (d_2 - a_2.\tau_{11} - b_2.\tau_{12})\tau_{12}' \\ &= -d_0 + a_0.\tau_{11} + b_0.\tau_{12}, \\ v_2 &= (c_3 - a_3.\tau_{21} - b_3.\tau_{22})\tau_{11}' + (c_2 - a_2.\tau_{12} - b_2.\tau_{22})\tau_{12}' \\ &= -c_0 + a_0.\tau_{12} + b_0.\tau_{22}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$(15)\quad \begin{aligned} N.\tau_{11}' &= (c_2 - a_2.\tau_{12} - b_2.\tau_{22})(-d_0 + a_0.\tau_{11} + b_0.\tau_{12}) \\ &\quad - (-c_0 + a_0.\tau_{12} + b_0.\tau_{22})(d_2 - a_2.\tau_{11} - b_2.\tau_{12}), \\ N.\tau_{12}' &= (-c_0 + a_0.\tau_{12} + b_0.\tau_{22})(d_3 - a_3.\tau_{11} - b_3.\tau_{12}) \\ &\quad - (-d_0 + a_0.\tau_{11} + b_0.\tau_{12})(c_3 - a_3.\tau_{12} - b_3.\tau_{22}), \\ N \quad &= (c_2 - a_2.\tau_{12} - b_2.\tau_{22})(d_3 - a_3.\tau_{11} - b_3.\tau_{12}) \\ &\quad - (c_3 - a_3.\tau_{12} - b_3.\tau_{22})(d_2 - a_2.\tau_{11} - b_2.\tau_{12}). \end{aligned}$$

Setzen wir:

$$v_1' = \tau_{12}', \quad v_2' = \tau_{22}',$$

so wird:

$$(16)\quad \begin{aligned} v_1 &= (d_3 - a_3.\tau_{11} - b_3.\tau_{12})\tau_{21}' + (d_2 - a_2.\tau_{11} - b_2.\tau_{12})\tau_{22}' \\ &= -d_1 + a_1.\tau_{11} + b_1.\tau_{12}, \\ v_2 &= (c_3 - a_3.\tau_{12} - b_3.\tau_{22})\tau_{21}' + (c_2 - a_2.\tau_{12} - b_2.\tau_{22})\tau_{22}' \\ &= -c_1 + a_1.\tau_{12} + b_1.\tau_{22}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$(17)\quad \begin{aligned} N.\tau_{12}' &= (c_2 - a_2.\tau_{12} - b_2.\tau_{22})(-d_1 + a_1.\tau_{11} + b_1.\tau_{12}) \\ &\quad - (-c_1 + a_1.\tau_{12} + b_1.\tau_{22})(d_2 - a_2.\tau_{11} - b_2.\tau_{12}), \\ N.\tau_{22}' &= (-c_1 + a_1.\tau_{12} + b_1.\tau_{22})(d_3 - a_3.\tau_{11} - b_3.\tau_{12}) \\ &\quad - (c_3 - a_3.\tau_{12} - b_3.\tau_{22})(-d_1 + a_1.\tau_{11} + b_1.\tau_{12}). \end{aligned}$$

Endlich wird:

$$(18)\quad \begin{aligned} N.v_1' &= (\ c_2 - a_2.\tau_{12} - b_2.\tau_{22})v_1 - (\ d_2 - a_2.\tau_{11} - b_2.\tau_{12})v_2, \\ N.v_2' &= (-c_3 + a_3.\tau_{12} + b_3.\tau_{22})v_1 - (-d_3 + a_3.\tau_{11} + b_3.\tau_{12})v_2. \end{aligned}$$

Aus den beiden Ausdrücken, die sich für dieselbe Grösse τ_{12}' ergeben haben, folgen die Gleichungen:

$$(19)\quad \begin{aligned} a_0 . b_3 + a_1 . b_2 - a_2 . b_1 - a_3 . b_0 &= 0, \\ a_0 . c_3 + a_1 . c_2 - a_2 . c_1 - a_3 . c_0 &= 0, \\ a_0 . d_3 + a_1 . d_2 - a_2 . d_1 - a_3 . d_0 &= n, \\ b_0 . c_3 + b_1 . c_2 - b_2 . c_1 - b_3 . c_0 &= n, \\ b_0 . d_3 + b_1 . d_2 - b_2 . d_1 - b_3 . d_0 &= 0, \\ c_0 . d_3 + c_1 . d_2 - c_2 . d_1 - c_3 . d_0 &= 0. \end{aligned}$$

Eine leichte Betrachtung zeigt, daſs $n = 1$ sein muſs. Es besteht dieselbe in einer Transformation der Ausdrücke, die für v_1' und v_2' angegeben worden sind.

Es sind dieses die Relationen der linearen Transformation. Damit also

$$\varkappa^2 = \mathrm{K}^2, \quad \lambda^2 = \Lambda^2, \quad \mu^2 = \mathrm{M}^2$$

wird, müssen die Gröſsen $\varphi_\alpha(\tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')$ aus den Grössen $\varphi_\alpha(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})$ durch lineare Transformation entstanden sein. Damit ist die Hauptschwierigkeit überwunden. Alles andere lehrt die Theorie der linearen Transformation. Sie zeigt, daſs die oben angegebenen hinreichenden Bedingungen zu gleicher Zeit die notwendigen sind.

Nachdem dieses Problem gelöst worden ist, kehren wir zu den ursprünglichen Betrachtungen zurück.

Die Multiplikationstheorie, wie sie von uns aufgestellt worden ist, lehrt, daſs die Funktionen:

$$\frac{\vartheta_\alpha(nv_1, nv_2)}{\vartheta_5(nv_1, nv_2)}$$

sich als rationale Funktionen der Grössen $\dfrac{\vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)}$ darstellen lassen, deren Koefficienten rationale Funktionen von $\varphi_\alpha(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})$ sind. Hieraus folgt umgekehrt, daſs die Gröſsen:

$$\frac{\vartheta_\alpha\left(\dfrac{m + m_1 \cdot \tau_{11} + m_2 \cdot \tau_{12}}{n}, \dfrac{m' + m_1 \cdot \tau_{12} + m_2 \cdot \tau_{22}}{n}\right)}{\vartheta_5\left(\dfrac{m + m_1 \cdot \tau_{11} + m_2 \cdot \tau_{12}}{n}, \dfrac{m' + m_1 \cdot \tau_{12} + m_2 \cdot \tau_{22}}{n}\right)},$$

vom Vorzeichen abgesehen, Wurzeln algebraischer Gleichungen sind, deren Koefficienten rationale Funktionen von $\varphi_\alpha(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})$ sind. Mithin wird infolge der vorhin gefundenen Resultate eine jede rationale Funktion dieser Wurzeln eine eindeutige Funktion der Gröſsen $\varphi_\alpha(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})$ sein, die sich für die nun schon mehrfach angegebenen linearen Transformationen nicht ändert. Zu diesen Funktionen aber gehören, wie bewiesen, die Potenzsummen:

$$\sum_\varepsilon \varphi_\alpha(\tau_{11}^{(\varepsilon)}, \tau_{12}^{(\varepsilon)}, \tau_{22}^{(\varepsilon)})^r,$$

sodaſs wir den Lehrsatz erhalten:

A l l e P o t e n z s u m m e n $\sum_\varepsilon \varphi_\alpha(\tau_{11}^{(\varepsilon)}, \tau_{12}^{(\varepsilon)}, \tau_{22}^{(\varepsilon)})^r$ s i n d e i n d e u t i g e F u n k t i o n e n d e r G r ö ſ s e n $\varphi_\alpha(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})$.

Jedenfalls also sind die Gröſsen $\varphi_\alpha(\tau_{11}^{(\varepsilon)}, \tau_{12}^{(\varepsilon)}, \tau_{22}^{(\varepsilon)})$ Wurzeln

algebraischer Gleichungen vom Grade $1 + n + n^2 + n^3$, deren Koefficienten eindeutige Funktionen der Gröfsen $\varphi_\alpha(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})$ sind.

Mit Hülfe weniger Schlüsse folgt hieraus der fundamentale

Lehrsatz.

Die Gröfsen $\varphi_\alpha(\tau_{11}^{(\epsilon)}, \tau_{12}^{(\epsilon)}, \tau_{22}^{(\epsilon)})$ sind Wurzeln algebraischer Gleichungen vom Grade $1 + n + n^2 + n^3$, deren Koefficienten sich rational aus den Gröfsen $\varphi_\alpha(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})$ zusammensetzen lassen.

Die Bestimmung der Koefficienten kann unter anderem derart erfolgen, dafs für die Gröfsen $\varphi_\alpha(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})$ und die speziellen Wurzeln $\varphi_\alpha(n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22})$ ihre Entwicklungen nach ganzen Potenzen von $e^{\frac{\pi i \tau_{11}}{4}}$, $e^{\frac{\pi i \tau_{22}}{4}}$, $e^{\frac{\pi i \tau_{12}}{4}}$, $e^{\frac{-\pi i \tau_{12}}{4}}$ eingesetzt werden.

Mit Hülfe der Theorie der linearen Transformation ist es nun nicht schwer, die Haupteigenschaften der soeben definierten Gleichungen zu entwickeln. Da die Prinzipien ausführlich auseinandergesetzt sind, so beschränken wir uns auf Angabe der Sätze.

I. Die Gleichungen bleiben ungeändert, wenn an Stelle von $\vartheta_5, \vartheta_4, \vartheta_{01}, \vartheta_{23}$ resp. gesetzt wird $\vartheta_5, i^a.\vartheta_4, i^b.\vartheta_{01}, i^c.\vartheta_{23}$, während zu gleicher Zeit an Stelle der transformierten Funktionen $\Theta_5, \Theta_4, \Theta_{01}, \Theta_{23}$ resp. gesetzt wird $\Theta_5, i^{na}.\Theta_4, i^{nb}.\Theta_{01}, i^{nc}.\Theta_{23}$. Die Gröfsen a, b, c sind ganze Zahlen, die der Bedingung Genüge leisten, dafs ihre Summe eine gerade Zahl ist.

II. Die Gleichungen bleiben richtig, wenn man die Gröfsen $\vartheta_5, \vartheta_4, \vartheta_{01}, \vartheta_{23}$ und $\Theta_5, \Theta_4, \Theta_{01}, \Theta_{23}$ gleichzeitig derselben Permutation unterwirft.

III. Die Gleichungen bleiben richtig, wenn gesetzt wird an Stelle von:

1) $\vartheta_5,\ \vartheta_4,\ \vartheta_{01},\ \vartheta_{23};\qquad \Theta_5,\ \Theta_4,\ \Theta_{01},\ \Theta_{23}$

resp.

2) $\vartheta_5,\ \vartheta_{12},\ \vartheta_{34},\ \vartheta_0;\qquad \Theta_5,\ \Theta_{12},\ \Theta_{34},\ \Theta_0;$

3) $\vartheta_5,\ \vartheta_4,\ \vartheta_{12},\ \vartheta_{03};\qquad \Theta_5,\ \Theta_4,\ \Theta_{12},\ \Theta_{03};$

4) $\vartheta_5,\ \vartheta_{34},\ \vartheta_{01},\ \vartheta_2;\qquad \Theta_5,\ \Theta_{34},\ \Theta_{01},\ \Theta_2;$

5) $\vartheta_5,\ \vartheta_0,\ \vartheta_{23},\ \vartheta_{14};\qquad \Theta_5,\ \Theta_0,\ \Theta_{23},\ \varepsilon^{\frac{n-1}{2}}\Theta_{14};$

6) $\vartheta_5,\ \vartheta_{03},\ \vartheta_2,\ i.\vartheta_{14};\qquad \Theta_5,\ \Theta_{03},\ \Theta_2,\ \varepsilon^{\frac{n-1}{2}}.i^n.\Theta_{14};$

7) $\vartheta_{12},\ \vartheta_{03},\ j.\vartheta_{01},\ j.\vartheta_{23};\qquad \Theta_{12},\ \Theta_{03},\ j^n.\Theta_{01},\ j^n.\Theta_{23};$

8) $\vartheta_{34},\ \vartheta_0,\ j.\vartheta_4,\ j.\vartheta_{03};\qquad \Theta_{34},\ \Theta_0,\ j^n.\Theta_4,\ j^n.\Theta_{03};$

9)	$\vartheta_{34},$	$\vartheta_2, j.\vartheta_4, j.\vartheta_{23};$	$\Theta_{34},$	$\Theta_2, j^n.\Theta_4, \quad j^n.\Theta_{23};$
10)	$\vartheta_{12},$	$\vartheta_0, j.\vartheta_{01}, j.\vartheta_2;$	$\Theta_{12},$	$\Theta_0, j^n.\Theta_{01}, \quad j^n.\Theta_2;$
11)	$\vartheta_{01},$	$\vartheta_{14}, j.\vartheta_4, j.\vartheta_{01};$	$\Theta_{01},$	$\varepsilon^{\frac{n-1}{2}}\Theta_{14}, j^n.\Theta_4, \quad j^n.\Theta_{01};$
12)	$\vartheta_{12},$	$\vartheta_{34}, j.\vartheta_{23}, j.\vartheta_{14};$	$\Theta_{12},$	$\Theta_{34}, j^n.\Theta_{23}, \varepsilon^{\frac{n-1}{2}}.j^n.\Theta_{14};$
13)	$\vartheta_2,$	$i.\vartheta_{14}, j.\vartheta_4, j.\vartheta_{12};$	$\Theta_2,$	$\varepsilon^{\frac{n-1}{2}}.i^n.\Theta_{14}, j^n.\Theta_4, \quad j^n.\Theta_{12};$
14)	$\vartheta_{03},$	$i.\vartheta_{14}, j.\vartheta_{01}, j.\vartheta_{34};$	$\Theta_{03},$	$\varepsilon^{\frac{n-1}{2}}.i^n.\Theta_{14}, j^n.\Theta_{01}, \quad j^n.\Theta_{34};$
15)	$\vartheta_0,$	$i.\vartheta_{23}, j.\vartheta_{03}, j.\vartheta_2;$	$\Theta_0,$	$i^n.\Theta_{23}, j^n.\Theta_{03}, \quad j^n.\Theta_2.$

Hierbei ist $j = e^{\frac{\pi i}{4}}$, ferner $\varepsilon = 1$ für die Repräsentanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ i & i'' & n & 0 \\ i' & i & 0 & n \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

dagegen $\varepsilon = -1$ für die Repräsentanten:

$$\begin{vmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ i & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i' & 0 & -i & n \end{vmatrix}.$$

In diesen Ausdrücken sind die Zahlen i, i', i'' sämtlich durch 8 teilbar.

IV. Die Gleichungen bleiben richtig, wenn man die Grössen ϑ_5, ϑ_4, ϑ_{01}, ϑ_{23} und Θ_5, Θ_4, Θ_{01}, Θ_{23} mit einander vertauscht.

V. Eine jede algebraische Gleichung, deren Koefficienten sich rational aus den Grössen $\varphi_a(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})$ zusammensetzen und die *eine* repräsentierende Funktion $\varphi_a(\tau_{11}^{(\epsilon)}, \tau_{12}^{(\epsilon)}, \tau_{22}^{(\epsilon)})$ als Lösung hat, hat *sämtliche* repräsentirende Funktionen zu Wurzeln.

Wir haben unsern Betrachtungen ein Modulsystem zu Grunde gelegt, welches aus den Quotienten von vier Thetafunktionen besteht, zwischen denen für die allgemeinen Werte der Argumente eine biquadratische Gleichung existiert. Es können nun noch mannigfache andere Modulsysteme zu Grunde gelegt werden, für welche ganz analoge Betrachtungen angestellt werden können.

Wählen wir z. B. die Grössen $\varkappa$, λ, μ, so leisten die ihnen entsprechenden transformierten repräsentierenden Grössen K, Λ, M ihrer-

seits algebraischen Gleichungen vom Grade $1+n+n^2+n^3$ Genüge, deren Koefficienten sich rational aus $\varkappa$, λ, μ zusammensetzen lassen.

Das analoge würde für die Gröfsen $\varkappa^2$, λ^2, μ^2, K^2, Λ^2, M^2 stattfinden, und so wäre es nicht schwer, eine Fülle weiterer Gleichungen nachzuweisen.

Alle diese Gleichungen bestehen zwischen ursprünglichen und transformierten Thetaquotienten resp. einfachen Verbindungen derselben. Wir wollen sie mit dem Namen von Modulargleichungen bezeichnen.

§ 41.*)

Modulargleichungen für die Transformation dritten Grades.

Die wirkliche Aufstellung von Gleichungen der Art, wie sie im vorigen Paragraphen skizziert worden sind, ist mit grofsen Schwierigkeiten verknüpft. Wir wollen für den Fall $n=3$ einige hierauf bezügliche Betrachtungen anstellen. Aus den Bemerkungen der früheren Paragraphen ergeben sich im Falle $n=3$ die Beziehungen:

$$(1)\quad \begin{aligned}
&\vartheta_{34}\,.\,\Theta_{34} + \vartheta_{03}\,.\,\Theta_{03} + \vartheta_{23}\,.\,\Theta_{23} = \vartheta_5\,.\,\Theta_5;\\
&\vartheta_2\,.\,\Theta_2 + \vartheta_4\,.\,\Theta_4 + \vartheta_0\,.\,\vartheta_0 = \vartheta_5\,.\,\Theta_5;\\
&\vartheta_4\,.\,\Theta_4 \pm \vartheta_{14}\,.\,\Theta_{14} + \vartheta_{34}\,.\,\Theta_{34} = \vartheta_5\,.\,\Theta_5;\\
&\vartheta_0\,.\,\Theta_0 + \vartheta_{03}\,.\,\Theta_{03} + \vartheta_{01}\,.\,\Theta_{01} = \vartheta_5\,.\,\Theta_5;\\
&\vartheta_{01}\,.\,\Theta_{01} \pm \vartheta_{14}\,.\,\Theta_{14} + \vartheta_{12}\,.\,\Theta_{12} = \vartheta_5\,.\,\Theta_5;\\
&\vartheta_2\,.\,\Theta_2 + \vartheta_{12}\,.\,\Theta_{12} + \vartheta_{23}\,.\,\Theta_{23} = \vartheta_5\,.\,\Theta_5.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen haben sämtlich die Form:

$$x_1 + x_2 + x_3 = x_4.$$

Mit Hülfe leichter Operationen findet man, dafs alle Werte, die dieser Gleichung Genüge leisten, zu gleicher Zeit die Gleichung befriedigen:

$$(2)\quad \begin{aligned}
&[(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2 - 2(x_1^2\,.\,x_2^2 + x_2^2\,.\,x_3^2 + x_3^2\,.\,x_4^2\\
&\qquad + x_4^2\,.\,x_1^2 + x_1^2\,.\,x_3^2 + x_2^2\,.\,x_4^2)]^2 - 64\,.\,x_1^2\,.\,x_2^2\,.\,x_3^2\,.\,x_4^2 = 0.
\end{aligned}$$

Die Gleichung kann in mannigfache andere Formen gebracht werden. Eine derselben ist:

$$\begin{aligned}
&[(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2)^2 + 4x_1^2\,.\,x_2^2 - 4x_3^2\,.\,x_4^2]^2\\
&\qquad - 16x_1^2\,.\,x_2^2(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2)^2 = 0,
\end{aligned}$$

*) Cf. Königsberger: Crelle 67. Mathematische Annalen 1. Krause: Mathematische Annalen 19.

oder, wenn wir $x_\alpha^2 = \xi_\alpha$ setzen:

$$(3)\qquad [(\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 - \xi_4)^2 + 4\xi_1 . \xi_2 - 4\xi_3 . \xi_4]^2 - 16\xi_1 . \xi_2 (\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 - \xi_4)^2 = 0.$$

In dieser Gleichung ist dann:

$$\xi_\alpha = \vartheta_\epsilon^2 . \Theta_\epsilon^2,$$

und zwar entsprechen den Werten von $\alpha = 1, 2, 3, 4$ vier Werte $\vartheta_\epsilon . \Theta_\epsilon$, die in einer linearen Gleichung zusammen vorkommen. Ein Blick auf diese Gleichungen lehrt, dafs wenn zwischen x_1, x_2, x_3, x_4 eine lineare Gleichung besteht, immer zwei andere Gröfsen x_5, x_6 bestimmt werden können, derart, dafs zwischen x_1, x_2, x_5, x_6 auch eine lineare Relation besteht.

Dann ist:

$$(4)\qquad [(\xi_1 + \xi_2 - \xi_5 - \xi_6)^2 + 4\xi_1 . \xi_2 - 4\xi_5 . \xi_6]^2 - 16\xi_1 . \xi_2(\xi_1 + \xi_2 - \xi_5 - \xi_6)^2 = 0.$$

Verbinden wir diese Gleichung mit der analogen zwischen ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, so ergiebt sich:

$$[(\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 - \xi_4)^2 + 4\xi_1 . \xi_2 - 4\xi_3 . \xi_4][\xi_1 + \xi_2 - \xi_5 - \xi_6] = \pm [(\xi_1 + \xi_2 - \xi_5 - \xi_6)^2 + 4\xi_1 . \xi_2 - 4\xi_5 . \xi_6][\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 - \xi_4].$$

Solcher Gleichungen giebt es im ganzen 15. Dieselben lassen sich durch lineare Transformation alle aus einer ableiten. Wir gewinnen die 15 Fälle, indem wir an Stelle der Indices 1, 2, 3, 4, 5, 6 der Reihe nach setzen:

5, 23, 34, 03, 2, 12; 5, 12, 01, 14, 2, 23;
5, 03, 23, 34, 0, 01; 5, 01, 14, 12, 0, 03;
5, 34, 03, 23, 4, 14; 5, 2, 4, 0, 12, 23;
5, 14, 34, 4, 01, 12; 5, 0, 2, 4, 03, 01;
5, 4, 34, 14, 2, 0; 23, 14, 03, 4, 2, 01;
23, 4, 03, 14, 0, 12;
23, 01, 2, 14, 0, 34;
23, 0, 01, 34, 4, 12;
03, 12, 2, 34, 0, 14;
03, 2, 12, 34, 4, 01.

Fraglich bleibt das Vorzeichen. Um über dasselbe eine Bestimmung zu treffen, beschränken wir uns auf den Repräsentanten, für welchen aus τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} resp. wird $3\tau_{11}$, $3\tau_{12}$, $3\tau_{22}$, eine Be-

schränkung, die nach dem früheren erlaubt ist. Ersetzen wir dann die Thetafunktionen durch ihre Potenzreihen, so überzeugt man sich leicht, daſs das positive Zeichen zu wählen ist.

Somit erhalten die Gleichungen die Gestalt:

$$(5)\quad [(\xi_1+\xi_2-\xi_3-\xi_4)^2+4\xi_1\,.\,\xi_2-4\xi_3\,.\,\xi_4][\xi_1+\xi_2-\xi_5-\xi_6]$$
$$=[(\xi_1+\xi_2-\xi_5-\xi_6)^2+4\xi_1\,.\,\xi_2-4\xi_5\,.\,\xi_6][\xi_1+\xi_2-\xi_3-\xi_4],$$

oder:

$$(6)\quad (\xi_1-\xi_2)^2(\xi_5+\xi_6-\xi_3-\xi_4)+(\xi_3-\xi_4)^2(\xi_1+\xi_2-\xi_5-\xi_6)$$
$$+(\xi_5-\xi_6)^2(\xi_3+\xi_4-\xi_1-\xi_2)=0.$$

Somit erhalten wir zwei Kategorien von Gleichungen. Wir wollen in ihnen an Stelle von τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} resp. $\frac{\tau_{11}}{2}$, $\frac{\tau_{12}}{2}$, $\frac{\tau_{22}}{2}$ uns gesetzt denken, also an Stelle von $3\tau_{11}$, $3\tau_{12}$, $3\tau_{22}$ resp. $3\cdot\frac{\tau_{11}}{2}$, $3\cdot\frac{\tau_{12}}{2}$, $3\cdot\frac{\tau_{22}}{2}$ oder, was dasselbe sagt: $\frac{3\tau_{11}}{2}$, $\frac{3\tau_{12}}{2}$, $\frac{3\tau_{22}}{2}$. Dann wird, wie aus den Betrachtungen über die Transformation zweiten Grades folgt:

$$\begin{aligned}
&\vartheta_5\left(0,\,0,\,\tfrac{\tau_{11}}{2},\,\tfrac{\tau_{12}}{2},\,\tfrac{\tau_{22}}{2}\right)^2=\vartheta_5^2+\vartheta_{23}^2+\vartheta_4^2+\vartheta_{01}^2,\\
&\vartheta_0\left(0,\,0,\,\tfrac{\tau_{11}}{2},\,\tfrac{\tau_{12}}{2},\,\tfrac{\tau_{22}}{2}\right)^2=\vartheta_5^2+\vartheta_{23}^2-\vartheta_4^2-\vartheta_{01}^2,\\
&\vartheta_{12}\left(0,\,0,\,\tfrac{\tau_{11}}{2},\,\tfrac{\tau_{12}}{2},\,\tfrac{\tau_{22}}{2}\right)^2=\vartheta_5^2-\vartheta_{23}^2+\vartheta_4^2-\vartheta_{01}^2,\\
&\vartheta_{34}\left(0,\,0,\,\tfrac{\tau_{11}}{2},\,\tfrac{\tau_{12}}{2},\,\tfrac{\tau_{22}}{2}\right)^2=\vartheta_5^2-\vartheta_{23}^2-\vartheta_4^2+\vartheta_{01}^2,\\
(7)\quad&\vartheta_{14}\left(0,\,0,\,\tfrac{\tau_{11}}{2},\,\tfrac{\tau_{12}}{2},\,\tfrac{\tau_{22}}{2}\right)^2=2(\vartheta_5\,.\,\vartheta_{23}-\vartheta_{01}\,.\,\vartheta_4),\\
&\vartheta_{23}\left(0,\,0,\,\tfrac{\tau_{11}}{2},\,\tfrac{\tau_{12}}{2},\,\tfrac{\tau_{22}}{2}\right)^2=2(\vartheta_5\,.\,\vartheta_{23}+\vartheta_{01}\,.\,\vartheta_4),\\
&\vartheta_{03}\left(0,\,0,\,\tfrac{\tau_{11}}{2},\,\tfrac{\tau_{12}}{2},\,\tfrac{\tau_{22}}{2}\right)^2=2(\vartheta_5\,.\,\vartheta_4-\vartheta_{23}\,.\,\vartheta_{01}),\\
&\vartheta_4\left(0,\,0,\,\tfrac{\tau_{11}}{2},\,\tfrac{\tau_{12}}{2},\,\tfrac{\tau_{22}}{2}\right)^2=2(\vartheta_5\,.\,\vartheta_4+\vartheta_{23}\,.\,\vartheta_{01}),\\
&\vartheta_2\left(0,\,0,\,\tfrac{\tau_{11}}{2},\,\tfrac{\tau_{12}}{2},\,\tfrac{\tau_{22}}{2}\right)^2=2(\vartheta_5\,.\,\vartheta_{01}-\vartheta_4\,.\,\vartheta_{23}),\\
&\vartheta_{01}\left(0,\,0,\,\tfrac{\tau_{11}}{2},\,\tfrac{\tau_{12}}{2},\,\tfrac{\tau_{22}}{2}\right)^2=2(\vartheta_5\,.\,\vartheta_{01}+\vartheta_4\,.\,\vartheta_{23}).
\end{aligned}$$

Ähnliche Ausdrücke ergeben sich für die transformierten Thetafunktionen. Setzt man diese Werte in die vorhin aufgestellten

Gleichungen ein, so erhält man eine Reihe von Gleichungen achter und sechster Ordnung. Es sollen dieselben nicht sämtlich aufgestellt werden. Wir begnügen uns, drei Gleichungen achter und drei Gleichungen sechster Ordnung anzugeben. Um die Form derselben zu einer möglichst übersichtlichen zu machen, führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$
\begin{aligned}
a &= \vartheta_5^2 . \Theta_5^2 + \vartheta_{23}^2 . \Theta_{23}^2 + \vartheta_{01}^2 . \Theta_{01}^2 + \vartheta_4^2 . \Theta_4^2 , \\
b &= \vartheta_5^2 . \Theta_{23}^2 + \vartheta_{23}^2 . \Theta_5^2 + \vartheta_{01}^2 . \Theta_4^2 + \vartheta_4^2 . \Theta_{01}^2 , \\
b_1 &= \vartheta_5^2 . \Theta_4^2 + \vartheta_{23}^2 . \Theta_{01}^2 + \vartheta_{01}^2 . \Theta_{23}^2 + \vartheta_4^2 . \Theta_5^2 , \\
b_2 &= \vartheta_5^2 . \Theta_{01}^2 + \vartheta_{23}^2 . \Theta_4^2 + \vartheta_{01}^2 . \Theta_5^2 + \vartheta_4^2 . \Theta_{23}^2 , \\
c &= 2(\vartheta_5 . \vartheta_{23} . \Theta_5 . \Theta_{23} + \vartheta_{01} . \vartheta_4 . \Theta_{01} . \Theta_4), \\
c_1 &= 2(\vartheta_5 . \vartheta_4 . \Theta_5 . \Theta_4 + \vartheta_{23} . \vartheta_{01} . \Theta_{23} . \Theta_{01}), \\
c_2 &= 2(\vartheta_5 . \vartheta_{01} . \Theta_5 . \Theta_{01} + \vartheta_4 . \vartheta_{23} . \Theta_4 . \Theta_{23}), \\
d &= 2(\vartheta_5 . \vartheta_{23} . \Theta_{01} . \Theta_4 + \vartheta_{01} . \vartheta_4 . \Theta_5 . \Theta_{23}), \\
d_1 &= 2(\vartheta_5 . \vartheta_4 . \Theta_{23} . \Theta_{01} + \vartheta_{23} . \vartheta_{01} . \Theta_5 . \Theta_4) , \\
d_2 &= 2(\vartheta_5 . \vartheta_{01} . \Theta_4 . \Theta_{23} + \vartheta_4 . \vartheta_{23} . \Theta_5 . \Theta_{01}).
\end{aligned} \tag{9}
$$

Dann lauten drei Gleichungen achter Ordnung:

$$
\begin{aligned}
&(d_1^2 + d_2^2 - 2c_1 . c_2)^2 - 4(c_1^2 - d_1^2)(c_2^2 - d_2^2) = 0, \\
&(d_2^2 + d^2 - 2c_2 . c)^2 - 4(c_2^2 - d_2^2)(c^2 - d^2) = 0, \\
&(d^2 + d_1^2 - 2c . c_1)^2 - 4(c^2 - d^2)(c_1^2 - d_1^2) = 0;
\end{aligned} \tag{10}
$$

ferner drei Gleichungen sechster Ordnung:

$$
\begin{aligned}
&d^2(c_2 - c_1) + d_1^2(c - c_2) + d_2^2(c_1 - c) = 0, \\
&b . d(c_2 - c_1) + b_1 . d_1(c - c_2) + b_2 . d_2(c_1 - c) = 0, \\
&(b^2 - c^2)(c_2 - c_1) + (b_1^2 - c_1^2)(c - c_2) + (b_2^2 - c_2^2)(c_1 - c) = 0.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Die erste der Gleichungen (10) ergiebt sich unmittelbar aus Gleichung (3), wenn man

$$\xi_1 = \vartheta_{03}^2 . \Theta_{03}^2, \ \xi_2 = \vartheta_4^2 . \Theta_4^2, \ \xi_3 = \vartheta_2^2 . \Theta_2^2, \ \xi_4 = \vartheta_{01}^2 . \Theta_{01}^2$$

setzt. Analog ergeben sich die beiden andern Gleichungen von (10), die aus der ersten auch durch lineare Transformation erhalten werden können.

Die erste der Gleichungen (11) ergiebt sich aus Gleichung (6), indem man

$$
\begin{aligned}
&\xi_1 = \vartheta_{23}^2 . \Theta_{23}^2, \quad \xi_2 = \vartheta_{14}^2 . \Theta_{14}^2, \quad \xi_3 = \vartheta_{03}^2 . \Theta_{03}^2, \\
&\xi_4 = \vartheta_4^2 . \Theta_4^2, \quad \xi_5 = \vartheta_2^2 . \Theta_2^2, \quad \xi_6 = \vartheta_{01}^2 . \Theta_{01}^2
\end{aligned}
$$

setzt.

Die beiden andern Gleichungen ergeben sich durch einfache Verbindungen einiger Gleichungen sechster Ordnung.

Den Gleichungen, die wir auf diese Weise erhalten haben, genügen die sämtlichen repräsentierenden Funktionen Θ_5, Θ_{23}, Θ_{01}, Θ_4; ob aufser ihnen noch andere, bleibt dahingestellt.

§ 42.*)

Die Multiplikatorgleichungen.

Aufser den Modulargleichungen giebt es nun noch andere Gleichungen, zu deren Theorie wir uns jetzt wenden. Für eine beliebige Transformation n^{ten} Grades denken wir uns die Quotienten zu Grunde gelegt:

$$\frac{\vartheta_3(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')}{\vartheta_0(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')} \quad \text{und} \quad \frac{\vartheta_{02}(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')}{\vartheta_0(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')}.$$

Dieselben sind rationale Funktionen der Gröfsen

$$\frac{\vartheta_a(v_1, v_2)}{\vartheta_0(v_1, v_2)}, \quad a = 3,\ 02,\ 23,$$

deren Koefficienten $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$ wir ausdrücken gelernt haben. Der Einfachheit halber setzen wir:

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{\vartheta_3(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')}{\vartheta_0(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')} &= f_3(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}), \\ \frac{\vartheta_{02}(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')}{\vartheta_0(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')} &= f_{02}(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}). \end{aligned}$$

Die beiden Seiten dieser Gleichungen mögen nach v_1 und v_2 differenziert werden. Die Transformationszahlen bezeichnen wir durch a_α, b_α, c_α, d_α, so ergeben sich vier Gleichungen, die wir als vier lineare Gleichungen mit den Unbekannten $a_0 + a_3 . \tau_{11}' + a_2 . \tau_{12}'$, $a_1 + a_3 . \tau_{12}' + a_2 . \tau_{22}'$, $b_0 + b_3 . \tau_{11}' + b_2 . \tau_{12}'$, $b_1 + b_3 . \tau_{12}' + b_2 . \tau_{22}'$ ansehen können. Setzen wir nun:

$$(2) \quad \begin{aligned} A = &(a_0 + a_3 . \tau_{11}' + a_2 . \tau_{12}')(b_1 + b_3 . \tau_{21}' + b_2 . \tau_{22}') \\ &- (a_1 + a_3 . \tau_{12}' + a_2 . \tau_{22}')(b_0 + b_3 . \tau_{11}' + b_2 . \tau_{12}'), \end{aligned}$$

so folgt für A unmittelbar der Ausdruck:

$$(3) \quad A = \frac{D}{D_1},$$

wo D die Funktionaldeterminante von $f_3(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})$ und $f_{02}(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})$, D_1 die Funktionaldeterminante von

*) Cf. Krause: Mathematische Annalen 20.

$$\frac{\vartheta_3(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')}{\vartheta_0(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')} \quad \text{und} \quad \frac{\vartheta_{02}(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')}{\vartheta_0(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')}$$

bedeutet.

Diese Gleichung gilt für alle Werte von v_1 und v_2. Setzen wir in ihr $v_1 = v_2 = v_1' = v_2' = 0$ und berücksichtigen, dafs:

$$\vartheta_{02}'(v_1)_0 \,.\, \vartheta_3'(v_2)_0 - \vartheta_{02}'(v_2)_0 \,.\, \vartheta_3'(v_1)_0 = \pi^2 \,.\, \vartheta_{12} \,.\, \vartheta_{34} \,.\, \vartheta_{01} \,.\, \vartheta_4$$

ist, so folgt:

$$A = \frac{\vartheta_{12}\,.\,\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_{01}\,.\,\vartheta_4}{\Theta_{12}\,.\,\Theta_{34}\,.\,\Theta_{01}\,.\,\Theta_4} \cdot \frac{\Theta_0^2}{\vartheta_0^2} \cdot F, \tag{4}$$

wo F eine rationale Funktion der Gröfse $\frac{\vartheta_{23}}{\vartheta_0}$ und der Konstanten $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ist.

Hieraus folgt:

$$\frac{\Theta_5^2}{\vartheta_5^2} \cdot A = \frac{\Theta_0}{\Theta_{12}} \cdot \frac{\Theta_0}{\Theta_{34}} \cdot \frac{\Theta_5}{\Theta_{01}} \cdot \frac{\Theta_5}{\Theta_4} \cdot \frac{\vartheta_{12}}{\vartheta_0} \cdot \frac{\vartheta_{34}}{\vartheta_0} \cdot \frac{\vartheta_{01}}{\vartheta_5} \cdot \frac{\vartheta_4}{\vartheta_5}\, F, \tag{5}$$

oder also es ergiebt sich der

Lehrsatz.

Für eine jede Transformation n^{ten} Grades ist die Gröfse $\frac{\Theta_5^2}{\vartheta_5^2} \cdot A$ eine rationale Funktion der Gröfsen $\frac{\Theta_a}{\Theta_5}$, $\frac{\vartheta_a}{\vartheta_5}$ und der Konstanten $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Hierbei kann a die Werte annehmen 12, 34, 01, 4, 0, 23.

Für den Fall $n = 1$ haben wir den Wert der Gröfse $\frac{\Theta_5^2}{\vartheta_5^2} \cdot A$ bestimmt. Nehmen wir insbesondere an, dafs in der Transformationsdeterminante alle Diagonalglieder ungerade, alle andern dagegen gerade sind, so folgt:

$$\frac{\Theta_5^2}{\vartheta_5^2} \cdot A = (-1)^{\frac{a_0-1}{2} + \frac{b_1-1}{2}}. \tag{6}$$

Wir wollen nun im Falle der allgemeinen Transformation n^{ten} Grades uns die Gröfse

$$(-1)^{\frac{a_0-1}{2} + \frac{b_1-1}{2}} \cdot \frac{\Theta_5^2}{\vartheta_5^2} \cdot A$$

zu Grunde gelegt denken. Dann folgt leicht, dafs dieselbe jedenfalls eine algebraische Funktion der Gröfsen $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 ist. Wir wollen uns jetzt die Gröfse für alle Repräsentanten gebildet denken und die auf diese Weise entstandenen Ausdrücke durch z_ϵ bezeichnet denken.

Jedenfalls sind dann auch alle Potenzsummen $\sum z_s^r$ erstreckt über alle repräsentierenden Werte z_s algebraische Funktionen von $\varkappa^2$, λ^2, μ^2.

Sei nun $(\alpha_0 \beta_1 \gamma_2 \delta_3)$ eine beliebige Transformation erster Ordnung, für welche die Diagonalglieder alle ungerade, die übrigen Glieder alle gerade sind, sei ferner $(u_0\, v_1\, w_2\, x_3)$ ein beliebiger Repräsentant, dann findet, wie nun schon mehrfach hervorgehoben worden ist, stets eine Gleichung statt:

$$(\alpha_0 \beta_1 \gamma_2 \delta_3)\,(u_0 v_1 w_2 x_3) = (u_0' v_1' w_2' x_3')\,(\alpha_0' \beta_1' \gamma_2' \delta_3'),$$

in welcher die erste Determinante rechts einen Repräsentanten, die zweite eine lineare Transformation derselben Art, wie die ursprüngliche darstellt. Wir wollen die beiden zu den Repräsentanten links und rechts gehörenden Gröfsen z durch z_s und z_{s_1} bezeichnen. Dann folgt leicht, dafs der Ausdruck für z_s in den Ausdruck für z_{s_1} übergeht, wenn in ihm die Gröfsen τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} durch Gröfsen τ_{11}', τ_{12}', τ_{22}' ersetzt werden, welche durch die ursprüngliche lineare Transformation aus τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} entstanden sind. Mithin sind die Potenzsummen $\sum z_s^r$ algebraische Funktionen von $\varkappa^2$, λ^2, μ^2, die für eine jede lineare Transformation ungeändert bleiben, für welche die Diagonalglieder ungerade, alle übrigen gerade sind. Derartige Funktionen sind aber eindeutige Funktionen von $\varkappa^2$, λ^2, μ^2.

Mithin ergiebt sich, dafs sämtliche Potenzsummen $\sum z_s^r$ eindeutige Funktionen von $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 sind.

Hieraus wieder folgt mit Hülfe weniger Schlüsse der

Lehrsatz.

Die Gröfsen z_s sind Wurzeln einer algebraischen Gleichung vom Grade $1 + n + n^2 + n^3$, deren Koefficienten rationale Funktionen von $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 sind.

Die Eigenschaften dieser Gleichungen sind in ähnlich einfacher Weise zu entwickeln, wie die Eigenschaften der Modulargleichungen.

Auch in diesem Falle lassen sich aufser den soeben definierten Gleichungen noch Kategorien anderweitiger aufstellen.

Für die Gröfse

$$M = M_0 M_3 - M_1 M_2$$

ergiebt sich der Ausdruck:

$$(7)\qquad M = A\cdot\frac{C_{11}.C_{22}-C_{12}.C_{21}}{K_{11}.K_{22}-K_{12}.K_{21}}$$

$$= A\cdot\frac{\Theta_{34}{}^{3}.\Theta_{4}{}^{3}.\Theta_{5}{}^{3}}{\vartheta_{34}{}^{3}.\vartheta_{4}{}^{3}.\vartheta_{5}{}^{3}}\cdot\frac{\vartheta_{01}.\vartheta_{23}.\vartheta_{12}.\vartheta_{2}.\vartheta_{03}.\vartheta_{0}.\vartheta_{14}}{\Theta_{01}.\Theta_{23}.\Theta_{12}.\Theta_{2}.\Theta_{03}.\Theta_{0}.\Theta_{14}}.$$

Dieser Ausdruck kann analog behandelt werden, wie der vorhin betrachtete. Für den Fall einer linearen Transformation, bei welcher die Diagonalglieder ungerade, alle andern gerade sind, wird $M = 1$, im übrigen leisten die zu einer Transformation n^{ten} Grades gehörenden $1 + n + n^2 + n^3$ gehörenden repräsentierenden Werte M einer algebraischen Gleichung vom Grade $1 + n + n^2 + n^3$ Genüge, deren Koefficienten sich rational aus $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 zusammensetzen lassen.

Alle diese Gleichungen wollen wir mit dem Namen **Multiplikatorgleichungen** bezeichnen. Ihre Wurzeln sind nicht Quotienten transformierter Thetafunktionen oder Verbindungen derselben, sondern Quadrate von Thetafunktionen resp. Verbindungen von Quadraten und Quotienten.

§ 43.*)

Ableitung von Differentialgleichungen zwischen den Multiplikatoren, den ursprünglichen und den transformierten Moduln.

Es sollen jetzt eine Reihe wichtiger Differentialbeziehungen entwickelt werden, welche zwischen den nun schon oft gebrauchten Gröfsen M_α — den **Multiplikatoren**, wie wir sie nennen wollen —, den ursprünglichen und den transformierten Moduln bestehen. Es war gesetzt worden:

$$(1)\qquad \varkappa = \frac{\vartheta_{23}.\vartheta_{01}}{\vartheta_{4}.\vartheta_{5}},\quad \lambda = \frac{\vartheta_{2}.\vartheta_{23}}{\vartheta_{34}.\vartheta_{4}},\quad \mu = \frac{\vartheta_{01}.\vartheta_{2}}{\vartheta_{5}.\vartheta_{34}}.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\partial\varkappa}{\partial\tau_{\varepsilon\varepsilon_1}} = \varkappa\left[\frac{\frac{\partial\vartheta_{01}}{\partial\tau_{\varepsilon\varepsilon_1}}}{\vartheta_{01}}+\frac{\frac{\partial\vartheta_{23}}{\partial\tau_{\varepsilon\varepsilon_1}}}{\vartheta_{23}}-\frac{\frac{\partial\vartheta_{5}}{\partial\tau_{\varepsilon\varepsilon_1}}}{\vartheta_{5}}-\frac{\frac{\partial\vartheta_{4}}{\partial\tau_{\varepsilon\varepsilon_1}}}{\vartheta_{4}}\right],$$

$$(2)\qquad \frac{\partial\lambda}{\partial\tau_{\varepsilon\varepsilon_1}} = \lambda\left[\frac{\frac{\partial\vartheta_{2}}{\partial\tau_{\varepsilon\varepsilon_1}}}{\vartheta_{2}}+\frac{\frac{\partial\vartheta_{23}}{\partial\tau_{\varepsilon\varepsilon_1}}}{\vartheta_{23}}-\frac{\frac{\partial\vartheta_{34}}{\partial\tau_{\varepsilon\varepsilon_1}}}{\vartheta_{34}}-\frac{\frac{\partial\vartheta_{4}}{\partial\tau_{\varepsilon\varepsilon_1}}}{\vartheta_{4}}\right],$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial\tau_{\varepsilon\varepsilon_1}} = \mu\left[\frac{\frac{\partial\vartheta_{2}}{\partial\tau_{\varepsilon\varepsilon_1}}}{\vartheta_{2}}+\frac{\frac{\partial\vartheta_{01}}{\partial\tau_{\varepsilon\varepsilon_1}}}{\vartheta_{01}}-\frac{\frac{\partial\vartheta_{34}}{\partial\tau_{\varepsilon\varepsilon_1}}}{\vartheta_{34}}-\frac{\frac{\partial\vartheta_{5}}{\partial\tau_{\varepsilon\varepsilon_1}}}{\vartheta_{5}}\right].$$

$$\varepsilon, \varepsilon_1 = 1, 2.$$

*) Cf. Krause: Acta mathematica 3, Mathematische Annalen 26.

Beachtet man nun die Beziehungen:

$$4\pi i \cdot \frac{\partial \vartheta_\alpha}{\partial \tau_{ss}} = \left[\frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\partial v_s^2}\right]_0 = \vartheta_\alpha''(v_s)_0$$

$$2\pi i \cdot \frac{\partial \vartheta_\alpha}{\partial \tau_{12}} = \left[\frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\partial v_1 . \partial v_2}\right]_0 = \vartheta_\alpha''(v_1, v_2)_0$$

und setzt (3)

$$\frac{\vartheta_{01}''(v_s)_0}{\vartheta_{01}} - \frac{\vartheta_5''(v_s)_0}{\vartheta_5} = a_{ss}, \qquad \frac{\vartheta_{23}''(v_s)_0}{\vartheta_{23}} - \frac{\vartheta_4''(v_s)_0}{\vartheta_4} = b_{ss},$$

$$\frac{\vartheta_2''(v_s)_0}{\vartheta_2} - \frac{\vartheta_{34}''(v_s)_0}{\vartheta_{34}} = c_{ss},$$

und definiert in ähnlicher Weise Gröfsen a_{12}, b_{12}, c_{12}, so folgt:

$$(4) \quad \begin{aligned} &\frac{\partial \varkappa}{\partial \tau_{ss}} = \frac{\varkappa}{4\pi i}(a_{ss} + b_{ss}), \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \tau_{ss}} = \frac{\lambda}{4\pi i}(b_{ss} + c_{ss}), \\ &\frac{\partial \mu}{\partial \tau_{ss}} = \frac{\mu}{4\pi i}(c_{ss} + a_{ss}), \\ &\frac{\partial \varkappa}{\partial \tau_{12}} = \frac{\varkappa}{2\pi i}(a_{12} + b_{12}), \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \tau_{12}} = \frac{\lambda}{2\pi i}(b_{12} + c_{12}), \\ &\frac{\partial \mu}{\partial \tau_{12}} = \frac{\mu}{2\pi i}(c_{12} + a_{12}). \end{aligned}$$

Aus den früheren Betrachtungen ergeben sich aber unmittelbar folgende Ausdrücke:

$$(5) \quad \begin{aligned} a_{ss} = &- K_{1s}^2(1 - \varkappa^2 + \lambda^2 - \mu^2) - 2K_{1s} . K_{2s}(\lambda^2 - \mu^2 . \varkappa^2) \\ &- K_{2s}^2(\lambda^2 . \mu^2 - \mu^2 . \varkappa^2 + \varkappa^2 . \lambda^2 - \varkappa^2 . \lambda^2 . \mu^2), \\ b_{ss} = &- K_{1s}^2(1 - \varkappa^2 - \lambda^2 + \mu^2) - 2K_{1s} . K_{2s}(\mu^2 - \varkappa^2 . \lambda^2) \\ &- K_{2s}^2(\lambda^2 . \mu^2 + \mu^2 . \varkappa^2 - \varkappa^2 . \lambda^2 - \varkappa^2 . \lambda^2 . \mu^2), \\ c_{ss} = &- K_{1s}^2(1 + \varkappa^2 - \lambda^2 - \mu^2) - 2K_{1s} . K_{2s}(\varkappa^2 - \lambda^2 . \mu^2) \\ &- K_{2s}^2(- \lambda^2 . \mu^2 + \mu^2 . \varkappa^2 + \varkappa^2 . \lambda^2 - \varkappa^2 . \lambda^2 . \mu^2). \end{aligned}$$

Die entsprechenden Formeln für den Index 12 erhalten wir, indem wir an Stelle von K_{1s}^2, $2K_{1s} . K_{2s}$, K_{2s}^2 resp. setzen:

$$K_{11} . K_{12}, \quad K_{12} . K_{21} + K_{11} . K_{22}, \quad K_{21} . K_{22}.$$

Hieraus folgen die Formeln:

$$(6) \quad \begin{aligned} &\frac{\partial \varkappa}{\partial \tau_{11}} = - \frac{\varkappa . \varkappa_1^2}{2\pi i}[K_{11}^2 + K_{11} . K_{21}(\lambda^2 + \mu^2) + K_{21}^2 . \lambda^2 . \mu^2], \\ &\frac{\partial \varkappa}{\partial \tau_{12}} = - \frac{\varkappa . \varkappa_1^2}{2\pi i}[2K_{11} . K_{12} + (K_{12} . K_{21} + K_{11} . K_{22})(\lambda^2 + \mu^2) \\ &\qquad\qquad + 2K_{21} . K_{22} . \lambda^2 . \mu^2], \\ &\frac{\partial \varkappa}{\partial \tau_{22}} = - \frac{\varkappa . \varkappa_1^2}{2\pi i}[K_{12}^2 + K_{12} . K_{22}(\lambda^2 + \mu^2) + K_{22}^2 . \lambda^2 . \mu^2]. \end{aligned}$$

Aus diesen drei Formeln sind die entsprechenden für λ und μ durch cyklische Vertauschung der Buchstaben $\varkappa$, λ, μ herzustellen. Dabei ist dann zu gleicher Zeit:

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial\varkappa}{\partial\tau_{11}} & \frac{\partial\varkappa}{\partial\tau_{12}} & \frac{\partial\varkappa}{\partial\tau_{22}} \\ \frac{\partial\lambda}{\partial\tau_{11}} & \frac{\partial\lambda}{\partial\tau_{12}} & \frac{\partial\lambda}{\partial\tau_{22}} \\ \frac{\partial\mu}{\partial\tau_{11}} & \frac{\partial\mu}{\partial\tau_{12}} & \frac{\partial\mu}{\partial\tau_{22}} \end{vmatrix} = -\frac{\varkappa.\lambda.\mu.\varkappa_1^2.\lambda_1^2.\mu_1^2.\lambda_\varkappa^2.\mu_\lambda^2.\mu_\varkappa^2.K^3}{(2i\pi)^3}.$$

Ferner bestehen die Beziehungen:

$$(8)\qquad \begin{aligned} 1 &= \frac{\partial\varkappa}{\partial\tau_{11}}\cdot\frac{\partial\tau_{11}}{\partial\varkappa}+\frac{\partial\varkappa}{\partial\tau_{12}}\cdot\frac{\partial\tau_{12}}{\partial\varkappa}+\frac{\partial\varkappa}{\partial\tau_{22}}\cdot\frac{\partial\tau_{22}}{\partial\varkappa}, \\ 0 &= \frac{\partial\lambda}{\partial\tau_{11}}\cdot\frac{\partial\tau_{11}}{\partial\varkappa}+\frac{\partial\lambda}{\partial\tau_{12}}\cdot\frac{\partial\tau_{12}}{\partial\varkappa}+\frac{\partial\lambda}{\partial\tau_{22}}\cdot\frac{\partial\tau_{22}}{\partial\varkappa}, \\ 0 &= \frac{\partial\mu}{\partial\tau_{11}}\cdot\frac{\partial\tau_{11}}{\partial\varkappa}+\frac{\partial\mu}{\partial\tau_{12}}\cdot\frac{\partial\tau_{12}}{\partial\varkappa}+\frac{\partial\mu}{\partial\tau_{22}}\cdot\frac{\partial\tau_{22}}{\partial\varkappa}. \end{aligned}$$

Hieraus sind dann die Differentialquotienten der Gröſsen $\tau_{\varepsilon\varepsilon_1}$ zu bestimmen. Nach leichten Rechnungen ergeben sich die Beziehungen:

$$(9)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial\tau_{11}}{\partial\varkappa} &= -2\pi i\cdot\frac{K_{12}^2+2\varkappa^2.K_{12}.K_{22}+\varkappa^4.K_{22}^2}{\varkappa.\varkappa_1^2.\mu_\varkappa^2.\lambda_\varkappa^2.K^2}, \\ \frac{\partial\tau_{12}}{\partial\varkappa} &= 2\pi i\cdot\frac{K_{11}.K_{12}+\varkappa^2(K_{12}.K_{21}+K_{22}.K_{11})+\varkappa^4.K_{21}.K_{22}}{\varkappa.\varkappa_1^2.\mu_\varkappa^2.\lambda_\varkappa^2.K^2}, \\ \frac{\partial\tau_{22}}{\partial\varkappa} &= -2\pi i\cdot\frac{K_{11}^2+2\varkappa^2.K_{11}.K_{21}+\varkappa^4.K_{21}^2}{\varkappa.\varkappa_1^2.\mu_\varkappa^2.\lambda_\varkappa^2.K^2}. \end{aligned}$$

Die Differentialquotienten nach λ und μ sind aus den soeben entwickelten durch cyklische Vertauschung der Gröſsen $\varkappa$, λ, μ zu bestimmen.

Die aufgestellten Gleichungssysteme von je neun Gleichungen würden umgekehrt die Gröſsen $K_{\varepsilon\varepsilon_1}$ durch die Differentialquotienten der Gröſsen $\varkappa$, λ, μ oder der Gröſsen τ ausdrücken lassen.

Wir gehen jetzt zu einer beliebigen Transformation n^{ten} Grades über. Die den Gröſsen $K_{\varepsilon\varepsilon_1}$, $\varkappa$, λ, μ entsprechenden transformierten Gröſsen bezeichnen wir durch $C_{\varepsilon\varepsilon_1}$, c, l, m, die transformierten Moduln der Thetafunktionen durch τ_{11}', τ_{12}', τ_{22}', so ergeben sich durch wirkliches Differenzieren die Formeln (10):

$$\frac{\partial \tau_{11}'}{\partial \tau_{11}} = n \cdot \frac{C_2^2}{N^2}, \quad \frac{\partial \tau_{11}'}{\partial \tau_{12}} = -\frac{2n \cdot C_2 \cdot D_2}{N^2}, \quad \frac{\partial \tau_{11}'}{\partial \tau_{22}} = n \cdot \frac{D_2^2}{N^2},$$

$$\frac{\partial \tau_{12}'}{\partial \tau_{11}} = n \cdot \frac{C_2 \cdot C_3}{N^2}, \quad \frac{\partial \tau_{12}'}{\partial \tau_{12}} = -\frac{n(C_2 \cdot D_3 + C_3 \cdot D_2)}{N^2}, \quad \frac{\partial \tau_{12}'}{\partial \tau_{22}} = n \cdot \frac{D_2 \cdot D_3}{N^2},$$

$$\frac{\partial \tau_{22}'}{\partial \tau_{11}} = n \cdot \frac{C_3^2}{N^2}, \quad \frac{\partial \tau_{22}'}{\partial \tau_{12}} = -\frac{2n \cdot C_3 \cdot D_3}{N^2}, \quad \frac{\partial \tau_{22}'}{\partial \tau_{22}} = n \cdot \frac{D_3^2}{N^2}.$$

Hierbei ist gesetzt:

$$\begin{aligned} &C_2 = c_2 - a_2 \cdot \tau_{21} - b_2 \cdot \tau_{22}; \quad C_3 = -c_3 + a_3 \cdot \tau_{21} + b_3 \cdot \tau_{22}, \\ (11) \quad &D_2 = d_2 - a_2 \cdot \tau_{11} - b_2 \cdot \tau_{12}; \quad D_3 = -d_3 + a_3 \cdot \tau_{11} + b_3 \cdot \tau_{12}, \\ &N = C_3 \cdot D_2 - C_2 \cdot D_3. \end{aligned}$$

Nennen wir wie früher v_1', v_2' die Argumente der transformierten Thetafunktionen, u_1', u_2' die Argumente der transformierten hyperelliptischen Funktionen, so finden bekanntlich die Beziehungen statt:

$$\begin{aligned} u_1' &= C_{11} \cdot v_1' + C_{12} \cdot v_2', \\ u_2' &= C_{21} \cdot v_1' + C_{22} \cdot v_2', \\ u_1' &= M_0 \cdot u_1 + M_1 \cdot u_2, \\ u_2' &= M_2 \cdot u_1 + M_3 \cdot u_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &N.K.M_0 = n(C_{11}.C_2 + C_{12}.C_3)K_{22} + n(C_{11}.D_2 + C_{12}.D_3)K_{21}, \\ &N.K.M_1 = -n(C_{11}.D_2 + C_{12}.D_3)K_{11} - n(C_{11}.C_2 + C_{12}.C_3)K_{12}, \\ (12) \quad &N.K.M_2 = n(C_{21}.C_2 + C_{22}.C_3)K_{22} + n(C_{21}.D_2 + C_{22}.D_3)K_{21}, \\ &N.K.M_3 = -n(C_{21}.D_2 + C_{22}.D_3)K_{11} - n(C_{21}.C_2 + C_{22}.C_3)K_{12}. \end{aligned}$$

Das ganze Problem kommt nun darauf hinaus, Differentialbeziehungen zwischen den Gröfsen M und den Gröfsen $\varkappa$, λ, μ, c, l, m herzustellen.

Es ist:

$$\frac{\partial c}{\partial \varkappa} = \frac{\partial c}{\partial \tau_{11}'} \cdot \frac{\partial \tau_{11}'}{\partial \varkappa} + \frac{\partial c}{\partial \tau_{12}'} \cdot \frac{\partial \tau_{12}'}{\partial \varkappa} + \frac{\partial c}{\partial \tau_{22}'} \cdot \frac{\partial \tau_{22}'}{\partial \varkappa},$$

$$\frac{\partial \tau_{\varepsilon\varepsilon_1}'}{\partial \varkappa} = \frac{\partial \tau_{\varepsilon\varepsilon_1}'}{\partial \tau_{11}} \cdot \frac{\partial \tau_{11}}{\partial \varkappa} + \frac{\partial \tau_{\varepsilon\varepsilon_1}'}{\partial \tau_{12}} \cdot \frac{\partial \tau_{12}}{\partial \varkappa} + \frac{\partial \tau_{\varepsilon\varepsilon_1}'}{\partial \tau_{22}} \cdot \frac{\partial \tau_{22}}{\partial \varkappa}.$$

Setzen wir für den Augenblick:

$$\begin{aligned} &Z_1 = K_{12}^2 + 2\varkappa^2 . K_{12} . K_{22} + \varkappa^4 . K_{22}^2, \\ (13) \quad &Z_2 = K_{11} . K_{12} + \varkappa^2(K_{12} . K_{21} + K_{11} . K_{22}) + \varkappa^4 . K_{11} . K_{22}, \\ &Z_3 = K_{11}^2 + 2\varkappa^2 . K_{11} . K_{21} + \varkappa^4 . K_{21}^2, \end{aligned}$$

so wird:

$$\begin{aligned}
&\varkappa \,.\, \varkappa_1^2 \,.\, \mu_\varkappa^2 \,.\, \lambda_\varkappa^2 \,.\, K^2 \,.\, N^2 \,.\, \frac{\partial \tau_{11}'}{\partial \varkappa} \\
&= -2n\pi i(C_2^2 \,.\, Z_1 + 2C_2 \,.\, D_2 \,.\, Z_2 + D_2^2 \,.\, Z_3), \\
&\varkappa \,.\, \varkappa_1^2 \,.\, \mu_\varkappa^2 \,.\, \lambda_\varkappa^2 \,.\, K^2 \,.\, N^2 \,.\, \frac{\partial \tau_{12}'}{\partial \varkappa} \\
(14) \quad &= -2n\pi i(C_2 \,.\, C_3 \,.\, Z_1 + (C_2 \,.\, D_3 + C_3 \,.\, D_2)\, Z_2 + D_2 \,.\, D_3 \,.\, Z_3), \\
&\varkappa \,.\, \varkappa_1^2 \,.\, \mu_\varkappa^2 \,.\, \lambda_\varkappa^2 \,.\, K^2 \,.\, N^2 \,.\, \frac{\partial \tau_{22}'}{\partial \varkappa} \\
&= -2n\pi i(C_3^2 \,.\, Z_1 + 2C_3 \,.\, D_3 \,.\, Z_2 + D_3^2 \,.\, Z_3).
\end{aligned}$$

Setzen wir diese Ausdrücke ein, so erhalten wir die fundamentalen Beziehungen:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial c}{\partial \varkappa} = \frac{c.c_1^2}{n.\varkappa.\varkappa_1^2.\mu_\varkappa^2.\lambda_\varkappa^2}\Big[(M_1 - \varkappa^2 \,.\, M_0)^2 \\
&+ (l^2 + m^2)(M_1 - \varkappa^2 \,.\, M_0)(M_3 - \varkappa^2 \,.\, M_2) + l^2 \,.\, m^2(M_3 - \varkappa^2 \,.\, M_2)^2\Big], \\
&\frac{\partial l}{\partial \varkappa} = \frac{l.l_1^2}{n.\varkappa.\varkappa_1^2.\mu_\varkappa^2.\lambda_\varkappa^2}\Big[(M_1 - \varkappa^2 \,.\, M_0)^2 \\
(15) \quad &+ (m^2 + c^2)(M_1 - \varkappa^2 \,.\, M_0)(M_3 - \varkappa^2 . M_2) + m^2 . c^2 (M_3 - \varkappa^2 . M_2)^2\Big], \\
&\frac{\partial m}{\partial \varkappa} = \frac{m.m_1^2}{n.\varkappa.\varkappa_1^2.\mu_\varkappa^2.\lambda_\varkappa^2}\Big[(M_1 - \varkappa^2 \,.\, M_0)^2 \\
&+ (c^2 + l^2)(M_1 - \varkappa^2 \,.\, M_0)(M_3 - \varkappa^2 \,.\, M_2) + c^2 \,.\, l^2 (M_3 - \varkappa^2 \,.\, M_2)^2\Big].
\end{aligned}$$

Die entsprechenden Formeln für λ und μ entstehen aus den soeben aufgestellten durch cyklische Vertauschung von $\varkappa$, λ, μ. Aus diesen neun Formeln ergiebt sich dann die Beziehung:

$$(16) \quad (M_0 \cdot M_3 - M_1 \cdot M_2)^3 = M^3 = n^3 \cdot F \cdot \frac{\varkappa.\lambda.\mu.\varkappa_1^2.\lambda_1^2.\mu_1^2.\lambda_\varkappa^2.\mu_\lambda^2.\mu_\varkappa^2}{c.l.m.c_1^2.l_1^2.m_1^2.l_c^2.m_l^2.m_c^2},$$

$$F = \begin{vmatrix} \frac{\partial c}{\partial \varkappa} & \frac{\partial l}{\partial \varkappa} & \frac{\partial m}{\partial \varkappa} \\ \frac{\partial c}{\partial \lambda} & \frac{\partial l}{\partial \lambda} & \frac{\partial m}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial c}{\partial \mu} & \frac{\partial l}{\partial \mu} & \frac{\partial m}{\partial \mu} \end{vmatrix}.$$

An Stelle des soeben entwickelten Systems von neun Gleichungen können noch andere Systeme gesetzt werden.

In der That, es ist:

$$1 = \frac{\partial c}{\partial \varkappa} \cdot \frac{\partial \varkappa}{\partial c} + \frac{\partial c}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial c} + \frac{\partial c}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial c},$$

$$0 = \frac{\partial l}{\partial \varkappa} \cdot \frac{\partial \varkappa}{\partial c} + \frac{\partial l}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial c} + \frac{\partial l}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial c},$$

$$0 = \frac{\partial m}{\partial \varkappa} \cdot \frac{\partial \varkappa}{\partial c} + \frac{\partial m}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial c} + \frac{\partial m}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial c}.$$

Hieraus ergeben sich die Gleichungen:

$$(17) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \varkappa}{\partial c} &= \frac{n.\varkappa.\varkappa_1^2}{M^2.c.c_1^2.l_c^2.m_c^2}\Big[(M_1 + c^2 . M_3)^2 \\ &- (\lambda^2 + \mu^2)(M_1 + c^2 . M_3)(M_0 + c^2 . M_2) + \lambda^2 . \mu^2 (M_1 + c^2 . M_3)^2\Big], \\ \frac{\partial \lambda}{\partial c} &= \frac{n.\lambda.\lambda_1^2}{M^2.c.c_1^2.l_c^2.m_c^2}\Big[(M_1 + c^2 . M_3)^2 \\ &- (\mu^2 + \varkappa^2)(M_1 + c^2 . M_3)(M_0 + c^2 . M_2) + \mu^2 . \varkappa^2 (M_1 + c^2 . M_3)^2\Big], \\ \frac{\partial \mu}{\partial c} &= \frac{n.\mu.\mu_1^2}{M^2.c.c_1^2.l_c^2.m_c^2}\Big[(M_1 + c^2 . M_3)^2 \\ &- (\varkappa^2 + \lambda^2)(M_1 + c^2 . M_3)(M_0 + c^2 . M_2) + \varkappa^2 . \lambda^2 (M_1 + c^2 . M_3)^2\Big]. \end{aligned}$$

Die entsprechenden Formeln für l und m entstehen aus den obigen durch cyklische Vertauschung von c, l, m. Es ist dieses eine **zweite** Form unseres Gleichungssystemes. Wir können dieselbe unmittelbar aus der ursprünglichen ableiten, indem wir an Stelle von:

$$\varkappa,\ \lambda,\ \mu,\ c,\ l,\ m,\ M_0,\ M_1,\ M_2,\ M_3$$

resp. setzen:

$$c,\ l,\ m,\ \varkappa,\ \lambda,\ \mu,\ \frac{nM_3}{M},\ \frac{-nM_1}{M},\ \frac{-nM_2}{M},\ \frac{nM_0}{M}.$$

Zu einer **dritten** Form gelangen wir auf folgende Weise.

Aus dem ersten fundamentalen Gleichungssystem folgt unmittelbar (18):

$$\begin{aligned} &(M_1 - \varkappa^2 . M_0)^2 \\ &= \frac{n.\varkappa.\varkappa_1^2.\mu_\varkappa^2.\lambda_\varkappa^2}{l_c^2.m_c^2.m_l^2}\left(m_l^2 . \frac{c^3}{c_1^2} \cdot \frac{\partial c}{\partial \varkappa} + c_m^2 \cdot \frac{l^3}{l_1^2} \cdot \frac{\partial l}{\partial \varkappa} + l_c^2 \cdot \frac{m^3}{m_1^2} \cdot \frac{\partial m}{\partial \varkappa}\right) \\ &= \frac{n.\varkappa.\varkappa_1^2.\mu_\varkappa^2.\lambda_\varkappa^2}{l_c^2.m_c^2.m_l^2} \sum^c m_l^2 \cdot \frac{c^3}{c_1^2} \cdot \frac{\partial c}{\partial \varkappa}, \\ &(M_3 - \varkappa^2 . M_2)(M_0 . \varkappa^2 - M_1) \\ &= \frac{n.\varkappa.\varkappa_1^2.\mu_\varkappa^2.\lambda_\varkappa^2}{l_c^2.m_c^2.m_l^2}\left(m_l^2 \cdot \frac{c}{c_1^2} \cdot \frac{\partial c}{\partial \varkappa} + c_m^2 \cdot \frac{l}{l_1^2} \cdot \frac{\partial l}{\partial \varkappa} + l_c^2 \cdot \frac{m}{m_1^2} \cdot \frac{\partial m}{\partial \varkappa}\right) \\ &= \frac{n.\varkappa.\varkappa_1^2.\mu_\varkappa^2.\lambda_\varkappa^2}{l_c^2.m_c^2.m_l^2} \sum^c m_l^2 \cdot \frac{c}{c_1^2} \cdot \frac{\partial c}{\partial \varkappa}, \end{aligned}$$

$$(M_3 - \varkappa^2 . M_2)^2$$
$$= \frac{n.\varkappa.\varkappa_1^2.\mu_\varkappa^2.\lambda_\varkappa^2}{l_c.m_c^2.m_l^2}\left(m_l^2 \cdot \frac{1}{c.c_1^2} \cdot \frac{\partial c}{\partial \varkappa} + c_m^2 \cdot \frac{1}{l.l_1^2} \cdot \frac{\partial l}{\partial \varkappa} + l_c^2 \cdot \frac{1}{m.m_1^2} \cdot \frac{\partial m}{\partial \varkappa}\right)$$
$$= \frac{n.\varkappa.\varkappa_1^2.\mu_\varkappa^2.\lambda_\varkappa^2}{l_c^2.m_c^2.m_l^2} \sum^c m_l^2 \cdot \frac{1}{c.c_1^2} \cdot \frac{\partial c}{\partial \varkappa}.$$

Sechs andere Gleichungen erhält man durch cyklische Vertauschung von $\varkappa$, λ, μ.

Aus diesen neun Gleichungen greifen wir die folgenden drei heraus (19):

$$\frac{l_c^2.m_c^2.m_l^2}{n.\lambda_\varkappa^2.\mu_\varkappa^2.\mu_\lambda^2}(M_1^2 - 2\varkappa^2 . M_1 . M_0 + \varkappa^4 . M_0^2) = \frac{\varkappa.\varkappa_1^2}{\mu_\lambda^2} \sum^c m_l^2 \cdot \frac{c^3}{c_1^2} \cdot \frac{\partial c}{\partial \varkappa},$$
$$\frac{l_c^2\, m_c^2.m_l^2}{n.\lambda_\varkappa^2.\mu_\varkappa^2.\mu_\lambda^2}(M_1^2 - 2\lambda^2 . M_1 . M_0 + \lambda^4 . M_0^2) = \frac{\lambda.\lambda_1^2}{\varkappa_\mu^2} \sum^c m_l^2 \cdot \frac{c^3}{c_1^2} \cdot \frac{\partial c}{\partial \lambda},$$
$$\frac{l_c^2.m_c^2.m_l^2}{n.\lambda_\varkappa^2.\mu_\varkappa^2.\mu_\lambda^2}(M_1^2 - 2\mu^2 . M_1 . M_0 + \mu^4 . M_0^2) = \frac{\mu.\mu_1^2}{\lambda_\varkappa^2} \sum^c m_l^2 \cdot \frac{c^3}{c_1^2} \cdot \frac{\partial c}{\partial \mu}.$$

Hieraus folgen die Formeln (20):

$$\frac{l_c^2.m_c^2.m_l^2}{n} \cdot M_0^2 = \varkappa . \varkappa_1^2 \sum^c m_l^2 \cdot \frac{c^3}{c_1^2} \cdot \frac{\partial c}{\partial \varkappa}$$
$$+ \lambda . \lambda_1^2 \sum^c m_l^2 \cdot \frac{c^3}{c_1^2} \cdot \frac{\partial c}{\partial \lambda}$$
$$+ \mu . \mu_1^2 \sum^c m_l^2 \cdot \frac{c^3}{c_1^2} \cdot \frac{\partial c}{\partial \mu}$$
$$= \sum^\varkappa \sum^c \varkappa \cdot \varkappa_1^2 \cdot m_l^2 \cdot \frac{c^3}{c_1^2} \cdot \frac{\partial c}{\partial \varkappa},$$
$$2\,\frac{l_c^2.m_c^2.m_l^2}{n} \cdot M_0 \cdot M_1 = \sum^\varkappa \sum^c \varkappa \cdot \varkappa_1^2 (\lambda^2 + \mu^2)\, m_l^2 \cdot \frac{c^3}{c_1^2} \cdot \frac{\partial c}{\partial \varkappa},$$
$$\frac{l_c^2.m_c^2.m_l^2}{n} \cdot M_1^2 = \sum^\varkappa \sum^c \varkappa \cdot \varkappa_1^2 \cdot \lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot m_l^2 \cdot \frac{c^3}{c_1^2} \cdot \frac{\partial c}{\partial \varkappa}.$$

Genau so folgen die Formeln (21):

$$\frac{l_c^2.m_c^2.m_l^2}{n} \cdot M_2^2 = \sum^\varkappa \sum^c \varkappa \cdot \varkappa_1^2 \cdot m_l^2 \cdot \frac{1}{c.c_1^2} \cdot \frac{\partial c}{\partial \varkappa},$$
$$2\,\frac{l_c^2.m_c^2.m_l^2}{n} . M_2 . M_3 = - \sum^\varkappa \sum^c \varkappa . \varkappa_1^2 . (\lambda^2 + \mu^2)\, \frac{m_l^2}{c.c_1^2} \cdot \frac{\partial c}{\partial \varkappa},$$
$$\frac{l_c^2.m_c^2.m_l^2}{n} \cdot M_3^2 = \sum^\varkappa \sum^c \varkappa \cdot \varkappa_1^2 \cdot \lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot m_l^2 \cdot \frac{1}{c.c_1^2} \cdot \frac{\partial c}{\partial \varkappa},$$
$$\frac{l_c^2.m_c^2.m_l^2}{n} \cdot M_0 \cdot M_2 = - \sum^\varkappa \sum^c \varkappa \cdot \varkappa_1^2 \cdot m_l^2 \cdot \frac{c}{c_1^2} \cdot \frac{\partial c}{\partial \varkappa},$$

$$\frac{l_c^2 . m_c^2 . m_l^2}{n} (M_0 . M_3 + M_1 . M_2) = -\sum^{\varkappa}\sum^{c} \varkappa \cdot \varkappa_1^2 (\lambda^2 + \mu^2) m_l^2 , \frac{c}{c_1^2} \cdot \frac{\partial c}{\partial \varkappa},$$

$$\frac{l_c^2 . m_c^2 . m_l^2}{n} \cdot M_1 \cdot M_3 = -\sum^{\varkappa}\sum^{c} \varkappa \cdot \varkappa_1^2 \cdot \lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot m_l^2 \cdot \frac{c}{c_1^2} \cdot \frac{\partial c}{\partial \varkappa}.$$

Es ist dieses eine dritte Form unseres ursprünglichen Gleichungssystems.

Eine vierte endlich würde sich ergeben, wenn wir in dem letzten Gleichungssysteme an Stelle von:

$$\varkappa,\ \lambda,\ \mu,\ c,\ l,\ m,\ M_0,\ M_1,\ M_2,\ M_3$$

resp. setzen:

$$c,\ l,\ m,\ \varkappa,\ \lambda,\ \mu,\ \frac{n M_3}{M},\ \frac{-n M_1}{M},\ \frac{-n M_2}{M},\ \frac{n M_0}{M}.$$

Damit sind die fundamentalen Beziehungen entwickelt, die zwischen den Multiplikatoren M_0, M_1, M_2, M_3, den transformierten und den ursprünglichen Moduln bestehen. Sie lehren, dafs die Gröfsen: M_0^2, $M_0 . M_1$, M_1^2, $M_2 . M_3$, M_3^2, $M_0 . M_2$, $M_0 . M_3 + M_1 . M_2$, $M_1 . M_3$ sich rational durch die ursprünglichen und transformierten Moduln ausdrücken lassen. Hieraus folgt ferner, dafs die Konstanten, die in den Ausdrücken für die transformierten geraden hyperelliptischen Funktionen vorkommen, auch ihrerseits sich rational durch die ursprünglichen und die transformierten Moduln ausdrücken lassen müssen.

§ 44.*)

Ableitung von Differentialgleichungen, denen die Zähler und Nenner der Transformationsgleichungen Genüge leisten.

In einem früheren Paragraphen ist gezeigt worden, dafs der Zähler und Nenner der Multiplikationsgleichungen gewissen Differentialgleichungen Genüge leistet. Es soll jetzt gezeigt werden, dafs das analoge auch für den Zähler und Nenner der Transformationsgleichungen stattfindet. Wir nehmen die Bezeichnungen des angedeuteten Paragraphen wieder auf, setzen also

(1) oder einfach

$$\vartheta_\alpha(v_1, v_2) = f_\alpha(u_1, u_2)$$

$$\vartheta_\alpha(v_1, v_2) = f_\alpha,$$

so ergeben sich für f_α die drei Differentialgleichungen:

*) Cf. Krause: Mathematische Annalen 26.

$$\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial u_1^2} + \frac{2}{K}\sum_1^2{}^{s} \frac{\partial f_\alpha}{\partial u_s}\sum^{\varkappa}(u_1 \,.\, \varkappa_{s1} + u_2 \,.\, \varkappa_{s2})\,\varkappa \,.\, \varkappa_1^2$$
$$+ 2\sum^{\varkappa}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \varkappa}\cdot \varkappa \cdot \varkappa_1^2 = 0,$$

(2)
$$\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial u_1 \,.\, \partial u_2} + \frac{1}{K}\sum_1^2{}^{s} \frac{\partial f_\alpha}{\partial u_s}\sum^{\varkappa}(u_1 \,.\, \varkappa_{s1} + u_2 \,.\, \varkappa_{s2})\,\varkappa \,.\, \varkappa_1^2\,(\lambda^2 + \mu^2)$$
$$+ \sum^{\varkappa}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \varkappa}\cdot \varkappa \cdot \varkappa_1^2\,(\lambda^2 + \mu^2) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial u_2^2} + \frac{2}{K}\sum_1^2{}^{s} \frac{\partial f_\alpha}{\partial u_s}\sum^{\varkappa}(u_1 \,.\, \varkappa_{s1} + u_2 \,.\, \varkappa_{s2})\,\varkappa \,.\, \varkappa_1^2 \,.\, \lambda^2 \,.\, \mu^2$$
$$+ 2\sum^{\varkappa}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \varkappa}\cdot \varkappa \cdot \varkappa_1^2 \cdot \lambda^2 \cdot \mu^2 = 0.$$

Die Summe nach $\varkappa$ ist über $\varkappa$, λ, μ zu erstrecken.

Wir setzen nun:

$$u_1' = \quad M_0 \,.\, u_1 + M_1 \,.\, u_2\,,$$
$$u_2' = \quad M_2 \,.\, u_1 + M_3 \,.\, u_2\,,$$

(3) also umgekehrt:

$$M \,.\, u_1 = \quad M_3 \cdot u_1' - M_0 \,.\, u_2',$$
$$M \,.\, u_2 = -M_2 \,.\, u_1' + M_0 \,.\, u_2'.$$

Die transformierten Moduln mögen durch c, l, m bezeichnet werden, die den Gröfsen τ_{ss_1}, v_1, v_2, K, $\varkappa$ entsprechenden Gröfsen wie früher durch τ'_{ss_1}, v_1', v_2', C, c; ferner werde gesetzt, und zwar für die transformierten Moduln links und rechts:

$$\vartheta_\alpha(v_1', v_2') = F_\alpha(u_1', u_2')$$

(4) oder auch:

$$\vartheta_\alpha(v_1', v_2') = F_\alpha.$$

Dann bleiben die Gleichungen (2) ungeändert, wenn an Stelle von:

$$f_\alpha,\ u_1,\ u_2,\ \varkappa_{ss_1},\ \varkappa,\ \lambda,\ \mu,\ K$$

gesetzt wird:

$$F_\alpha,\ u_1',\ u_2',\ c_{ss_1},\ c,\ l,\ m,\ C.$$

Ehe wir nun weitergehen, möge an die Formeln erinnert werden, die in dem vorigen Paragraphen entwickelt worden sind. Aus denselben ergeben sich unmittelbar die drei Gleichungen (5):

$$2M_0^2\sum^c\frac{\partial\varkappa}{\partial c}\cdot c\cdot c_1^2+2M_0\cdot M_2\sum^c\frac{\partial\varkappa}{\partial c}\cdot c\cdot c_1^2\,(m^2+l^2)$$

$$+\,2M_2^2\sum^c\frac{\partial\varkappa}{\partial c}\cdot c\cdot c_1^2\cdot m^2\cdot l^2=2n\cdot\varkappa\cdot\varkappa_1^2,$$

$$2M_0\,.\,M_1\sum^c\frac{\partial\varkappa}{\partial c}\cdot c\cdot c_1^2+(M_0\cdot M_3+M_1\cdot M_2)\sum^c\frac{\partial\varkappa}{\partial c}\cdot c\cdot c_1^2(m^2+l^2)$$

$$+\,2M_2\,.\,M_3\sum^c\frac{\partial\varkappa}{\partial c}\cdot c\cdot c_1^2\cdot m^2\cdot l^2=n\cdot\varkappa\cdot\varkappa_1^2\,(\lambda^2+\mu^2),$$

$$2M_1^2\sum^c\frac{\partial\varkappa}{\partial c}\cdot c\cdot c_1^2+2M_1\cdot M_3\sum^c\frac{\partial\varkappa}{\partial c}\cdot c\cdot c_1^2\,.\,m^2\cdot l^2$$

$$+\,2M_3^2\sum^c\frac{\partial\varkappa}{\partial c}\cdot c\cdot c_1^2\cdot m^2\cdot l^2=2n\cdot\varkappa\cdot\varkappa_1^2\cdot\lambda^2\cdot\mu^2,$$

und sechs weitere, wenn auf $\varkappa$, λ, μ die cyklischen Vertauschungen angewandt werden. Mit Hilfe dieser Beziehungen sollen die Gleichungen, denen die Gröſse F Genüge leistet, transformiert werden. Wir setzen:

$$
(6)\quad
\begin{aligned}
\mathsf{X}_1&=\frac{2}{C}\sum_1^2{}^{e}\frac{\partial F_\alpha}{\partial u_e'}\sum^c(u_1'\,.\,c_{e1}+u_2'\,.\,c_{e2})\,c\,.\,c_1^2+2\sum^c\frac{\partial F_\alpha}{\partial c}c\,.\,c_1^2,\\
\mathsf{X}_2&=\frac{1}{C}\sum_1^2{}^{e}\frac{\partial F_\alpha}{\partial u_e'}\sum^c(u_1'\,.\,c_{e1}+u_2'\,.\,c_{e2})\,c\,.\,c_1^2\,(m^2+l^2)\\
&\qquad+\sum^c\frac{\partial F_\alpha}{\partial c}\,c\,.\,c_1^2\,(m^2+l^2),\\
\mathsf{X}_3&=\frac{2}{C}\sum_1^2{}^{e}\frac{\partial F_\alpha}{\partial u_e'}\sum^c(u_1'\,.\,c_{e1}+u_2'\,.\,c_{e2})\,c\,.\,c_1^2\,.\,m^2\,.\,l^2\\
&\qquad+2\sum^c\frac{\partial F_\alpha}{\partial c}\,c\,.\,c_1^2\,.\,m^2\,.\,l^2\,.
\end{aligned}
$$

Die Summation nach c ist über c, l, m zu erstrecken.

Bei dieser Bezeichnungsweise können die drei Gleichungen, denen die Gröſse F_α Genüge leistet, geschrieben werden (7):

$$\frac{\partial^2F_\alpha}{\partial u_1^2}\cdot M_3^2-2\,\frac{\partial^2F_\alpha}{\partial u_1\,.\,\partial u_2}\cdot M_3\cdot M_2+\frac{\partial^2F_\alpha}{\partial u_2^2}\cdot M_2^2=-\,\mathsf{X}_1\cdot M^2,$$

$$\frac{\partial^2F_\alpha}{\partial u_1^2}\cdot M_3\cdot M_1-\frac{\partial^2F_\alpha}{\partial u_1\,.\,\partial u_2}(M_0\cdot M_3+M_2\cdot M_1)+\frac{\partial^2F_\alpha}{\partial u_2^2}\cdot M_2\cdot M_0=\mathsf{X}_2\cdot M^2,$$

$$\frac{\partial^2 F_\alpha}{d u_1^2} \cdot M_1^2 - 2 \frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial u_1 . \partial u_2} \cdot M_1 \cdot M_0 + \frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial u_2^2} \cdot M_0^2 = - \mathrm{X}_3 \cdot M^2 .$$

Dieses Gleichungssystem können wir als lineares Gleichungssystem mit den Unbekannten $\frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial u_2^2}$, $\frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial u_1 . \partial u_2}$ ansehen. Die Auflösung ergiebt die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial u_1^2} + M_0^2 . \mathrm{X}_1 + 2 M_0 . M_2 . \mathrm{X}_2 + M_2^2 \mathrm{X}_3 = 0, \\
(8)\quad &\frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial u_1 . \partial u_2} + M_0 . M_1 . \mathrm{X}_1 + (M_0 . M_3 + M_1 . M_2) \mathrm{X}_2 + M_2 . M_3 . \mathrm{X}_3 = 0 \\
&\frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial u_2^2} + M_1^2 . \mathrm{X}_1 + 2 M_1 . M_3 . \mathrm{X}_2 + M_3^2 . \mathrm{X}_3 = 0 .
\end{aligned}$$

Nun ist:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_\alpha}{\partial u_1'} &= \frac{\partial F_\alpha}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial u_1'} + \frac{\partial F_\alpha}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial u_1'} = \frac{\partial F_\alpha}{\partial u_1} \cdot \frac{M_3}{M} - \frac{\partial F_\alpha}{\partial u_2} \cdot \frac{M_2}{M}, \\
\frac{\partial F_\alpha}{\partial u_2'} &= \frac{\partial F_\alpha}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial u_2'} + \frac{\partial F_\alpha}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial u_2'} = - \frac{\partial F_\alpha}{\partial u_1} \cdot \frac{M_1}{M} + \frac{\partial F_\alpha}{\partial u_2} \cdot \frac{M_0}{M}, \\
\frac{\partial F}{\partial c} &= \sum_\varkappa \frac{\partial F_\alpha}{\partial \varkappa} \cdot \frac{\partial \varkappa}{\partial c} + \frac{\partial F_\alpha}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial c} + \frac{\partial F_\alpha}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial c} \\
&= \sum_\varkappa \frac{\partial F_\alpha}{\partial \varkappa} \cdot \frac{\partial \varkappa}{\partial c} + \frac{\partial F_\alpha}{\partial u_1} \left(u_1' \cdot \frac{\partial \frac{M_3}{M}}{\partial c} - u_2' \cdot \frac{\partial \frac{M_1}{M}}{\partial c} \right) \\
&\quad + \frac{\partial F_\alpha}{\partial u_2} \left(- u_1' \cdot \frac{\partial \frac{M_2}{M}}{\partial c} + u_2' \cdot \frac{\partial \frac{M_0}{M}}{\partial c} \right),
\end{aligned}$$

und ähnliche Formeln ergeben sich für die Differentialquotienten nach l und m.

Hieraus folgt, dafs wir die erste der Gleichungen (8) schreiben können:

$$\frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial u_1^2} + 2 \sum_1^2 {}_s \frac{\partial F_\alpha}{\partial u_s} (u_1 \cdot \alpha_{s1} + u_2 \cdot \alpha_{s2}) + 2 \sum_\varkappa \frac{\partial F}{\partial \varkappa} \cdot \alpha_\varkappa = 0 .$$

Es handelt sich darum, die Werte der Gröfsen $\alpha_{s s_1}$ und $\alpha_\varkappa$, α_λ, α_μ zu bestimmen. Für $\alpha_\varkappa$ ergiebt sich der Wert:

$$M_0^2 . \sum_c \frac{\partial \varkappa}{\partial c} \cdot c \cdot c_1^2 + M_0 \cdot M_2 \sum_c \frac{\partial \varkappa}{\partial c} \cdot c \cdot c_1^2 (m^2 + l^2) + M_2^2 \sum_c \frac{\partial \varkappa}{\partial c} \cdot c \cdot c_1^2 \cdot m^2 \cdot l^2$$

d. h.

$$\alpha_\varkappa = n \varkappa . \varkappa_1^2 .$$

Genau so folgt:

$$\alpha_\lambda = n\lambda \,.\, \lambda_1^2, \quad \alpha_\mu = n\mu \,.\, \mu_1^2.$$

Der Wert von α_{11} nimmt die Form an:

$$\alpha_{11} = \frac{1}{C\,.\,M} \sum^c \Bigg[M_3 (M_0 \,.\, c_{11} + M_2 \,.\, c_{12}) - M_1 (M_0 \,.\, c_{21} + M_2 \,.\, c_{22})$$

$$+ C\,.\,M \left(M_0 \cdot \frac{\partial \frac{M_3}{M}}{\partial c} - M_2 \cdot \frac{\partial \frac{M_1}{M}}{\partial c} \right) \Bigg] G_c, \text{ wobei:}$$

$$G_c = M_0^2 \,.\, c \,.\, c_1^2 + M_0 \,.\, M_2 \,.\, c \,.\, c_1^2 (m^2 + l^2) + M_2^2 \,.\, c \,.\, c_1^2 \,.\, m^2 \,.\, l^2 \quad \text{ist.}$$

Die Summe ist nach c über c, l, m zu nehmen. Wir wollen nun für den Augenblick setzen:

$$c_{11}' = C_{22} \cdot \frac{\partial C_{11}}{\partial \varkappa} - C_{21} \cdot \frac{\partial C_{12}}{\partial \varkappa} \quad \text{etc.}$$

Führen wir dann in dem Ausdrucke von α_{11} an Stelle der Differentialquotienten nach c, l, m die Differentialquotienten nach $\varkappa$, λ, μ ein, so ergiebt sich unter Rücksichtnahme auf die aufgestellten Fundamentalformeln:

$$\alpha_{11} = \frac{n}{C\,.\,M} \sum^\varkappa \Bigg[M_3 (M_0 \,.\, c_{11}' + M_2 \,.\, c_{12}') - M_1 (M_0 \,.\, c_{21}' + M_2 \,.\, c_{22}')$$

$$+ C\,.\,M \left(M_0 \cdot \frac{\partial \frac{M_3}{M}}{\partial \varkappa} - M_2 \cdot \frac{\partial \frac{M_1}{M}}{\partial \varkappa} \right) \Bigg] \varkappa \,.\, \varkappa_1^2,$$

wobei die Summe jetzt über $\varkappa$, λ, μ zu nehmen ist.

Diesen Ausdruck können wir in die Form bringen:

$$\alpha_{11} = \frac{n}{C\,.\,M} \sum^\varkappa \Big[M_3 (M_0 \,.\, c_{11}' + M_2 \,.\, c_{12}') - M_1 (M_0 \,.\, c_{21}' + M_2 \,.\, c_{22}')$$

$$+ C \left(M_1 \cdot \frac{\partial M_2}{\partial \varkappa} - M_3 \cdot \frac{\partial M_0}{\partial \varkappa} \right) \Big] \varkappa \,.\, \varkappa_1^2.$$

Bis hierher gelten die Betrachtungen ganz allgemein. Wir beschränken uns jetzt auf einen Repräsentanten, nämlich:

$$\begin{vmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

brauchen aber kaum hinzufügen, daſs diese Beschränkung von keiner prinzipiellen Bedeutung ist. Für denselben wird:

$$(9)\quad \begin{aligned} K.M_0 &= n(C_{11}.K_{22} - C_{12}.K_{21}), & K.M_2 &= n(C_{21}.K_{22} - C_{22}.K_{21}),\\ K.M_1 &= n(C_{12}.K_{11} - C_{11}.K_{12}), & K.M_3 &= n(C_{22}.K_{11} - C_{21}.K_{12}). \end{aligned}$$

Mit Hilfe einfacher Schlüsse folgt dann:

$$\alpha_{11} = \frac{n}{K}\sum^{\varkappa} \varkappa \,.\, \varkappa_1^2 \cdot \varkappa_{11}\,.$$

Ganz analog sind die drei andern Gröfsen $\alpha_{\varepsilon\varepsilon_1}$ zu bestimmen. Ganz analog ferner sind die beiden andern Gleichungen zu transformieren. Es ergiebt sich dann das wichtige Resultat, dafs die Gleichungen, denen die Gröfse F_α Genüge leistet, in die Form gebracht werden können:

$$(10)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial u_1^2} + \frac{2n}{K}\sum_1^2{}^{\varepsilon} \frac{\partial F_\alpha}{\partial u_\varepsilon} \cdot \sum^{\varkappa} (u_1 \,.\, \varkappa_{\varepsilon 1} + u_2 \,.\, \varkappa_{\varepsilon 2})\, \varkappa \,.\, \varkappa_1^2\\ &\qquad + 2n \sum^{\varkappa} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \varkappa} \cdot \varkappa \cdot \varkappa_1^2 = 0,\\ &\frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial u_1 . \partial u_2} + \frac{n}{K}\sum_1^2{}^{\varepsilon} \frac{\partial F_\alpha}{\partial u_\varepsilon} \cdot \sum^{\varkappa} (u_1 \,.\, \varkappa_{\varepsilon 1} + u_2 \,.\, \varkappa_{\varepsilon 2})\, \varkappa \,.\, \varkappa_1^2 (\lambda^2 + \mu^2)\\ &\qquad + n \sum^{\varkappa} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \varkappa} \cdot \varkappa \cdot \varkappa_1^2 (\lambda^2 + \mu^2) = 0,\\ &\frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial u_2^2} + \frac{2n}{K}\sum_1^2{}^{\varepsilon} \frac{\partial F_\alpha}{\partial u_\varepsilon} \sum^{\varkappa} (u_1 \,.\, \varkappa_{\varepsilon 1} + u_2 \,.\, \varkappa_{\varepsilon 2})\, \varkappa \,.\, \varkappa_1^2 \,.\, \lambda^2 \,.\, \mu^2\\ &\qquad + 2n \sum^{\varkappa} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \varkappa} \cdot \varkappa \cdot \varkappa_1^2 \cdot \lambda^2 \cdot \mu^2 = 0. \end{aligned}$$

Es unterscheiden sich diese Gleichungen von denen, welchen die Funktion f Genüge leistet, nur dadurch, dafs bei einer Reihe von Gliedern der Faktor n hinzutritt.

Es bleiben nun die Betrachtungen durchaus analog den Betrachtungen, die bei der Multiplikation angestellt worden sind.

Unter solchen Umständen beschränken wir uns darauf, das Resultat einfach anzugeben.

Setzt man:

$$(11)\quad Z_\alpha = \frac{F_\alpha(u_1', u_2')}{f_\alpha(u_1, u_2)^n} \cdot \vartheta_\alpha^{n-1} = \frac{\vartheta_\alpha(nv_1, nv_2, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22})}{\vartheta_\alpha(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})^n} \cdot \vartheta_\alpha^{n-1},$$

so leistet diese Gröfse den Differentialgleichungen Genüge (12):

$$\begin{aligned} &\sum^{r} \frac{\partial^2 Z_\alpha}{\partial x_r^2}\left(\frac{\partial x_r}{\partial u_1}\right)^2 + 2 \sum \frac{\partial^2 Z_\alpha}{\partial x_r . \partial x_s} \cdot \frac{\partial x_r}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial x_s}{\partial u_1}\\ &\qquad + \sum^{r} \frac{\partial Z_\alpha}{\partial x_r}(1-n)\frac{\partial^2 x_r}{\partial u_1^2}\\ &\qquad + 2n \sum^{\varkappa} \frac{\partial Z_\alpha}{\partial \varkappa} \cdot \varkappa \cdot \varkappa_1^2 + n(1-n)\, Z_\alpha \cdot f_{11}^{\alpha} = 0, \end{aligned}$$

$$\sum_r \frac{\partial^2 Z_\alpha}{\partial x_r^2} \frac{\partial x_r}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial x_r}{\partial u_2} + \sum \frac{\partial^2 Z_\alpha}{\partial x_r . \partial x_s} \left(\frac{\partial x_r}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial x_s}{\partial u_2} + \frac{\partial x_r}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial x_s}{\partial u_1} \right)$$
$$+ \sum_r \frac{\partial Z_\alpha}{\partial x_r} (1-n) \frac{\partial^2 x_r}{\partial u_1 . \partial u_2}$$
$$+ n \sum_\varkappa \frac{\partial Z_\alpha}{\partial \varkappa} \varkappa \cdot \varkappa_1^2 (\lambda^2 + \mu^2)$$
$$+ n(1-n) \cdot Z_\alpha \cdot f_{12}{}^\alpha = 0,$$

$$\sum_r \frac{\partial^2 Z_\alpha}{\partial x_r^2} \left(\frac{\partial x_r}{\partial u_2}\right)^2 + 2 \sum \frac{\partial^2 Z_\alpha}{\partial x_r . \partial x_s} \cdot \frac{\partial x_r}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial x_s}{\partial u_2}$$
$$+ \sum_r \frac{\partial Z_\alpha}{\partial x_r} (1-n) \frac{\partial^2 x_r}{\partial u_2^2}$$
$$+ 2n \sum_\varkappa \frac{\partial Z_\alpha}{\partial \varkappa} \cdot \varkappa \cdot \varkappa_1^2 \cdot \lambda^2 \cdot \mu^2 + n(1-n) \cdot Z_\alpha \cdot f_{22}{}^\alpha = 0 .$$

Die Bedeutung der einzelnen Zeichen und Buchstaben ist am citierten Orte angegeben worden.

§ 45.*)

Ableitung von Differentialgleichungen zwischen den ursprünglichen und den transformierten Moduln.

Aufser den in den beiden letzten Paragraphen skizzierten Differentialbeziehungen existieren nun noch solche zwischen den ursprünglichen und den transformierten Moduln. Es sollen diese nicht wirklich in expliciter Form entwickelt werden, vielmehr begnügen wir uns damit, eine Methode zur Ableitung derselben anzugeben. In § 31 fanden wir für die Gröfse K_{11} die sechs Differentialgleichungen (1):

$$(\mu^2 - \lambda^2) \frac{\partial^2 K_{11}}{\partial \mu . \partial \lambda} = \lambda \cdot \frac{\partial K_{11}}{\partial \mu} - \mu \cdot \frac{\partial K_{11}}{\partial \lambda},$$
$$(\varkappa^2 - \mu^2) \frac{\partial^2 K_{11}}{\partial \varkappa . \partial \mu} = \mu \cdot \frac{\partial K_{11}}{\partial \varkappa} - \varkappa \cdot \frac{\partial K_{11}}{\partial \mu},$$
$$(\lambda^2 - \varkappa^2) \frac{\partial^2 K_{11}}{\partial \lambda . \partial \varkappa} = \varkappa \cdot \frac{\partial K_{11}}{\partial \lambda} - \lambda \cdot \frac{\partial K_{11}}{\partial \varkappa},$$

$$\varkappa_1^2 \cdot \frac{\partial^2 K_{11}}{\partial \varkappa^2} = \left[\frac{\varkappa . \lambda_1^2}{\lambda^2 - \varkappa^2} + \frac{\varkappa . \mu_1^2}{\mu^2 - \varkappa^2} + \frac{1 + 3\varkappa^2}{\varkappa} \right] \frac{\partial K_{11}}{\partial \varkappa}$$
$$- \frac{\lambda . \lambda_1^2}{\lambda^2 - \varkappa^2} \cdot \frac{\partial K_{11}}{\partial \lambda} - \frac{\mu . \mu_1^2}{\mu^2 - \varkappa^2} \cdot \frac{\partial K_{11}}{\partial \mu} + K_{11},$$

$$\lambda_1^2 \cdot \frac{\partial^2 K_{11}}{\partial \lambda^2} = \left[\frac{\lambda . \mu_1^2}{\mu^2 - \lambda^2} + \frac{\lambda . \varkappa_1^2}{\varkappa^2 - \lambda^2} + \frac{1 + 3\lambda^2}{\lambda} \right] \frac{\partial K_{11}}{\partial \lambda}$$
$$- \frac{\mu . \mu_1^2}{\mu^2 - \lambda^2} \cdot \frac{\partial K_{11}}{\partial \mu} - \frac{\varkappa . \varkappa_1^2}{\varkappa^2 - \lambda^2} \cdot \frac{\partial K_{11}}{\partial \varkappa} + K_{11},$$

*) Cf. Krause: Crelle 95.

$$\mu_1^2 \cdot \frac{\partial^2 K_{11}}{\partial \mu^2} = \left[\frac{\mu . \varkappa_1^2}{\varkappa^2 - \mu^2} + \frac{\mu . \lambda_1^2}{\lambda^2 - \mu^2} + \frac{1+3\mu^2}{\lambda}\right] \frac{\partial K_{11}}{\partial \mu}$$
$$- \frac{\varkappa . \varkappa_1^2}{\varkappa^2 - \mu^2} \cdot \frac{\partial K_{11}}{\partial \varkappa} - \frac{\lambda . \lambda_1^2}{\lambda^2 - \mu^2} \cdot \frac{\partial K_{11}}{\partial \lambda} + K_{11} .$$

Ebenso ergaben sich für die Gröfse K_{21} sechs Gleichungen, die Gleichungen (2):

$$(\mu^2 - \lambda^2) \frac{\partial^2 K_{21}}{\partial \mu . \partial \lambda} = \lambda \cdot \frac{\partial K_{21}}{\partial \mu} - \mu \cdot \frac{\partial K_{21}}{\partial \lambda} ,$$
$$\varkappa_1^2 \cdot \frac{\partial^2 K_{21}}{\partial \varkappa^2} = \left[\frac{\varkappa . \lambda_1^2}{\lambda^2 - \varkappa^2} + \frac{\varkappa . \mu_1^2}{\mu^2 - \varkappa^2} + \frac{5\varkappa^2 - 1}{\varkappa}\right] \frac{\partial K_{21}}{\partial \varkappa}$$
$$- \frac{\lambda . \lambda_1^2}{\lambda^2 - \varkappa^2} \cdot \frac{\partial K_{21}}{\partial \lambda} - \frac{\mu . \mu_1^2}{\mu^2 - \lambda^2} \cdot \frac{\partial K_{21}}{\partial \mu} + 3 K_{21}$$

und vier andere, die aus den beiden soeben hingeschriebenen Gleichungen durch cyklische Vertauschung der Gröfsen $\varkappa$, λ, μ entstehen.

Die übrigen Integrale dieser beiden Gleichungssysteme, die wir durch 1 und 2 bezeichnen wollen, waren bestimmt worden.

Für die transformierten Gröfsen ergeben sich zwei neue Systeme (3) und (4), die aus den obigen entstehen, indem an Stelle der Gröfsen $K_{\varepsilon\varepsilon_1}$, $\varkappa$, λ, μ resp. gesetzt wird $C_{\varepsilon\varepsilon_1}$, c, l, m. Die Integrale des Systems (3) lauten dann C_{11}, C_{12}, C_{11}', C_{12}', des Systems (4) C_{21}, C_{22}, C_{21}', C_{22}'. Nun bestehen aber die Beziehungen:

$$M_0 . K_{11} + M_1 . K_{21} = a_0 . C_{11} + a_1 . C_{12} + a_2 . C_{12}' + a_3 C_{11}' ,$$
$$M_2 . K_{11} + M_3 . K_{21} = a_0 . C_{21} + a_1 . C_{22} + a_2 . C_{22}' + a_3 . C_{21}' ,$$

etc. etc.

Hieraus folgt, dafs wir zwei neue Gleichungssysteme (5) und (6) erhalten, von denen ein jedes aus sechs Gleichungen besteht. Wir wollen uns von diesen je sechs Gleichungen je zwei herausgreifen — die übrigen folgen durch cyklische Permutation der Gröfsen c, l, m.

$$(m^2 - l^2) \frac{\partial^2 (M_0 . K_{11} + M_1 . K_{21})}{\partial m . \partial l} = l \cdot \frac{\partial (M_0 . K_{11} + M_1 . K_{21})}{\partial m}$$
$$- m \cdot \frac{\partial (M_0 . K_{11} + M_1 . K_{21})}{\partial l} ,$$

$$c_1^2 . \frac{\partial^2 (M_0 . K_{11} + M_1 . K_{21})}{\partial c^2} = \left[\frac{c . l_1^2}{l^2 - c^2} + \frac{c . m_1^2}{m^2 - c^2} + \frac{1+3c^2}{c}\right] \frac{\partial (M_0 . K_{11} + M_1 . K_{21})}{\partial c}$$
$$- \frac{l . l_1^2}{l^2 - c^2} \frac{\partial (M_0 . K_{11} + M_1 . K_{21})}{\partial l}$$
$$- \frac{m . m_1^2}{m^2 - c^2} \frac{\partial (M_0 . K_{11} + M_1 . K_{21})}{\partial m} + M_0 \cdot K_{11} + M_1 \cdot K_{21} ,$$

$$(m^2 - l^2)\frac{\partial^2(M_2 \,.\, K_{11} + M_3 \,.\, K_{21})}{\partial m \,.\, \partial l} = l \,.\, \frac{\partial(M_2 \,.\, K_{11} + M_3 \,.\, K_{21})}{\partial m}$$
$$- m \,.\, \frac{\partial(M_2 \,.\, K_{11} + M_3 \,.\, K_{21})}{\partial l},$$

$$c_1^{\,2} \,.\, \frac{\partial^2(M_2 \,.\, K_{11} + M_3 \,.\, K_{21})}{\partial c^2} = \left[\frac{c \,.\, l_1^{\,2}}{l^2 - c^2} + \frac{c \,.\, m_1^{\,2}}{m^2 - c^2} + \frac{5c^2 - 1}{c}\right]\frac{\partial(M_2 \,.\, K_{11} + M_3 \,.\, K_{21})}{\partial c}$$
$$- \frac{l \,.\, l_1^{\,2}}{l^2 - c^2}\,\frac{\partial(M_2 \,.\, K_{11} + M_3 \,.\, K_{21})}{\partial l}$$
$$- \frac{m \,.\, m_1^{\,2}}{m^2 - l^2} \,.\, \frac{\partial(M_2 \,.\, K_{11} + M_3 \,.\, K_{21})}{\partial m}$$
$$+ 3(M_2 \cdot K_{11} + M_3 \cdot K_{21}).$$

Die Gröfsen M_0, M_1, M_2, M_3 lassen sich vermöge angegebener Formeln durch die Gröfsen $\varkappa$, λ, μ, c, l, m und die Differentialquotienten der einen nach den andern ausdrücken.

Die Elimination der beiden Grössen K_{11} und K_{21} aus den Gleichungssystemen 1, 2, 5, 6, die ohne jede prinzipielle Schwierigkeit geschehen kann, ergiebt dann die gesuchten Differentialgleichungen.

Bei dieser Elimination zeigen sich einige Relationen von Vorteil, die zwar nicht direkt abgeleitet sind, aber aus den Untersuchungen der §§ 30 u. f. leicht abgeleitet werden können und also lauten:

$$(7) \qquad \begin{aligned} K_{21} &= - \sum_{\varkappa} \frac{\partial K_{11}}{\partial \varkappa} \,.\, \frac{\varkappa_1^{\,2}}{\varkappa} + K_{11}, \\ \frac{\partial K_{21}}{\partial \varkappa} &= - \frac{1}{\varkappa^2} \cdot \frac{\partial K_{11}}{\partial \varkappa} + \frac{1}{\varkappa} \cdot K_{21}, \\ \frac{\partial K_{21}}{\partial \lambda} &= - \frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{\partial K_{11}}{\partial \lambda} + \frac{1}{\lambda} \cdot K_{21}, \\ \frac{\partial K_{21}}{\partial \mu} &= - \frac{1}{\mu^2} \cdot \frac{\partial K_{11}}{\partial \mu} + \frac{1}{\mu} \cdot K_{21}. \end{aligned}$$

Mit ihrer Hilfe kann die Elimination von K_{21} unmittelbar erfolgen, so dafs das Problem lediglich auf die Elimination von K_{11} hinauskommt.

§ 46.

Entwickelung neuer Transformationsprinzipien. Vierte Methode der Koefficientenbestimmung in den Transformationsgleichungen.

Die ganze Transformationstheorie war auf Grund des Hermiteschen Transformationsprinzipes aufgebaut worden. Es lassen sich nun weitere Prinzipien aufstellen, die für die Folge von Bedeutung sind. Denken wir uns eine beliebige transformierte Thetafunktion vorgelegt:

$$\vartheta_\lambda(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}'),$$

so genügt dieselbe den Gleichungen (1):

$$\vartheta_\lambda(v_1'+1,\ v_2',\ \tau_{11}',\ \tau_{12}',\ \tau_{22}') = (-1)^{g_1}\,.\,\vartheta_\lambda(v_1',\ v_2',\ \tau_{11}',\ \tau_{12}',\ \tau_{22}'),$$

$$\vartheta_\lambda(v_1',\ v_2'+1,\ \tau_{11}',\ \tau_{12}',\ \tau_{22}') = (-1)^{g_2}\,.\,\vartheta_\lambda(v_1',\ v_2',\ \tau_{11}',\ \tau_{12}',\ \tau_{22}'),$$

$$\vartheta_\lambda(v_1'+\tau_{11}',\ v_2'+\tau_{12}',\ \tau_{11}',\ \tau_{12}',\ \tau_{22}') = (-1)^{h_1}\,.\,\vartheta_\lambda(v_1',\ v_2',\ \tau_{11}',\ \tau_{12}',\ \tau_{22}')\,.\,e^{-\pi i(2v_1'+\tau_{11}')},$$

$$\vartheta_\lambda(v_1'+\tau_{12}',\ v_2'+\tau_{22}',\ \tau_{11}',\ \tau_{12}',\ \tau_{22}') = (-1)^{h_2}\,.\,\vartheta_\lambda(v_1',\ v_2',\ \tau_{11}',\ \tau_{12}',\ \tau_{22}')\,.\,e^{-\pi i(2v_2'+\tau_{22}')}$$

und diese Gleichungen bestimmen sie bis auf eine von v_1', v_2' unabhängige Konstante. Sehen wir diese Funktion nun als Funktion von v_1, v_2, τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} an und erwägen die Beziehungen, die zwischen den ursprünglichen und den transformierten Gröfsen bestehen, insbesondere die Beziehungen:

$$nv_1 = (d_3 - a_3\,.\,\tau_{11} - b_3\,.\,\tau_{12})v_1' + (d_2 - a_2\,.\,\tau_{11} - b_2\,.\,\tau_{12})v_2',$$

$$nv_2 = (c_3 - a_3\,.\,\tau_{12} - b_3\,.\,\tau_{22})v_1' + (c_2 - a_2\,.\,\tau_{12} - b_2\,.\,\tau_{22})v_2',$$

so folgt der

Lehrsatz.

Leistet eine Funktion von v_1, v_2, von den bekannten Bedingungen abgesehen, den Gleichungen Genüge (2):

$$f\Big(v_1 + \frac{1}{n}(d_3 - a_3\,.\,\tau_{11} - b_3\,.\,\tau_{12}),\ v_2 + \frac{1}{n}(c_3 - a_3\,.\,\tau_{12} - b_3\,.\,\tau_{22})\Big) = (-1)^{g_1}.f(v_1,\ v_2),$$

$$f\Big(v_1 + \frac{1}{n}(d_2 - a_2\,.\,\tau_{11} - b_2\,.\,\tau_{12}),\ v_2 + \frac{1}{n}(c_2 - a_2\,.\,\tau_{12} - b_2\,.\,\tau_{22})\Big) = (-1)^{g_2}.f(v_1,\ v_2),$$

$$f\Big(v_1 + \frac{1}{n}(-d_0 + a_0\,.\,\tau_{11} + b_0\,.\,\tau_{12}),\ v_2 + \frac{1}{n}(-c_0 + a_0\,.\,\tau_{12} + b_0\,.\,\tau_{22})\Big) = (-1)^{h_1}.f(v_1,\ v_2).e^{-\pi i(2v_1'+\tau_{11}')},$$

$$f\Big(v_1 + \frac{1}{n}(-d_1 + a_1\,.\,\tau_{11} + b_1\,.\,\tau_{12}),\ v_2 + \frac{1}{n}(-c_1 + a_1\,.\,\tau_{12} + b_1\,.\,\tau_{22})\Big) = (-1)^{h_2}.f(v_1,\ v_2).e^{-\pi i(2v_2'+\tau_{22}')},$$

so ist sie bis auf eine von v_1 und v_2 unabhängige Konstante eindeutig bestimmt.

Wir wollen uns nun im folgenden auf einen speziellen Fall beschränken, auf denjenigen, in welchem die Beziehungen stattfinden:

$$v_1' = nv_1,\ v_2' = nv_2,\ \tau_{11}' = n\tau_{11},\ \tau_{12}' = n\tau_{12},\ \tau_{22}' = n\tau_{22}.$$

In diesem Falle lautet der Satz:

Leistet eine Funktion von v_1 und v_2 den Bedingungsgleichungen Genüge (3):

$$f\left(v_1+\frac{1}{n},\ v_2\right)=(-1)^{\varrho_1}.f(v_1,\ v_2),\ f\left(v_1,\ v_2+\frac{1}{n}\right)=(-1)^{\varrho_2}.f(v_1,v_2),$$
$$f(v_1+\tau_{11},\ v_2+\tau_{12})=e^{-n\pi i(2v_1+\tau_{11})}.(-1)^{h_1}.f(v_1,\ v_2),$$
$$f(v_1+\tau_{12},\ v_2+\tau_{22})=e^{-n\pi i(2v_2+\tau_{22})}.(-1)^{h_2}.f(v_1,\ v_2),$$

so ist sie, von einer Konstanten abgesehen, immer gleich der transformierten Funktion:

$$\vartheta_\lambda(nv_1,\ nv_2,\ n\tau_{11},\ n\tau_{12},\ n\tau_{22}).$$

Aus diesem Satze folgt dann unmittelbar der weitere:

Leistet eine Funktion von v_1 und v_2 den Gleichungen Genüge:

$$\begin{aligned} &f\left(v_1+\frac{1}{n},\ v_2\right)=(-1)^{\varrho_1}.\alpha.f(v_1,\ v_2),\\ &f\left(v_1,\ v_2+\frac{1}{n}\right)=(-1)^{\varrho_2}.\beta.f(v_1,\ v_2),\\ (4)\qquad &f(v_1+\tau_{11},\ v_2+\tau_{12})=e^{-n\pi i(2v_1+\tau_{11})}.(-1)^{h_1}.f(v_1,\ v_2),\\ &f(v_1+\tau_{12},\ v_2+\tau_{22})=e^{-n\pi i(2v_2+\tau_{22})}.(-1)^{h_2}.f(v_1,\ v_2),\\ &\alpha=e^{\frac{2\pi i p}{n}},\ \beta=e^{\frac{2\pi i q}{n}},\end{aligned}$$

so ist sie von einer Konstanten abgesehen immer gleich der Funktion:

$$e^{2\pi i(v_1.p+v_2.q)}.\vartheta_\lambda(nv_1+p.\tau_{11}+q.\tau_{12},\quad nv_2+p.\tau_{12}+q.\tau_{22}).$$

Aus dem allgemeinen Satze könnte ein analoger weiterer Satz hergeleitet werden. Wir sehen von der Aufstellung ab, da prinzipiell nichts neues auftritt, dagegen die Formen sich komplizieren.

Die Mannigfaltigkeit der Gesetze ist hiermit nicht erschöpft. Bleiben wir wieder bei dem speziellen Prinzipe stehen, so folgt aus ihm unmittelbar der

Lehrsatz.

Leistet eine Reihe von Funktionen den Gleichungen Genüge:

$$\begin{aligned} &f\left(v_1+\frac{1}{n},\ v_2\right)=(-1)^{\varrho_1}.f(v_1,\ v_2),\ f(v_1,\ v_2+1)=(-1)^{\varrho_2}.f(v_1,\ v_2),\\ (5)\quad &f(v_1+\tau_{11},\ v_2+\tau_{12})=e^{-n\pi i(2v_1+\tau_{11})}.(-1)^{h_1}.f(v_1,\ v_2),\\ &f(v_1+\tau_{12},\ v_2+\tau_{22})=e^{-n\pi i(2v_2+\tau_{22})}.(-1)^{h_2}.f(v_1,\ v_2),\end{aligned}$$

so besteht zwischen je $n+1$ derselben mindestens eine lineare Relation.

Es wird also bei derartigen Funktionen die Zahl der zu bestimmenden Konstanten verringert, und zwar verringert im Vergleich zu den gewöhnlichen Thetafunktionen n^{ter} Ordnung.

In ähnlicher Weise können weitere Sätze aufgestellt werden.

Diese Prinzipien lehren eine weitere Darstellung der Transformationsgleichungen kennen. In der That, beschränken wir uns auf den Repräsentanten

$$\begin{vmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

so folgt aus den soeben entwickelten Sätzen unmittelbar:

$$(6) \qquad \vartheta_5(nv_1, nv_2, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22})$$
$$= c \cdot \sum \varphi_5\left(v_1 + \frac{n_1}{n} - \frac{n-1}{2n}, v_2 + \frac{n_2}{n} - \frac{n-1}{2n}\right),$$

wobei gesetzt ist:

$$\varphi_5(v_1, v_2) = \vartheta_5(v_1, v_2) \cdot \vartheta_5\left(v_1 + \frac{1}{n}, v_2 + \frac{1}{n}\right) \cdots \vartheta_5\left(v_1 + \frac{n-1}{n}, v_2 + \frac{n-1}{n}\right),$$

die Summation über n_1 und n_2 von 0 bis $n-1$ zu erstrecken ist und endlich c eine Konstante bedeutet, die von v_1 und v_2 unabhängig ist, also durch Spezialisierung von v_1 und v_2 leicht bestimmt werden kann.

Nun folgt aber aus den entwickelten Additionstheoremen leicht, dafs sich die sämtlichen Funktionen φ_5 als homogene Funktionen n^{ter} Ordnung der gewöhnlichen Thetafunktionen darstellen lassen, so dafs wir auf diese Weise eine vierte Methode der Koefficientenbestimmung erhalten haben.

§ 47.*)

Theorie der Thetafunktionen, deren Charakteristiken sich aus gebrochenen Zahlen zusammensetzen lassen. Eigenschaften und Parameterdarstellung derselben.

Im zweiten Paragraphen ist die Definition der Thetafunktionen mit beliebiger Charakteristik gegeben worden. Wir wollen jetzt eine weitere Klasse derselben herausgreifen, nämlich diejenigen, für welche

---

*) Krazer und Prym: Acta mathematica III. Krause: Math. Annalen Band 26.

die Zahlen g_1, g_2, h_1, h_2 $2n^{\text{tel}}$ ganzer Zahlen sind. Auch hier empfiehlt es sich, den Nenner $2n$ einfach fortzulassen, es empfiehlt sich ferner die folgende Bezeichnungsweise einzuführen.

Es soll überall da, wo kein Mifsverständnis zu befürchten ist, gesetzt werden:

$$\vartheta_\alpha \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} (v_1, v_2) = \vartheta_\alpha \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} (v_1, v_2) = \vartheta_\alpha \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} ((v)) = \vartheta_\alpha \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} ((v))$$

$$(1) \qquad = f \cdot \vartheta_\alpha \left(v_1 + \frac{g_1 \cdot \tau_{11} + g_2 \cdot \tau_{12} + h_1}{n},\ v_2 + \frac{g_1 \cdot \tau_{12} + g_2 \cdot \tau_{22} + h_2}{n} \right),$$

$$f = e^{\sum\limits_1^2 \frac{\pi i g_\varepsilon}{n} \left(2v_\varepsilon + 2\frac{h_\varepsilon}{n} + \frac{g_1}{n} \cdot \tau_{1\varepsilon} + \frac{g_2}{n} \cdot \tau_{2\varepsilon} \right)},$$

wo α den Index einer beliebigen gewöhnlichen Thetafunktion bedeutet. Dann lauten für den Index 5 die Fundamentalgleichungen:

$$\vartheta_5 \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} (v_1 + 1, v_2) = e^{\frac{2g_1\pi i}{n}} \cdot \vartheta_5 \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} (v_1, v_2),$$

$$\vartheta_5 \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} (v_1, v_2 + 1) = e^{\frac{2g_2\pi i}{n}} \cdot \vartheta_5 \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} (v_1, v_2),$$

$$\vartheta_5 \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} (v_1 + \tau_{11}, v_2 + \tau_{12}) = e^{\frac{-2h_1\pi i}{n}} \cdot \vartheta_5 \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} (v_1, v_2) \cdot e^{-\pi i (2v_1 + \tau_{11})},$$

$$(2) \qquad \vartheta_5 \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} (v_1 + \tau_{12}, v_2 + \tau_{22}) = e^{\frac{-2h_2\pi i}{n}} \cdot \vartheta_5 \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} (v_1, v_2) \cdot e^{-\pi i (2v_2 + \tau_{22})},$$

$$\vartheta_5 \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} \left(v_1 + \frac{g_1' \cdot \tau_{11} + g_2' \cdot \tau_{12} + h_1'}{n},\ v_2 + \frac{g_1' \cdot \tau_{12} + g_2' \cdot \tau_{22} + h_2'}{n} \right)$$

$$= e^{-\frac{\pi i}{n} \sum\limits_1^2 g'_\varepsilon (2v_\varepsilon + 2h_\varepsilon + 2h'_\varepsilon + g_1' \cdot \tau_{1\varepsilon} + g_2' \cdot \tau_{2\varepsilon})} \cdot \vartheta_5 \begin{bmatrix} g + g' \\ h + h' \end{bmatrix} (v_1, v_2).$$

Hierzu kommen dieselben Differentialgleichungen, wie bei den gewöhnlichen Thetafunktionen. Bei der Vermehrung um halbe Perioden gehen die Funktionen mit dem Index 5 in die Funktionen mit andern Indices über. Der Übergang ist der analoge, wie bei den gewöhnlichen Thetafunktionen, nur treten noch $2n^{\text{te}}$ Einheitswurzeln als Faktoren hinzu und zwar bei der Vermehrung von v_1, v_2 um resp.:

$$-\frac{1}{2}, 0; 0, -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{\tau_{11}}{2}, \frac{\tau_{12}}{2}; \frac{\tau_{12}}{2}, \frac{\tau_{22}}{2}; \frac{\tau_{11}+\tau_{12}}{2}, \frac{\tau_{12}+\tau_{22}}{2};$$

$$\frac{\tau_{11}}{2}-\frac{1}{2}, \frac{\tau_{12}}{2}; \frac{\tau_{11}}{2}, \frac{\tau_{12}}{2}-\frac{1}{2}; \frac{\tau_{11}}{2}-\frac{1}{2}, \frac{\tau_{12}}{2}-\frac{1}{2}; \frac{\tau_{12}}{2}-\frac{1}{2}, \frac{\tau_{22}}{2};$$

$$\frac{\tau_{12}}{2}, \frac{\tau_{22}}{2}-\frac{1}{2}; \frac{\tau_{11}}{2}+\frac{\tau_{12}}{2}-\frac{1}{2}, \frac{\tau_{12}}{2}+\frac{\tau_{22}}{2}; \frac{\tau_{12}}{2}-\frac{1}{2}, \frac{\tau_{22}}{2}-\frac{1}{2};$$

$$\frac{\tau_{11}}{2}+\frac{\tau_{12}}{2}, \frac{\tau_{12}}{2}+\frac{\tau_{22}}{2}-\frac{1}{2}; \frac{\tau_{11}}{2}+\frac{\tau_{12}}{2}-\frac{1}{2}, \frac{\tau_{12}}{2}+\frac{\tau_{22}}{2}-\frac{1}{2},$$

der Faktor:

$$e^{-\frac{\pi i \omega}{n}},$$

wobei ω resp. gleich ist:

$$g_1; g_2; g_1+g_2; h_1; h_2; h_1+h_2; g_1+h_1; g_2+h_1; g_1+g_2+h_1;$$
$$g_1+h_2; g_2+h_2; g_1+h_1+h_2; g_1+g_2+h_2; g_2+h_1+h_2;$$
$$g_1+g_2+h_1+h_2.$$

Die noch fehlenden Beziehungen sind aus den aufgestellten leicht abzuleiten.

Aus den soeben definierten Funktionen lassen sich dann auf unendlich mannigfache Arten Thetafunktionen n^{ter} Ordnung bilden. Derartige Funktionen sind z. B. die n^{ten} Potenzen einer jeden Funktion, die Produkte zu je n:

$$\prod \vartheta_\alpha \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} ((v)),$$

bei denen

$$\sum g_1 \equiv \sum g_2 \equiv \sum h_1 \equiv \sum h_2 \equiv 0 \bmod n$$

ist u. s. w.

Solche Thetafunktionen n^{ter} Ordnung können aber nach bekannten Regeln durch die gewöhnlichen Thetafunktionen ausgedrückt werden.

Greifen wir nun z. B. die gerade Funktion heraus:

$$\vartheta_5\left(v_1+\frac{1}{n}, v_2+\frac{1}{n}\right)^n + \vartheta_5\left(v_1+\frac{n-1}{n}, v_2+\frac{n-1}{n}\right)^n$$
$$= \vartheta_5\left(\left(v+\frac{1}{n}\right)\right)^n + \vartheta_5\left(\left(v+\frac{n-1}{n}\right)\right)^n = f(v_1, v_2),$$

so genügt dieselbe der Gleichung:

$$(3)\quad f(v_1, v_2) = \sum e_{\alpha\beta\gamma\delta} \cdot \vartheta_5((v))^\alpha \cdot \vartheta_1((v))^\beta \cdot \vartheta_{02}((v))^\gamma \cdot \vartheta_{34}((v))^\delta,$$

wobei:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = n, \quad \beta+\delta \equiv \gamma+\delta \equiv 0 \bmod 2, \quad \delta < 4 \qquad \text{ist.}$$

Durch Substitution halber Perioden ergeben sich aus dieser Gleichung 15 weitere, die die Form haben:

$$\vartheta_\alpha\left(\left(v+\frac{1}{n}\right)\right)^n + \vartheta_\alpha\left(\left(v+\frac{n-1}{n}\right)\right)^n$$
$$= \sum e'_{\alpha\beta\gamma\delta} \cdot \vartheta_a((v))^\alpha \cdot \vartheta_b((v))^\beta \cdot \vartheta_c((v))^\gamma \cdot \vartheta_d((v))^\delta.$$

Die Konstanten e' unterscheiden sich dabei von den Konstanten e höchstens um vierte Einheitswurzeln. Wir dividieren diese Gleichungen durch $\vartheta_5((v))^n$ und setzen an Stelle der linken Seiten resp.:

$$\frac{\vartheta_\alpha\left(\left(v+\frac{1}{n}\right)\right)^n}{\vartheta_5\left(\left(v+\frac{1}{n}\right)\right)^n} \cdot \frac{\vartheta_5\left(\left(v+\frac{1}{n}\right)\right)^n}{\vartheta_5((v))^n} + \frac{\vartheta_\alpha\left(\left(v+\frac{n-1}{n}\right)\right)^n}{\vartheta_5\left(\left(v+\frac{n-1}{n}\right)\right)^n} \cdot \frac{\vartheta_5\left(\left(v+\frac{n-1}{n}\right)\right)^n}{\vartheta_5((v))^n}.$$

Führen wir dann wiederum die Argumente der hyperelliptischen Funktionen ein, indem wir setzen:

$$u_1 = K_{11} \cdot v_1 + K_{12} \cdot v_2,$$
$$u_2 = K_{21} \cdot v_1 + K_{22} \cdot v_2,$$

so nehmen die linken Seiten, von konstanten Faktoren abgesehen, die Formen an:

$$al_\alpha\left(u_1 + \frac{K_{11}+K_{12}}{n},\ u_2 + \frac{K_{21}+K_{22}}{n}\right)^n \cdot \frac{\vartheta_5\left(\left(v+\frac{1}{n}\right)\right)^n}{\vartheta_5((v))^n}$$
$$+ al_\alpha\left(u_1 + (n-1)\frac{K_{11}+K_{12}}{n},\ u_2 + (n-1)\frac{K_{21}+K_{22}}{n}\right)$$
$$\cdot \frac{\vartheta_5\left(\left(v+\frac{n-1}{n}\right)\right)^n}{\vartheta_5((v))^n}.$$

und ähnlich sind die rechten Seiten darzustellen. Wir erhalten sechszehn Gleichungen, die in den gesuchten Koefficienten linear sind und überdies in ähnlicher Weise behandelt werden können wie die gewöhnlichen Transformationsgleichungen.

Indem nun beide Seiten nach Potenzen von u_1 und u_2 entwickelt werden, erhalten wir durch Koefficientenvergleichung eine unendlich mannigfache Bestimmung der Koefficienten als rationale Funktionen der Thetafunktionen, deren Charakteristiken gebrochene Zahlen und deren Argumente Null sind. Zwischen diesen Gröfsen selbst ergeben sich unendlich viele Beziehungen. Mit Rücksicht auf die Parameterdarstellung der gewöhnlichen Thetafunktionen ergiebt sich hieraus

die Parameterdarstellung der von uns eingeführten Thetafunktionen. Wir erhalten dabei das Resultat, dafs der Quotient je zweier unserer Funktionen sich jedenfalls mit Hilfe einer n^{ten} und Quadratwurzeln aus zwei von einander unabhängigen Gröfsen darstellen lassen mufs.

Der Satz kann noch modifiziert werden, indessen sehen wir hiervon ab.

Ähnlich einfach kann die Parameterdarstellung unserer Funktionen für die Nullwerte der Argumente gegeben werden. Wir deuten dieselbe nur an. Aus den Transformationsgleichungen folgt, dafs die Quotienten zweier transformierter Thetafunktionen, die Gröfsen:

$$\frac{\vartheta_\alpha(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')}{\vartheta_\beta(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')}$$

für die Nullwerte der Argumente sich rational durch die Gröfsen:

$$\frac{\vartheta_a\left(\frac{m + m_1 . \tau_{11} + m_2 . \tau_{12}}{n}, \frac{m' + m_1 . \tau_{12} + m_2 . \tau_{22}}{n}\right)}{\vartheta_5\left(\frac{m + m_1 . \tau_{11} + m_2 . \tau_{12}}{n}, \frac{m' + m_1 . \tau_{12} + m_2 . \tau_{22}}{n}\right)},$$

wobei a den Index einer beliebigen Thetafunktion bedeutet, darstellen lassen. Dasselbe gilt also von den Ausdrücken:

$$\frac{\vartheta_\gamma\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix}(0, 0)^n}{\vartheta_\gamma(0, 0)^n},$$

wenn γ den Index einer geraden Thetafunktion bedeutet. Für die ungeraden Thetafunktionen ergiebt sich ein ähnliches Resultat. Jedenfalls ist das Problem der Parameterdarstellung zurückgeführt auf das Problem der Parameterdarstellung der Funktionen:

$$\frac{\vartheta_a\left(\frac{m + m_1 . \tau_{11} + m_2 . \tau_{12}}{n}, \frac{m' + m_1 . \tau_{12} + m_2 . \tau_{22}}{n}\right)}{\vartheta_5\left(\frac{m + m_1 . \tau_{11} + m_2 . \tau_{12}}{n}, \frac{m' + m_1 . \tau_{12} + m_2 . \tau_{22}}{n}\right)}.$$

Dieses Problem aber kann mit Hilfe der Multiplikationstheorie und der noch zu entwickelnden Divisionstheorie gelöst werden.

§ 48.*)

Fortsetzung der Betrachtungen des vorigen Paragraphen. Diskussion des Falles $n = 3$.

Wir nehmen jetzt den Fall $n = 3$.

Für denselben wird:

$$
(1) \quad \begin{aligned}
\vartheta_5(\!(v+\tfrac{1}{3})\!)^3 + \vartheta_5(\!(v+\tfrac{2}{3})\!)^3 = {} & e_1 . \vartheta_5(\!(v)\!)^3 + e_2 . \vartheta_5(\!(v)\!) . \vartheta_1(\!(v)\!)^2 \\
& + e_3 . \vartheta_5(\!(v)\!) . \vartheta_{02}(\!(v)\!)^2 + e_4 . \vartheta_5(\!(v)\!) . \vartheta_{34}(\!(v)\!)^2 \\
& + e_5 . \vartheta_1(\!(v)\!) . \vartheta_{02}(\!(v)\!) . \vartheta_{34}(\!(v)\!) .
\end{aligned}
$$

Durch Substitution halber Perioden ergeben sich für die Nullwerte der Argumente folgende Gleichungen (2):

$$
\begin{aligned}
2 . \vartheta_5(\!(\tfrac{1}{3})\!)^3 &= e_1 . \vartheta_5^3 + e_4 . \vartheta_5 . \vartheta_{34}^2, \quad 2 . \vartheta_{34}(\!(\tfrac{1}{3})\!)^3 = e_1 . \vartheta_{34}^3 + e_4 . \vartheta_{34} . \vartheta_5^2 , \\
-2 . \vartheta_{03}(\!(\tfrac{1}{3})\!)^3 &= e_1 . \vartheta_{03}^3 + e_3 . \vartheta_{03} . \vartheta_{23}^2, \quad 2 . \vartheta_{23}(\!(\tfrac{1}{3})\!)^3 = e_1 . \vartheta_{23}^3 - e_3 . \vartheta_{23} . \vartheta_{03}^2, \\
-2 . \vartheta_4(\!(\tfrac{1}{3})\!)^3 &= e_1 . \vartheta_4^3 - e_2 . \vartheta_4 . \vartheta_{14}^2, \quad 2 . \vartheta_{14}(\!(\tfrac{1}{3})\!)^3 = e_1 . \vartheta_{14}^3 + e_2 . \vartheta_{14} . \vartheta_4^2 , \\
2 . \vartheta_0(\!(\tfrac{1}{3})\!)^3 &= e_1 . \vartheta_0^3 + e_2 . \vartheta_0 . \vartheta_{01}^2 + e_3 . \vartheta_0 . \vartheta_2^2 + e_4 . \vartheta_0 . \vartheta_{12}^2 \\
&\qquad + e_5 . \vartheta_{01} . \vartheta_2 . \vartheta_{12} , \\
-2 . \vartheta_{01}(\!(\tfrac{1}{3})\!)^3 &= e_1 . \vartheta_{01}^3 - e_2 . \vartheta_{01} . \vartheta_0^2 - e_3 . \vartheta_{01} . \vartheta_{12}^2 + e_4 . \vartheta_{01} . \vartheta_2^2 \\
&\qquad - e_5 . \vartheta_0 . \vartheta_2 . \vartheta_{12} , \\
-2 . \vartheta_2(\!(\tfrac{1}{3})\!)^3 &= e_1 . \vartheta_2^3 - e_2 . \vartheta_2 . \vartheta_{12}^2 - e_3 . \vartheta_2 . \vartheta_0^2 + e_4 . \vartheta_2 . \vartheta_{01}^2 \\
&\qquad - e_5 . \vartheta_{01} . \vartheta_0 . \vartheta_{12} , \\
2 . \vartheta_{12}(\!(\tfrac{1}{3})\!)^3 &= e_1 . \vartheta_{12}^3 + e_2 . \vartheta_{12} . \vartheta_2^2 + e_3 . \vartheta_{12} . \vartheta_{01}^2 + e_4 . \vartheta_{12} . \vartheta_0^2 \\
&\qquad + e_5 . \vartheta_{01} . \vartheta_2 . \vartheta_0 .
\end{aligned}
$$

Hieraus ergeben sich die Werte der Konstanten:

$$
\begin{aligned}
e_1 &= \frac{2 . \vartheta_{34}(\!(\tfrac{1}{3})\!)^3 . \vartheta_{34} - 2 . \vartheta_5(\!(\tfrac{1}{3})\!)^3 . \vartheta_5}{\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4} , \\
e_2 &= \frac{2 . \vartheta_{14}(\!(\tfrac{1}{3})\!)^3 . \vartheta_4^3 + 2 . \vartheta_4(\!(\tfrac{1}{3})\!)^3 . \vartheta_{14}^3}{\vartheta_4 . \vartheta_{14}(\vartheta_4^4 + \vartheta_{14}^4)} , \\
e_3 &= - \frac{2 . \vartheta_{03}(\!(\tfrac{1}{3})\!)^3 . \vartheta_{23}^3 + 2 . \vartheta_{23}(\!(\tfrac{1}{3})\!)^3 . \vartheta_{03}^3}{\vartheta_{03} . \vartheta_{23}(\vartheta_{23}^4 + \vartheta_{03}^4)} , \\
e_4 &= \frac{2 . \vartheta_5(\!(\tfrac{1}{3})\!)^3 . \vartheta_{34}^3 - 2 . \vartheta_{34}(\!(\tfrac{1}{3})\!)^3 . \vartheta_5^3}{\vartheta_5 . \vartheta_{34}(\vartheta_{34}^4 - \vartheta_5^4)} .
\end{aligned}
$$

---

*) Cf. Krause: Mathematische Annalen Band 26.

Die Konstante e_5 ist aus einer der vier letzten Gleichungen des Gleichungssystemes (2) bestimmt. Zu gleicher Zeit ergeben sich die Thetarelationen:

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
&-\vartheta_{03}(\!(\tfrac{1}{3})\!)^3.\vartheta_{03}+\vartheta_{23}(\!(\tfrac{1}{3})\!)^3.\vartheta_{23}+\vartheta_{34}(\!(\tfrac{1}{3})\!)^3.\vartheta_{34}=\vartheta_5(\!(\tfrac{1}{3})\!)^3.\vartheta_5,\\
&-\vartheta_{01}(\!(\tfrac{1}{3})\!)^3.\vartheta_{01}+\vartheta_{12}(\!(\tfrac{1}{3})\!)^3.\vartheta_{12}+\vartheta_{14}(\!(\tfrac{1}{3})\!)^3.\vartheta_{14}=\vartheta_5(\!(\tfrac{1}{3})\!)^3.\vartheta_5,\\
&-\vartheta_4(\!(\tfrac{1}{3})\!)^3.\vartheta_4+\vartheta_{14}(\!(\tfrac{1}{3})\!)^3.\vartheta_{14}+\vartheta_{34}(\!(\tfrac{1}{3})\!)^3.\vartheta_{34}=\vartheta_5(\!(\tfrac{1}{3})\!)^3.\vartheta_5,\\
&\vartheta_0(\!(\tfrac{1}{3})\!)^3.\vartheta_0-\vartheta_{01}(\!(\tfrac{1}{3})\!)^3.\vartheta_{01}=e_1(\vartheta_0{}^4+\vartheta_{01}{}^4)\\
&\qquad\qquad-e_3.\vartheta_{03}{}^2.\vartheta_{23}{}^2+e_4.\vartheta_5{}^2.\vartheta_{34}{}^2,\\
&\vartheta_0(\!(\tfrac{1}{3})\!)^3.\vartheta_0-\vartheta_2(\!(\tfrac{1}{3})\!)^3.\vartheta_2=e_1.(\vartheta_0{}^4+\vartheta_2{}^4)\\
&\qquad\qquad+e_2.\vartheta_4{}^2.\vartheta_{14}{}^2+e_4.\vartheta_5{}^2.\vartheta_{34}{}^2,\\
&\vartheta_0(\!(\tfrac{1}{3})\!)^3.\vartheta_0-\vartheta_{12}(\!(\tfrac{1}{3})\!)^3.\vartheta_{12}=e_1(\vartheta_0{}^4-\vartheta_{12}{}^4)\\
&\qquad\qquad+e_2.\vartheta_4{}^2.\vartheta_{14}{}^2-e_3.\vartheta_{03}{}^2.\vartheta_{23}{}^2.
\end{aligned}
$$

Durch Differenzieren läſst sich die Zahl der Relationen ins Unendliche vermehren.

Wir wollen nun an die Betrachtung der obigen Funktion noch die Betrachtung der Funktion reihen:

$$\vartheta_5(\!(v+\tfrac{1}{3})\!)^3-\vartheta_5(\!(v-\tfrac{1}{3})\!)^3.$$

Wir können jedenfalls setzen:

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
\vartheta_5(\!(v+\tfrac{1}{3})\!)^3-\vartheta_5(\!(v+\tfrac{2}{3})\!)^3&=e_6.\vartheta_{02}(\!(v)\!).\vartheta_{24}(\!(v)\!).\vartheta_{04}(\!(v)\!)\\
&+e_7.\vartheta_3(\!(v)\!).\vartheta_1(\!(v)\!)\vartheta_{13}(\!(v)\!)+e_8.\vartheta_{34}(\!(v)\!).\vartheta_{23}(\!(v)\!).\vartheta_{24}(\!(v)\!)\\
&+e_9.\vartheta_{34}(\!(v)\!).\vartheta_{14}(\!(v)\!).\vartheta_{13}(\!(v)\!).
\end{aligned}
$$

Durch Substitution halber Perioden ergeben sich für die Nullwerte der Argumente folgende Gleichungen:

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
2.\vartheta_1(\!(\tfrac{1}{3})\!)^3&=-e_6.\vartheta_{34}.\vartheta_{03}.\vartheta_{23},\\
2.\vartheta_3(\!(\tfrac{1}{3})\!)^3&=e_6.\vartheta_{14}.\vartheta_{01}.\vartheta_{12}-e_8.\vartheta_4.\vartheta_2.\vartheta_{01},\\
2.\vartheta_{02}(\!(\tfrac{1}{3})\!)^3&=e_7.\vartheta_{14}.\vartheta_{34}.\vartheta_4,\\
2.\vartheta_{04}(\!(\tfrac{1}{3})\!)^3&=-e_7.\vartheta_{12}.\vartheta_{23}.\vartheta_2-e_9.\vartheta_{03}.\vartheta_{01}.\vartheta_2,\\
2.\vartheta_{13}(\!(\tfrac{1}{3})\!)^3&=-e_6.\vartheta_4.\vartheta_0.\vartheta_2-e_8.\vartheta_{14}.\vartheta_{12}.\vartheta_0+e_9.\vartheta_{14}.\vartheta_{34}.\vartheta_5,\\
2.\vartheta_{24}(\!(\tfrac{1}{3})\!)^3&=-e_7.\vartheta_{01}.\vartheta_{03}.\vartheta_0+e_8.\vartheta_{23}.\vartheta_{34}.\vartheta_5-e_9.\vartheta_{23}.\vartheta_{12}.\vartheta_0.
\end{aligned}
$$

Mithin erhalten wir folgende Werte für die Konstanten:

$$e_6 = -\frac{2 \cdot \vartheta_1(\tfrac{1}{3})^3}{\vartheta_{34} \cdot \vartheta_{03} \cdot \vartheta_{23}}, \qquad e_7 = \frac{2 \cdot \vartheta_{02}(\tfrac{1}{3})^3}{\vartheta_{14} \cdot \vartheta_{34} \cdot \vartheta_4},$$

$$e_8 = -\frac{2 \cdot \vartheta_3(\tfrac{1}{3})^3 \cdot \vartheta_{34} \cdot \vartheta_{03} \cdot \vartheta_{23} + 2 \cdot \vartheta_1(\tfrac{1}{3})^3 \cdot \vartheta_{14} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_{12}}{\vartheta_{34} \cdot \vartheta_{03} \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_4 \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_{01}},$$

$$e_9 = -\frac{2 \cdot \vartheta_{04}(\tfrac{1}{3})^3 \cdot \vartheta_{14} \cdot \vartheta_{34} \cdot \vartheta_4 + 2 \cdot \vartheta_{02}(\tfrac{1}{3})^3 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_2}{\vartheta_{34} \cdot \vartheta_{03} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_4 \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_{14}}.$$

Zu gleicher Zeit ergeben sich die Thetarelationen (6):

$$\vartheta_{13}((\tfrac{1}{3}))^3 = \frac{\vartheta_1(\tfrac{1}{3})^3 \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{34} \cdot \vartheta_{23}}{\vartheta_{03} \cdot \vartheta_4 \cdot \vartheta_2} + \frac{\vartheta_3(\tfrac{1}{3})^3 \cdot \vartheta_{14} \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_0}{\vartheta_4 \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_0}$$
$$- \frac{\vartheta_{04}(\tfrac{1}{3})^3\ \vartheta_{14} \cdot \vartheta_{34} \cdot \vartheta_5}{\vartheta_{03} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2} - \frac{\vartheta_{02}(\tfrac{1}{3})^3 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_5}{\vartheta_{03} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_4},$$

$$\vartheta_{24}((\tfrac{1}{3}))^3 = -\frac{\vartheta_1(\tfrac{1}{3})^3 \cdot \vartheta_{14} \cdot \vartheta_5 \cdot \vartheta_{12}}{\vartheta_{03} \cdot \vartheta_4 \cdot \vartheta_2} - \frac{\vartheta_3(\tfrac{1}{3})^3 \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_{34}\ \vartheta_5}{\vartheta_4 \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_{01}}$$
$$+ \frac{\vartheta_{04}(\tfrac{1}{3})^3 \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_0}{\vartheta_{03} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2} + \frac{\vartheta_{02}(\tfrac{1}{3})^3 \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{14} \cdot \vartheta_{34}}{\vartheta_{03} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_4}.$$

Auch hier läſst sich durch Differentiation die Zahl der Thetarelationen ins Unendliche vermehren.

§ 49.*)

Fortsetzung der Betrachtungen der beiden letzten Paragraphen. Aufstellung allgemeiner Thetarelationen. Einfacher Beweis der Prymschen Thetaformeln.

Wie im speziellen Falle $n = 3$ und wie die speziellen Funktionen können im allgemeinen Falle alle Thetafunktionen n^{ter} Ordnung betrachtet werden, die sich aus unsern Thetafunktionen bilden lassen. Überdies ist klar, daſs auch zwischen mehreren derselben lineare Beziehungen existieren müssen, vorausgesetzt, daſs dieselben als Thetafunktionen n^{ter} Ordnung betrachtet, dieselbe Charakteristik haben. Die Konstanten können nach angegebenen Methoden bestimmt werden. Diese Bestimmung wird aber in vielen Fällen durch die angegebenen Transformationsprinzipien allgemeinerer Art wesentlich erleichtert. Aus diesen Prinzipien folgen zum Beispiel unmittelbar die Relationen (1):

*) Krause: Math. Annal. 26, Prym und Krazer: Acta mathematica III.

$$\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\vartheta_5\begin{bmatrix}0\\h\end{bmatrix}((v))^n = c_1\cdot\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\vartheta_5\begin{bmatrix}g_1 & 0\\h_1 & h_2\end{bmatrix}((v))^n$$

$$= c_2\cdot\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\vartheta_5\begin{bmatrix}0 & g_2\\h_1 & h_2\end{bmatrix}((v))^n$$

$$= c_3\cdot\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\prod_0^{n-1}{}_{h_2}\vartheta_5\begin{bmatrix}0 & 0\\h_1 & h_2\end{bmatrix}((v))$$

$$= c_4\cdot\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\prod_0^{n-1}{}_{h_1}\vartheta_5\begin{bmatrix}0 & 0\\h_1 & h_2\end{bmatrix}((v))$$

$$= c_5\cdot\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\prod_0^{n-1}{}_{g_1}\vartheta_5\begin{bmatrix}g_1 & 0\\h_1 & h_2\end{bmatrix}((v))$$

$$= c_6\cdot\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\prod_0^{n-1}{}_{g_2}\vartheta_5\begin{bmatrix}0 & g_2\\h_1 & h_2\end{bmatrix}((v)),$$

$$\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\alpha^{h_1}\cdot\beta^{h_2}\cdot\vartheta_5\begin{bmatrix}0\\h\end{bmatrix}((v))^n = c_7\cdot\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\alpha^{h_1}\cdot\beta^{h_2}\cdot\vartheta_5\begin{bmatrix}g_1 & 0\\h_1 & h_2\end{bmatrix}((v))^n$$

$$= c_8\cdot\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\alpha^{h_1}\cdot\beta^{h_2}\cdot\vartheta_5\begin{bmatrix}0 & g_2\\h_1 & h_2\end{bmatrix}((v))^n$$

$$= c_9\cdot\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\prod_0^{n-1}{}_{g_1}\alpha^{h_1}\cdot\beta^{h_2}\cdot\vartheta_5\begin{bmatrix}g_1 & 0\\h_1 & h_2\end{bmatrix}((v))$$

$$= c_{10}\cdot\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\prod_0^{n-1}{}_{g_2}\alpha^{h_1}\cdot\beta^{h_2}\cdot\vartheta_5\begin{bmatrix}0 & g_2\\h_1 & h_2\end{bmatrix}((v)).$$

$$\alpha = e^{\frac{2\pi i p}{n}},\quad \beta = e^{\frac{2\pi i q}{n}}.$$

Ferner zeigt sich für die Gewinnung weiterer Thetarelationen der Umstand von Bedeutung, daſs, wenn zwei Thetafunktionen n^{ter} Ordnung, die als solche dieselbe Charakteristik besitzen, für n^2 Teilwerte der Perioden übereinstimmen, daſs sie dann überhaupt übereinstimmen müssen.

Setzen wir also:

$$\alpha_1 = e^{-\frac{2\pi i}{n}},\quad \beta_1 = e^{-\frac{2\pi i}{n}},$$

und nehmen die Ausdrücke:

$$\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\alpha_1^{h_1}\cdot\vartheta\begin{bmatrix}0\\h\end{bmatrix}((0))^n\cdot\vartheta\begin{bmatrix}0\\h\end{bmatrix}((v))^n$$

und

$$\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\alpha_1^{h_1}\cdot\vartheta\begin{bmatrix}1&0\\h_1&h_2\end{bmatrix}((0))^n\cdot\vartheta\begin{bmatrix}1&0\\h_1&h_2\end{bmatrix}((v))^n,$$

so stimmen dieselben für die n^2 Werte von v überein:

$$\frac{-\tau_{11}+h_1}{n},\qquad\frac{-\tau_{12}+h_2}{n}.$$

Mithin ergiebt sich die Gleichung:

$$(2)\qquad\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\alpha_1^{h_1}\cdot\vartheta\begin{bmatrix}0\\h\end{bmatrix}((0))^n\cdot\vartheta\begin{bmatrix}0\\h\end{bmatrix}((v))^n$$

$$=\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\alpha_1^{h_1}\cdot\vartheta\begin{bmatrix}1&0\\h_1&h_2\end{bmatrix}((0))^n\cdot\vartheta\begin{bmatrix}1&0\\h_1&h_2\end{bmatrix}((v))^n.$$

Genau so ergeben sich die Gleichungen (3):

$$\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\beta_1^{h_2}\cdot\vartheta\begin{bmatrix}0\\h\end{bmatrix}((0))^n\cdot\vartheta\begin{bmatrix}0\\h\end{bmatrix}((v))^n$$

$$=\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\beta_1^{h_2}\cdot\vartheta\begin{bmatrix}0&1\\h_1&h_2\end{bmatrix}((0))^n\cdot\vartheta\begin{bmatrix}0&1\\h_1&h_2\end{bmatrix}((v))^n,$$

$$\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\alpha_1^{h_1}\cdot\beta_1^{h_2}\cdot\vartheta\begin{bmatrix}0\\h\end{bmatrix}((0))^n\cdot\vartheta\begin{bmatrix}0\\h\end{bmatrix}((v))^n$$

$$=\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\alpha_1^{h_1}\cdot\beta_1^{h_2}\cdot\vartheta\begin{bmatrix}1\\h\end{bmatrix}((0))^n\cdot\vartheta\begin{bmatrix}1\\h\end{bmatrix}((v))^n.$$

Aus diesen Gleichungen können eine Reihe anderer hergeleitet werden. Setzen wir in der ersten derselben z. B. an Stelle von v_1, v_2 der Reihe nach $v_1+\frac{h_1'}{n}$, $v_2+\frac{h_2'}{n}$ und lassen h_1' und h_2' der Reihe nach alle Werte von 0 bis $n-1$ annehmen, so erhalten wir beim Summieren aller Gleichungen:

$$\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\alpha_1^{h_1}\cdot\vartheta_5\begin{bmatrix}0\\h\end{bmatrix}((0))^n\cdot\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\vartheta_5\begin{bmatrix}0\\h\end{bmatrix}((v))^n$$

$$=\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\alpha_1^{h_1}\cdot\vartheta_5\begin{bmatrix}1&0\\h_1&h_2\end{bmatrix}((0))^n\cdot\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\vartheta_5\begin{bmatrix}1&0\\h_1&h_2\end{bmatrix}((v))^n.$$

An Stelle von v_1 und v_2 setzen wir links und rechts resp. $v_1 + \frac{\tau_{11}}{n}$, $v_2 + \frac{\tau_{12}}{n}$, so wird:

$$\sum_0^{n-1}{}_{h_1} \sum_0^{n-1}{}_{h_2} \alpha_1^{h_1} \cdot \vartheta_5 \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} ((0))^n \cdot \sum_0^{n-1}{}_{h_1} \sum_0^{n-1}{}_{h_2} \alpha_1^{h_1} \cdot \vartheta_5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} ((v))^n$$

$$= \sum_0^{n-1}{}_{h_1} \sum_0^{n-1}{}_{h_2} \alpha_1^{h_1} \cdot \vartheta_5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} ((0))^n \cdot \sum_0^{n-1}{}_{h_1} \sum_0^{n-1}{}_{h_2} \alpha_1^{h_1} \cdot \vartheta_5 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} ((v))^n.$$

Setzen wir hierin $v = 0$, so erhalten wir die Gleichung (4):

$$\sum_0^{n-1}{}_{h_1} \sum_0^{n-1}{}_{h_2} \alpha_1^{h_1} \cdot \vartheta_5 \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} ((0))^n = \sum_0^{n-1}{}_{h_1} \sum_0^{n-1}{}_{h_2} \alpha_1^{h_1} \cdot \vartheta_5 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} ((0))^n.$$

Genau so wird (5):

$$\sum_0^{n-1}{}_{h_1} \sum_0^{n-1}{}_{h_2} \beta_1^{h_2} \cdot \vartheta_5 \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} ((0))^n = \sum_0^{n-1}{}_{h_1} \sum_0^{n-1}{}_{h_2} \beta_1^{h_2} \cdot \vartheta_5 \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} ((0))^n,$$

$$\sum_0^{n-1}{}_{h_1} \sum_0^{n-1}{}_{h_2} \alpha_1^{h_1} \cdot \beta_1^{h_2} \cdot \vartheta_5 \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} ((0))^n = \sum_0^{n-1}{}_{h_1} \sum_0^{n-1}{}_{h_2} \alpha_1^{h_1} \cdot \beta_1^{h_2} \cdot \vartheta_5 \begin{bmatrix} 2 \\ h \end{bmatrix} ((0))^n.$$

Es können diese Gleichungen zur Vereinfachung der Konstantenausdrücke in einigen früheren Gleichungen dienen.

Es ist klar, dafs alle diese Gleichungen nur Vertreter grofser Kategorieen von Relationen sind, dafs aufser ihnen noch eine Fülle anderer existiert. Es sollen diese nicht einzeln aufgestellt werden, vielmehr sollen lediglich die allgemeinsten Gleichungen, die bis jetzt für die Thetafunktionen existieren, entwickelt werden. Es enthalten dieselben dann alle vorhin entwickelten und alle die auf analoge Weise hergestellt werden können, in sich. Diese Gleichungen rühren von den Herrn Prym und Krazer her. Wir setzen dazu:

$$(6)\quad \begin{aligned}
n w_1^{(1)} &= (1-n) v_1^{(1)} + \cdots + v_1^{(2n)}, \\
n w_1^{(2)} &= v_1^{(1)} + (1-n) v_1^{(2)} + \cdots + v_1^{(2n)}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
n w_1^{(2n)} &= v_1^{(1)} + \cdots + (1-n) v_1^{(2n)}, \\
n w_2^{(1)} &= (1-n) v_2^{(1)} + \cdots + v_2^{(2n)}, \\
n w_2^{(2)} &= v_2^{(1)} + (1-n) v_2^{(2)} + \cdots + v_2^{(2n)}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
n w_2^{(2n)} &= v_2^{(1)} + \cdots + (1-n) v_2^{(2n)},
\end{aligned}$$

und bilden zunächst das Produkt:

$$\vartheta(v_1^{(1)}, v_2^{(1)}) \cdot \vartheta(v_1^{(2)}, v_2^{(2)}) \ldots \vartheta(v_1^{(2n)}, v_2^{(2n)}) = \prod_{1}^{2n}{}_{s}\, \vartheta(v_1^{(s)}, v_2^{(s)}).$$

Betrachten wir das Produkt als Funktion von $v_1^{(s)}$, $v_2^{(s)}$, und bezeichnen es als solches durch $f(v_1^{(s)}, v_2^{(s)})$, so leistet es den Gleichungen Genüge:

$$\begin{aligned}
&f(v_1^{(s)} + 1, v_2^{(s)}) = f(v_1^{(s)}, v_2^{(s)}),\; f v_1^{(s)}, v_2^{(s)} + 1) = f(v_1^{(s)}, v_2^{(s)}),\\
(7)\qquad &f(v_1^{(s)} + \tau_{11}, v_2^{(s)} + \tau_{12}) = e^{-\pi i (2 v_1^{(s)} + \tau_{11})} . f(v_1^{(s)}, v_2^{(s)}),\\
&f(v_1^{(s)} + \tau_{12}, v_2^{(s)} + \tau_{22}) = e^{-\pi i (2 v_2^{(s)} + \tau_{22})} . f(v_1^{(s)}, v_2^{(s)}).
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen bestimmen es bis auf eine von $v_1^{(s)}$, $v_2^{(s)}$ unabhängige Konstante.

Bilden wir andrerseits das Produkt:

$$\prod_{1}^{2n}{}_{s}\, e^{-\frac{2}{n}\pi i g_1 . h_1} . \vartheta_5 \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} (w_1^{(s)}, w_2^{(s)}),$$

wo die Zahlen g und h beliebige Werte von 0 bis $n - 1$ bedeuten können und sehen diesen Ausdruck als Funktion von $v_1^{(s)}$, $v_2^{(s)}$ an, so geht er bei Vermehrung von $v_1^{(s)}$ um 1 über in:

$$\prod_{1}^{2n}{}_{s}\, e^{-\frac{2}{n}\pi i g_1 (h_1 + 1)} . \vartheta_5 \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 + 1 & h_2 \end{bmatrix} (w_1^{(s)}, w_2^{(s)}).$$

Dabei ist klar, dafs wir, ohne der Richtigkeit Abbruch zu thun, annehmen können, dafs auch $h_1 + 1$ eine der Zahlen von 0 bis $n - 1$ bedeutet. Hieraus folgt, dafs die Summe:

$$\sum_{0}^{n-1}{}_{h_1} \prod_{1}^{2n}{}_{s}\, e^{-\frac{2}{n}\pi i g_1 . h_1} . \vartheta_5 \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} w_1^{(s)}, w_2^{(s)}),$$

als Funktion von $v_1^{(s)}$, $v_2^{(s)}$ aufgefafst, ungeändert bleibt, wenn $v_1^{(s)}$ um 1 vermehrt wird. Genau so folgt, dafs die Summe:

$$\sum_{0}^{n-1}{}_{h_1} \sum_{0}^{n-1}{}_{h_2} \prod_{1}^{2n}{}_{s}\, e^{-\frac{2}{n}\pi i (g_1 . h_1 + g_2 . h_2)} . \vartheta_5 \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} (w_1^{(s)}, w_2^{(s)})$$

ungeändert bleibt, wenn ein beliebiges der Argumente $v_1^{(s)}$, $v_2^{(s)}$ um 1 vermehrt wird.

Nehmen wir endlich die vierfache Summe:

$$\sum_{0}^{n-1}{}_{h_1} \sum_{0}^{n-1}{}_{h_2} \sum_{0}^{n-1}{}_{g_1} \sum_{0}^{n-1}{}_{g_2} \prod_{1}^{2n}{}_{s}\, e^{-\frac{2}{n}\pi i (g_1 h_1 + g_2 h_2)} . \vartheta_5 \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} (w_1^{(s)}, w_2^{(s)}),$$

so ist klar, dafs dieselbe, als Funktion von $v_1^{(s)}$, $v_2^{(s)}$ aufgefafst, den

vorhin aufgestellten charakterisierenden Gleichungen Genüge leistet, sich also, da ε eine beliebige der Zahlen $1, \ldots 2n$ bedeutet, von dem Produkte:

$$\prod_{0}^{2n}{}^{\varepsilon} \vartheta_5(v_1^{(\varepsilon)}, v_2^{(\varepsilon)})$$

nur um eine Konstante unterscheiden kann, die von den Gröfsen w_1, w_2 oder v_1, v_2 unabhängig ist, wohl aber von den Gröfsen τ abhängen kann.

Bezeichnen wir nun das soeben hingeschriebene Produkt kurz durch F, so folgt unmittelbar, dafs es den Differentialgleichungen Genüge leistet:

$$(8)\quad \begin{gathered} \sum_{1}^{2n}{}^{\varepsilon} \frac{\partial^2 F}{\partial v_1^{(\varepsilon)^2}} = 4\pi i \cdot \frac{\partial F}{\partial \tau_{11}}, \quad \sum_{1}^{2n}{}^{\varepsilon} \frac{\partial^2 F}{\partial v_2^{(\varepsilon)^2}} = 4\pi i \cdot \frac{\partial F}{\partial \tau_{22}}, \\ \sum_{1}^{2n}{}^{\varepsilon} \frac{\partial^2 F}{\partial v_1^{(\varepsilon)} \cdot \partial v_2^{(\varepsilon)}} = 2\pi i \cdot \frac{\partial F}{\partial \tau_{12}}. \end{gathered}$$

Genau denselben Gleichungen leistet aber die vierfache Summe Genüge, welche sich von dem Produkte nur um eine Konstante unterscheidet. Hieraus folgt, dafs die Konstante auch von den Gröfsen τ unabhängig sein mufs. Dann aber finden wir sie am einfachsten, wenn für die einzelnen Thetafunktionen ihre Fourierschen Entwickelungen eingesetzt werden. Hierbei ergiebt sich dann die Gleichung:

$$(9)\quad \begin{gathered} n^2 \prod_{1}^{2n}{}^{\varepsilon} \vartheta_5(v_1^{(\varepsilon)}, v_2^{(\varepsilon)}) \\ = \sum_{0}^{n-1}{}^{h_1} \sum_{0}^{n-1}{}^{h_2} \sum_{0}^{n-1}{}^{g_1} \sum_{0}^{n-1}{}^{g_2} \prod_{1}^{2n}{}^{\varepsilon} \vartheta_5\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(w_1^{(\varepsilon)}, w_2^{(\varepsilon)}) \cdot e^{-\frac{2}{n}\pi i (h_1 \cdot g_1 + h_2 \cdot g_2)}. \end{gathered}$$

Ganz analog ergiebt sich das Resultat.

Setzt man:

$$(10)\quad \begin{aligned} n w_1^{(1)} &= (2-n) v_1^{(1)} + \cdots + 2 v_1^{(n)}, \\ n w_1^{(2)} &= 2 v_1^{(1)} + (2-n) v_1^{(2)} + \cdots + 2 v_1^{(n)}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ n w_1^{(n)} &= 2 v_1^{(1)} + \cdots + (2-n) v_1^{(n)}, \\ n w_2^{(1)} &= (2-n) v_2^{(1)} + \cdots + 2 v_2^{(n)}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ n w_2^{(n)} &= 2 v_2^{(1)} + \cdots + (2-n) v_2^{(n)}, \end{aligned}$$

so findet die Gleichung statt:

$$(11)\quad n^2 \prod_{1}^{n} \vartheta_5 (v_1^{(\epsilon)}, v_2^{(\epsilon)}) = \sum_{0}^{n-1} {}^{h_1} \sum_{0}^{n-1} {}^{h_2} \sum_{0}^{n-1} {}^{g_1} \sum_{0}^{n-1} {}^{g_2} \prod_{1}^{n} {}^{\epsilon} \vartheta_5 \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} (w_1^{(\epsilon)}, w_2^{(\epsilon)}) . e^{\frac{n-1}{n} (h_1 . g_1 + h_2 . g_2) \pi i} .$$

Aus diesen beiden Additionstheoremen lassen sich dann durch Substitution von n^{tel} Perioden die allgemeinsten Formeln ableiten, die von den Herren Prym und Krazer aufgestellt worden sind.

Bei der Aufstellung dieser Gleichungen haben wir uns auf die fundamentale Thetafunktion beschränkt. Unter Hinzunahme der übrigen ergeben sich analoge Resultate.

§ 50.*)

Additionstheoreme zwischen Thetafunktionen mit verschiedenen Moduln.

Mit Hülfe der von uns eingeführten allgemeineren Thetafunktionen lassen sich nun noch weitere Additionstheoreme bilden, die sich für die Transformationstheorie von hervorragender Bedeutung zeigen. Wir wollen uns dazu in den von uns betrachteten Funktionen an Stelle von τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} gesetzt denken $n\tau_{11}$, $n\tau_{12}$, $n\tau_{22}$, d. h. die Funktionen bilden:

$$e^{\sum_{1}^{2} {}^{\epsilon} \frac{\pi i g_\epsilon}{n} \left(2 v_\epsilon + 2 \frac{h_\epsilon}{n} + g_1 . \tau_{1\epsilon} + g_2 . \tau_{2\epsilon}\right)}$$

$$. \vartheta_\alpha\left(v_1 + g_1 . \tau_{11} + g_2 . \tau_{12} + \frac{h_1}{n}, v_2 + g_1 . \tau_{12} + g_2 . \tau_{22} + \frac{h_2}{n}, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22}\right) .$$

Hierbei sollen von vornherein die Gröfsen h_1 und h_2 der Null gleich angenommen werden. Die auf diese Weise entstandenen Funktionen bezeichnen wir durch:

$$\vartheta_\alpha [g_1\ g_2] (v_1, v_2, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22}),$$

oder auch, wo kein Irrtum möglich ist, durch:

$$\vartheta_\alpha [g] (v_1, v_2, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22})$$

oder

$$\vartheta_\alpha [g_1\ g_2] ((v, n\tau))$$

oder

$$\vartheta_\alpha [g] ((v, n\tau)).$$

Die fundamentalen Eigenschaften dieser Funktionen folgen dann

*) Cf. Krause: Mathematische Annalen Band 27.

durch Spezialisierung unmittelbar aus den fundamentalen Eigenschaften der allgemeinen Thetafunktionen, deren Charakteristiken sich aus gebrochenen Zahlen zusammensetzen lassen. Setzen wir nun:

$$F = \prod_{1}^{n}{}_{\varepsilon}\, \vartheta_5 (v_1^{(\varepsilon)}, v_2^{(\varepsilon)}, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}),$$

so ist F aufgefafst als Funktion von $v_1^{(\varepsilon)}$, $v_2^{(\varepsilon)}$ eine Thetafunktion mit der Charakteristik Null und der ersten Ordnung, welche überdies den im vorigen Paragraphen aufgestellten Differentialgleichungen Genüge leistet. Eine jede Funktion, die dieselben Eigenschaften besitzt, kann sich von ihr nur um eine Gröfse unterscheiden, die von den Gröfsen $v_1^{(\varepsilon)}$, $v_2^{(\varepsilon)}$, τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} unabhängig ist.

Es soll versucht werden, derartige Funktionen mit Hülfe der soeben definierten Gröfsen wirklich herzustellen. Wir setzen dazu (1):

$$w_1^{(\varepsilon)} = a_{\varepsilon 1} . v_1^{(1)} + a_{\varepsilon 2} . v_1^{(2)} + \cdots + a_{\varepsilon n} . v_1^{(n)},$$
$$w_2^{(\varepsilon)} = a_{\varepsilon 1} . v_2^{(1)} + a_{\varepsilon 2} . v_2^{(2)} + \cdots + a_{\varepsilon n} . v_2^{(n)}, \quad \varepsilon = 1, 2, \ldots n,$$

wobei die Gröfsen $a_{\varepsilon \varepsilon_1}$ einstweilen völlig willkürliche ganze Zahlen bedeuten können und bilden für weitere willkürlich gewählte ganze Zahlen $g_1^{(\varepsilon)}$, $g_2^{(\varepsilon)}$, n_ε das Produkt:

$$\prod_{1}^{n}{}_{\varepsilon}\, \vartheta_5 [g_1^{(\varepsilon)}\ g_2^{(\varepsilon)}] ((w^{(\varepsilon)}, n_\varepsilon . \tau)).$$

Die erste Frage, die sich hieran knüpft, lautet: „welche Bedingungen müssen die eingeführten Gröfsen erfüllen, damit dieses Produkt bei der Vermehrung von $v_1^{(\varepsilon)}$, $v_2^{(\varepsilon)}$ um Vielfache der Moduln in ein analog gebildetes Produkt übergeht, multipliziert mit der Exponentialgröfse, welche bei dem ursprünglich zu Grunde gelegten Produkt auftritt.“ Man überzeugt sich leicht, dafs die hinreichenden und notwendigen Bedingungen hierfür lauten:

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\frac{a_{1\varepsilon}^2}{n_1} + \frac{a_{2\varepsilon}^2}{n_2} + \frac{a_{n\varepsilon}^2}{n_n} = 1, \ \varepsilon = 1, 2, \ldots n, \\ &\frac{a_{1\varepsilon} \cdot a_{1\varkappa}}{n_1} + \frac{a_{2\varepsilon} \cdot a_{2\varkappa}}{n_2} + \frac{a_{n\varepsilon} \cdot a_{n\varkappa}}{n_n} = 0, \ \varepsilon \gtrless \varkappa. \end{aligned}$$

Die Bedingungen können auch geschrieben werden:

$$(3)\qquad \begin{aligned} a_{\varepsilon 1}^2 + a_{\varepsilon 2}^2 + \cdots + a_{\varepsilon n}^2 &= n_\varepsilon, \\ a_{\varepsilon 1} . a_{\varkappa 1} + a_{\varepsilon 2} . a_{\varkappa 2} + \cdots + a_{\varepsilon n} . a_{\varkappa n} &= 0. \end{aligned}$$

Legen wir nun als erstes Glied dasjenige zu Grunde, für welches

sämtliche Gröfsen $g_1^{(\epsilon)}$, $g_2^{(\epsilon)}$ der Null gleich sind, so folgt leicht, dafs der Ausdruck:

$$\sum \prod_1^n {}_\epsilon\, \vartheta_5\,[g_1^{(\epsilon)}\;g_2^{(\epsilon)}]\,(\!(w^{(\epsilon)},\; n_\epsilon . \tau)\!)$$

bei der Vermehrung der Gröfsen $v_1^{(\epsilon)}$, $v_2^{(\epsilon)}$ um Vielfache der Moduln den Bedingungsgleichungen der Thetafunktionen erster Ordnung mit der Charakteristik Null Genüge leistet, wenn die Summe erstreckt ist über alle $g_1^{(\epsilon)}$, $g_2^{(\epsilon)}$, die den Kongruenzen Genüge leisten:

$$(4)\qquad \begin{aligned} g_1^{(\epsilon)} &\equiv a_{\epsilon 1} . s_1^{(1)} + a_{\epsilon 2} . s_1^{(2)} + \cdots + a_{\epsilon n} . s_1^{(n)} \bmod n_\epsilon, \\ g_2^{(\epsilon)} &\equiv a_{\epsilon 1} . s_2^{(1)} + a_{\epsilon 2} . s_2^{(2)} + \cdots + a_{\epsilon n} . s_2^{(n)} \bmod n_\epsilon. \end{aligned}$$

Die Gröfsen $s_1^{(\epsilon)}$, $s_2^{(\epsilon)}$ sind völlig willkürliche ganze Zahlen.

Aus diesen Kongruenzen folgt dann, dafs die Gröfsen:

$$\frac{g_1^{(1)} . a_{1\epsilon}}{n_1} + \frac{g_1^{(2)} . a_{2\epsilon}}{n_2} + \cdots + \frac{g_1^{(n)} . a_{n\epsilon}}{n_n}$$

und

$$\frac{g_2^{(1)} . a_{1\epsilon}}{n_1} + \frac{g_2^{(2)} . a_{2\epsilon}}{n_2} + \cdots + \frac{g_2^{(n)} . a_{n\epsilon}}{n_n}$$

sämtlich ganze Zahlen sind. Hieraus wiederum folgt, dafs die vorhin definierte Summe sich nicht ändert, wenn man die Argumente $v_1^{(\epsilon)}$, $v_2^{(\epsilon)}$ um ganze Zahlen vermehrt. Jedenfalls also ist die Summe als Funktion von $v_1^{(\epsilon)}$, $v_2^{(\epsilon)}$ aufgefafst eine Thetafunktion erster Ordnung mit der Charakteristik Null. Da sie nun auch, wie man sich leicht überzeugt, denselben partiellen Differentialgleichungen Genüge leistet, wie das ursprüngliche Produkt, so kann sie sich von diesem nur um eine numerische Konstante unterscheiden. Der Wert derselben ergiebt sich aber, wie die Einsetzung der Reihenentwickelungen zeigt, gleich 1, mit andern Worten, wir erhalten das Additionstheorem:

$$(5)\qquad \prod_1^n {}_\epsilon\, \vartheta_5\,(v_1^{(\epsilon)},\, v_2^{(\epsilon)}) = \sum \prod_1^n {}_\epsilon\, \vartheta_5\,[g_1^{(\epsilon)}\;g_2^{(\epsilon)}]\,(\!(w^{(\epsilon)},\; n_\epsilon . \tau)\!),$$

wobei die Summe auf der rechten Seite über alle diejenigen Werte von $g_1^{(\epsilon)}$, $g_2^{(\epsilon)}$ auszudehnen ist, welche den Kongruenzen Genüge leisten:

$$(6)\qquad \begin{aligned} g_1^{(\epsilon)} &\equiv a_{\epsilon 1} . s_1^{(1)} + a_{\epsilon 2} . s_1^{(2)} + \cdots + a_{\epsilon n} . s_1^{(n)} \bmod n_\epsilon, \\ g_2^{(\epsilon)} &\equiv a_{\epsilon 1} . s_2^{(1)} + a_{\epsilon 2} . s_2^{(2)} + \cdots + a_{\epsilon n} . s_2^{(n)} \bmod n_\epsilon. \end{aligned}$$

Das soeben entwickelte Additionstheorem kann als spezieller Fall eines allgemeineren angesehen werden, dessen Ableitung im Prinzip dieselbe ist.

Seien $m_1, \ldots m_n$ n beliebig vorgelegte ganze Zahlen, mögen ferner zwischen den Veränderlichen v und den Veränderlichen w die Relationen bestehen:

$$(7)\qquad \begin{aligned} w_1^{(\varepsilon)} &= a_{\varepsilon 1} . v_1^{(1)} + a_{\varepsilon 2} . v_1^{(2)} + \cdots a_{\varepsilon n} . v_1^{(n)}, \\ w_2^{(\varepsilon)} &= a_{\varepsilon 1} . v_2^{(1)} + a_{\varepsilon 2} . v_2^{(2)} + \cdots a_{\varepsilon n} . v_2^{(n)}. \end{aligned}$$

Genügen dann die ganzen Zahlen $a_{\varepsilon \varkappa}$ den Gleichungen:

$$(8)\qquad \begin{aligned} & m_\varepsilon \left(\frac{a_{1\varepsilon}^2}{n_1} + \frac{a_{2\varepsilon}^2}{n_2} \cdots + \frac{a_{n\varepsilon}^2}{n_n} \right) = 1, \quad \varepsilon = 1, 2, \ldots n, \\ & \frac{a_{1\varepsilon} . a_{1\varkappa}}{n_1} + \frac{a_{2\varepsilon} . a_{2\varkappa}}{n_2} + \frac{a_{n\varepsilon} . a_{n\varkappa}}{n_n} = 0, \quad \varepsilon \gtrless \varkappa, \end{aligned}$$

oder, was dasselbe sagt, den Gleichungen:

$$(9)\qquad \begin{aligned} & m_1 . a_{\varepsilon 1}^2 + m_2 . a_{\varepsilon 2}^2 + \cdots m_n . a_{\varepsilon n}^2 = n_\varepsilon, \\ & m_1 . a_{\varepsilon 1} . a_{\varkappa 1} + m_2 . a_{\varepsilon 2} . a_{\varkappa 2} + \cdots m_n . a_{\varepsilon n} . a_{\varkappa n} = 0, \end{aligned}$$

so gilt das allgemeine Additionstheorem:

$$(10)\qquad \begin{aligned} & \prod_1^n {}_\varepsilon \, \vartheta_5 (v_1^{(\varepsilon)}, v_2^{(\varepsilon)}, m_\varepsilon . \tau_{11}, m_\varepsilon . \tau_{12}, m_\varepsilon . \tau_{22}) \\ & = \sum \prod_1^n {}_\varepsilon \, \vartheta_5 [g_1^{(\varepsilon)} \, g_2^{(\varepsilon)}] ((w^{(\varepsilon)}, n_\varepsilon . \tau)), \end{aligned}$$

wobei die Kongruenzen bestehen:

$$\begin{aligned} g_1^{(\varepsilon)} &\equiv a_{\varepsilon 1} . m_1 . s_1^{(1)} + a_{\varepsilon 2} . m_2 . s_1^{(2)} + \cdots a_{\varepsilon n} . m_n . s_1^{(n)} \bmod n_\varepsilon, \\ g_2^{(\varepsilon)} &\equiv a_{\varepsilon 1} . m_1 . s_2^{(1)} + a_{\varepsilon 2} . m_2 . s_2^{(2)} + \cdots a_{\varepsilon n} . m_n . s_2^{(n)} \bmod n_\varepsilon. \end{aligned}$$

Bisher sind die Zahlen $g_1^{(\varepsilon)}$, $g_2^{(\varepsilon)}$ immer als ganze Zahlen angenommen. Wir wollen jetzt die verallgemeinerte Annahme treffen, daſs sie auch halbe Zahlen sein können und an ihrer Stelle setzen: $\frac{g_1^{(\varepsilon)}}{2}$, $\frac{g_2^{(\varepsilon)}}{2}$. Es sind dann die neuen Gröſsen $g_1^{(\varepsilon)}$, $g_2^{(\varepsilon)}$ ihrerseits ganze Zahlen.

Setzen wir dann (11):

$$\begin{aligned} 2w_1^{(\varepsilon)} &= a_{\varepsilon 1} . v_1^{(1)} + a_{\varepsilon 2} . v_1^{(2)} + \cdots a_{\varepsilon n} . v_1^{(n)}, \\ 2w_2^{(\varepsilon)} &= a_{\varepsilon 1} . v_2^{(1)} + a_{\varepsilon 2} . v_2^{(2)} + \cdots a_{\varepsilon n} . v_2^{(n)}, \end{aligned}$$

und nehmen an, daſs die ganzen Zahlen $a_{\varepsilon \varkappa}$ den Bedingungsgleichungen Genüge leisten:

$$(12)\qquad \begin{aligned} &\frac{a_{1\varepsilon}^2}{n_1} + \frac{a_{2\varepsilon}^2}{n_2} + \cdots \frac{a_{n\varepsilon}^2}{n_n} = 4, \\ &\frac{a_{1\varepsilon}.a_{1\varkappa}}{n_1} + \frac{a_{2\varepsilon}.a_{2\varkappa}}{n_2} + \cdots \frac{a_{n\varepsilon}.a_{n\varkappa}}{n_n} = 0, \end{aligned}$$

die auch geschrieben werden können:

$$(13)\qquad \begin{aligned} &a_{\varepsilon 1}^2 + a_{\varepsilon 2}^2 + \cdots a_{\varepsilon n}^2 = 4n_\varepsilon, \\ &a_{\varepsilon 1}\,.\,a_{\varkappa 1} + a_{\varepsilon 2}\,.\,a_{\varkappa 2} + \cdots a_{\varepsilon n}\,.\,a_{\varkappa n} = 0, \end{aligned}$$

so findet das Additionstheorem statt:

$$(14)\qquad 2^{2n}\prod_1^n{}_{\varepsilon}\, \vartheta_5((v^{(\varepsilon)}, \tau))$$

$$= \sum \prod_1^n{}_{\varepsilon}\, \vartheta_5\left[\frac{g^{(\varepsilon)}}{2}\right]\Bigg(\Bigg(\frac{a_{\varepsilon 1}}{2}(w_1^{(1)} + \alpha_1^{(1)}) + \frac{a_{\varepsilon 2}}{2}(w_1^{(2)} + \alpha_1^{(2)}) + \cdots + \frac{a_{\varepsilon n}}{2}(w_1^{(n)} + \alpha_1^{(n)}),\ n_\varepsilon\,.\,\tau\Bigg)\Bigg).$$

Hierbei ist die Summe ausgedehnt erstens über alle $\alpha_1^{(1)}, \ldots \alpha_1^{(n)}$, $\alpha_2^{(1)} \ldots \alpha_2^{(n)}$, welche den Wert Null oder 1 besitzen und zweitens über alle $g_1^{(\varepsilon)}$, $g_2^{(\varepsilon)}$, die den Congruenzen Genüge leisten:

$$(15)\qquad \begin{aligned} &\frac{g_1^{(\varepsilon)}}{2} \equiv \frac{a_{\varepsilon 1}\,.\,s_1^{(1)}}{2} + \frac{a_{\varepsilon 2}\,.\,s_1^{(2)}}{2} + \cdots \frac{a_{\varepsilon n}\,.\,s_1^{(n)}}{2} \bmod n_\varepsilon, \\ &\frac{g_2^{(\varepsilon)}}{2} \equiv \frac{a_{\varepsilon 1}\,.\,s_2^{(1)}}{2} + \frac{a_{\varepsilon 2}\,.\,s_2^{(2)}}{2} + \cdots \frac{a_{\varepsilon n}\,.\,s_2^{(n)}}{2} \bmod n_\varepsilon. \end{aligned}$$

§ 51.*)

Allgemeine Fassung des Transformationsproblems.

Das Transformationsproblem der Thetafunktionen, wie wir es bisher aufgestellt haben, lautete: „Es soll eine beliebige repräsentierende Thetafunktion als Funktion der ursprünglichen dargestellt werden.“ Wir wollen das Problem nun allgemeiner fassen. Hierbei beschränken wir uns auf den Fall einer ungeraden Transformation und stellen das Problem: „Es sollen die möglichst allgemeinen Relationen zwischen den ursprünglichen und den transformierten Thetafunktionen aufgestellt werden.“

Nehmen wir dazu wieder ein spezielles Beispiel.

Die Transformationstheorie, wie sie bisher entwickelt worden ist, zeigt die Richtigkeit der Gleichung:

---

*) Cf. Krause: Mathematische Annalen 25.

$$(1)\qquad \vartheta_0(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')$$
$$= \sum e_{\alpha\beta\gamma\delta} \cdot \vartheta_0(v_1, v_2)^\alpha \cdot \vartheta_b(v_1, v_2)^\beta \cdot \vartheta_c(v_1, v_2)^\gamma \cdot \vartheta_d(v_1, v_2)^\delta,$$
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = n, \quad \beta + \delta \equiv \gamma + \delta \equiv 0 \bmod 2, \quad \delta < 4.$$

Die Konstanten, die in dieser Gleichung auftreten, sind auf mannigfache Arten bestimmt worden. Seien nun $\vartheta_0(v_1', v_2', \tau_{11}' \tau_{12}', \tau_{22}')$ und $\vartheta_0(v_1'', v_2'', \tau_{11}'', \tau_{12}'', \tau_{22}'')$ zwei beliebige von einander verschiedene repräsentierende Thetafunktionen, so genügen dieselben den nämlichen Gleichungen. Hieraus folgt die Beziehung:

$$(2)\qquad \vartheta_0(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') = e_0 \cdot \vartheta_0(v_1'', v_2'', \tau_{11}'', \tau_{12}'', \tau_{22}'')$$
$$+ \sum{}' e_{\alpha\beta\gamma\delta} \cdot \vartheta_0(v_1, v_2)^\alpha \cdot \vartheta_b(v_1, v_2)^\beta \cdot \vartheta_c(v_1, v_2)^\gamma \cdot \vartheta_d(v_1, v_2)^\delta,$$

wobei die letzte Summe über genau dieselben Verbindungen wie vorhin zu nehmen ist, mit Ausnahme einer einzigen. Es ist dieses dadurch angedeutet, dafs die Summe mit einem Strich versehen ist. Solcher Gleichungen giebt es dann $\frac{n^2+1}{2}$.

Die Konstanten können durch Elimination aus den ursprünglichen Gleichungen bestimmt werden. Wir erhalten daher zu einer jeden ursprünglichen Bestimmungsart eine entsprechende im vorliegenden allgemeineren Falle. Überdies aber können die Konstanten direkt auf folgende Weise bestimmt werden.

Wir denken uns aus der ursprünglichen Gleichung durch Substitution halber Perioden 15 andere entwickelt, welche dieselben Konstanten enthalten, ferner verbinden wir mit der ursprünglichen alle andern Gleichungen, die zwischen denselben zwei repräsentierenden Thetafunktionen bestehen. Wir erhalten dann $16\,\frac{n^2+1}{2}$ Gleichungen mit $\left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2$ Unbekannten, die linear auftreten.

Wir denken uns alle diese Gleichungen dividiert durch $\vartheta_5(v_1, v_2)^n$ und die linken Seiten geschrieben:

$$\frac{\vartheta_\alpha(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')}{\vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')} \cdot \frac{\vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')}{\vartheta_5(v_1, v_2)^n}$$

resp.

$$\frac{\vartheta_\alpha(v_1'', v_2'', \tau_{11}'', \tau_{12}'', \tau_{22}'')}{\vartheta_5(v_1'', v_2'', \tau_{11}'', \tau_{12}'', \tau_{22}'')} \cdot \frac{\vartheta_5(v_1'', v_2'', \tau_{11}'', \tau_{12}'', \tau_{22}'')}{\vartheta_5(v_1, v_2)^n}.$$

An Stelle der Thetafunktionen können dann wieder die hyperelliptischen Funktionen eingeführt werden, wobei zwischen den Argu-

menten der transformierten und der ursprünglichen Funktionen die Beziehungen bestehen:

$$(3)\qquad \begin{aligned} u_1' &= M_0'.u_1 + M_1'.u_2, & u_2' &= M_2'.u_1 + M_3'.u_2, \\ u_1'' &= M_0''.u_1 + M_1''.u_2, & u_2'' &= M_2''.u_1 + M_3''.u_2. \end{aligned}$$

Durch Reihenentwicklungen ergeben sich dann die sämtlichen gesuchten Gröfsen zusammen mit den Gröfsen M_α', M_α'' als rationale Funktionen der ursprünglichen und der transformierten Thetafunktionen für die Nullwerte der Argumente. Wir wollen die letzteren durch Θ_α', Θ_α'' bezeichnen. Zu gleicher Zeit ergeben sich zwischen den Gröfsen Θ_α', Θ_α'', ϑ_α unendlich viele rationale Beziehungen.

Zweitens können die Konstanten dadurch bestimmt werden, dafs man an Stelle der Argumente v_1, v_2 Teilwerte der Perioden setzt.

In ähnlicher Weise können Beziehungen zwischen je drei, vier u. s. w. repräsentierenden Thetafunktionen aufgestellt werden. Es ist klar, dafs die Zahl derselben übereinstimmt mit der Zahl der Kombinationen von $\frac{n^2+1}{2}$ Elementen zu je 2, 3 etc.

Hierbei ergiebt sich dann von selbst das Problem, zwischen $\frac{n^2+1}{2} + 1$ Repräsentanten lineare Beziehungen herzustellen. Die Auflösbarkeit des Problems folgt unmittelbar aus den vorhin gemachten Bemerkungen.

Wir können das Resultat auch so aussprechen. Bezeichnet man die Zahl der von einander verschiedenen Repräsentanten durch R, so bestehen zwischen den entsprechenden transformierten Thetafunktionen mit demselben Index $R - \frac{n^2+1}{2}$ von einander unabhängige lineare Beziehungen.

Es kann das Resultat auch so ausgesprochen werden: Die R repräsentierenden Thetafunktionen sind die Lösungen eines Systems von ebenso vielen linearen Gleichungen. Die rechten Seiten bei $R - \frac{n^2+1}{2}$ dieser Gleichungen sind Null, bei den übrigen gleich

$$\vartheta_a(v_1, v_2)^\alpha . \vartheta_b(v_1, v_2)^\beta . \vartheta_c(v_1, v_2)^\gamma . \vartheta_d(v_1, v_2)^\delta,$$

wobei die Gröfsen a, b, c, d, α, β, γ, δ die mehrfach aufgestellten Bedingungen erfüllen.

Die Konstanten können auf mehrfache Weise bestimmt werden, die prinzipiell von einander verschieden sind. Die Ausdrucksformen sind unendlich mannigfaltig.

§ 52.*)

Spezielle Diskussion der Transformation 3ten Grades.

Es soll jetzt der Fall $n = 3$ gesondert betrachtet werden.

Zwischen zwei willkürlichen repräsentierenden Thetafunktionen können dann fünf wesentlich von einander verschiedene Relationen hergestellt werden. Erstens findet eine Relation von der Form statt:

$$
\begin{aligned}
(1) \qquad \vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') = {} & e_1 \,.\, \vartheta_5(v_1'', v_2'', \tau_{11}'', \tau_{12}'', \tau_{22}'') \\
& + e_2 \,.\, \vartheta_5(v_1, v_2) \,.\, \vartheta_1(v_1, v_2)^2 \\
& + e_3 \,.\, \vartheta_5(v_1, v_2) \,.\, \vartheta_{03}(v_1, v_2)^2 \\
& + e_4 \,.\, \vartheta_5(v_1, v_2) \,.\, \vartheta_{34}(v_1, v_2)^2 \\
& + e_5 \,.\, \vartheta_1(v_1, v_2) \,.\, \vartheta_{03}(v_1, v_2) \,.\, \vartheta_{34}(v_1, v_2).
\end{aligned}
$$

Durch Substitution halber Perioden ergeben sich, nachdem die Argumente Null gesetzt sind, die Gleichungen (2):

$$
\begin{aligned}
& \Theta_5' . \vartheta_5 = e_1 . \Theta_5'' . \vartheta_5 + e_4 . \vartheta_5^2 . \vartheta_{34}^2, \quad \Theta_{03}' . \vartheta_{03} = e_1 . \Theta_{03}'' . \vartheta_{03} + e_3 . \vartheta_{03}^2 . \vartheta_{23}^2, \\
& \Theta_{34}' . \vartheta_{34} = e_1 . \Theta_{34}'' . \vartheta_{34} + e_4 . \vartheta_5^2 . \vartheta_{34}^2, \quad \Theta_{23}' . \vartheta_{23} = c_1 . \Theta_{23}'' . \vartheta_{23} - e_3 . \vartheta_{03}^2 . \vartheta_{23}^2, \\
& \Theta_4' . \vartheta_4 = e_1 . \Theta_4'' . \vartheta_4 - e_2 . \vartheta_4^2 . \vartheta_{14}^2, \\
& \varepsilon' . \Theta_{14}' . \vartheta_{14} = e_1 . \varepsilon'' . \Theta_{14}'' . \vartheta_{14} + e_2 . \vartheta_4^2 . \vartheta_{14}^2, \\
& \Theta_0' . \vartheta_0 = e_1 . \Theta_0'' . \vartheta_0 + e_2 . \vartheta_0^2 . \vartheta_{01}^2 + e_3 . \vartheta_0^2 . \vartheta_2^2 + e_4 . \vartheta_0^2 . \vartheta_{12}^2 \\
& \qquad + e_5 . \vartheta_0 . \vartheta_{01} . \vartheta_2 . \vartheta_{12}, \\
& \Theta_{01}' . \vartheta_{01} = e_1 . \Theta_{01}'' . \vartheta_{01} - e_2 . \vartheta_{01}^2 . \vartheta_0^2 - e_3 . \vartheta_{01}^2 . \vartheta_{12}^2 + e_4 . \vartheta_{01}^2 . \vartheta_2^2 \\
& \qquad - e_5 . \vartheta_0 . \vartheta_{01} . \vartheta_2 . \vartheta_{12}, \\
& \Theta_2' . \vartheta_2 = e_1 . \Theta_2'' . \vartheta_2 - e_2 . \vartheta_2^2 . \vartheta_{12}^2 - e_3 . \vartheta_2^2 . \vartheta_0^2 + e_4 . \vartheta_2^2 . \vartheta_{01}^2 \\
& \qquad - e_5 . \vartheta_0 . \vartheta_{01} . \vartheta_2 . \vartheta_{12}, \\
& \Theta_{12}' . \vartheta_{12} = e_1 . \Theta_{12}'' . \vartheta_{12} + e_2 . \vartheta_{12}^2 . \vartheta_2^2 + e_3 . \vartheta_{12}^2 . \vartheta_{01}^2 + e_4 . \vartheta_{12}^2 . \vartheta_0^2 \\
& \qquad + e_5 . \vartheta_0 . \vartheta_{01} . \vartheta_2 . \vartheta_{12}.
\end{aligned}
$$

Dabei sind die Gröfsen ε' und ε'' je nach der Wahl der Repräsentanten gleich plus oder minus Eins.

Um die Formeln übersichtlicher zu gestalten, setzen wir:

$$
(3) \qquad E_{\alpha,\beta} = \Theta_\alpha' . \Theta_\beta'' - \Theta_\beta' . \Theta_\alpha''.
$$

Ist α oder β gleich 14, so denken wir uns die entsprechende Funktion Θ mit dem Faktor ε' resp. ε'' versehen. Ferner setzen wir:

$$
(4) \qquad e_{\alpha,\beta}' = \Theta_\alpha' . \vartheta_\alpha + \Theta_\beta' . \vartheta_\beta, \quad e_{\alpha,\beta}'' = \Theta_\alpha'' . \vartheta_\alpha + \Theta_\beta'' . \vartheta_\beta,
$$

*) Cf. Krause: Mathematische Annalen Band 25.

wenn $\alpha = 4$, $\beta = 14$; $\alpha = 03$, $\beta = 23$; $\alpha = 0$, $\beta = 01$; $\alpha = 0$, $\beta = 2$ ist. Im ersten Falle denken wir uns überdies Θ_{14}' resp. Θ_{14}'' mit dem Faktor ε' resp. ε'' versehen.

Dagegen werde gesetzt:

$$(5) \qquad e'_{\alpha,\beta} = \Theta_\alpha' . \vartheta_\alpha - \Theta_\beta' . \vartheta_\beta, \quad e''_{\alpha,\beta} = \Theta_\alpha'' . \vartheta_\alpha - \Theta_\beta'' . \vartheta_\beta,$$

wenn $\alpha = 5$, $\beta = 34$; $\alpha = 0$, $\beta = 12$ ist.

Schliefslich führen wir die Bezeichnungen ein:

$$(6) \qquad \varepsilon'_{\alpha,\beta} = \Theta_\alpha' . \vartheta_\beta^3 - \Theta_\beta' . \vartheta_\alpha^3, \quad \varepsilon''_{\alpha,\beta} = \Theta_\alpha'' . \vartheta_\beta^3 - \Theta_\beta'' . \vartheta_\alpha^3.$$

Ist α oder β gleich 14, so denken wir uns die entsprechende transformierte Thetafunktion mit ε' resp. ε'' multipliziert.

Aus den obigen Gleichungen ergeben sich dann die Relationen (7):

$$e_1 = \frac{e'_{5,34}}{e''_{5,34}} = \frac{e'_{03,23}}{e''_{03,23}} = \frac{e'_{4,14}}{e''_{4,14}},$$

$$e_2 = \frac{E_{14,4}}{\vartheta_4 . \vartheta_{14} . e''_{14,4}}, \quad e_3 = \frac{E_{03,23}}{\vartheta_{03} . \vartheta_{23} . e''_{03,23}}, \quad e_4 = \frac{E_{34,5}}{\vartheta_5 . \vartheta_{34} . e''_{5,34}},$$

$$e'_{0,01} . e''_{5,34} - e''_{0,01} . e'_{5,34} = E_{23,03} . \vartheta_{23} . \vartheta_{03} + E_{34,5} . \vartheta_5 . \vartheta_{34},$$

$$e'_{0,2} . e''_{5,34} - e''_{0,2} . e'_{5,34} = E_{34,5} . \vartheta_{34} . \vartheta_5 + E_{14,4} . \vartheta_{14} . \vartheta_4,$$

$$e'_{0,12} . e''_{5,34} - e''_{0,12} . e'_{5,34} = E_{14,4} . \vartheta_{14} . \vartheta_4 + E_{23,03} . \vartheta_{23} . \vartheta_{03}.$$

In ähnlicher Weise sind die andern Fälle zu behandeln. Für den zweiten Fall ergeben sich die Formeln (8):

$$\begin{aligned}
\vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') = {} & e_6 . \vartheta_5(v_1, v_2)^3 + e_7 . \vartheta_5(v_1'', v_2'', \tau_{11}'', \tau_{12}'', \tau_{22}'') \\
& + e_8 . \vartheta_5(v_1, v_2) . \vartheta_{02}(v_1, v_2)^2 \\
& + e_9 . \vartheta_5(v_1, v_2) . \vartheta_{34}(v_1, v_2)^2 \\
& + e_{10} . \vartheta_1(v_1, v_2) . \vartheta_{02}(v_1, v_2) . \vartheta_{34}(v_1, v_2),
\end{aligned}$$

$$e_6 = \frac{E_{4,14}}{\varepsilon''_{14,4}}, \quad e_7 = \frac{\varepsilon'_{14,4}}{\varepsilon''_{14,4}},$$

$$e_8 . \vartheta_{03} . \vartheta_{23}^2 . \varepsilon''_{14,4} = \vartheta_4^3 . E_{03,14} + \vartheta_{14}^3 . E_{4,03} + \vartheta_{03}^3 . E_{14,4},$$

$$e_9 . \vartheta_5 . \vartheta_{34}^2 . \varepsilon''_{14,4} = \vartheta_4^3 . E_{5,14} + \vartheta_{14}^3 . E_{4,5} + \vartheta_5^3 . E_{14,4},$$

$$e'_{5,34} . \varepsilon''_{14,4} - e''_{5,34} . \varepsilon'_{14,4} = E_{4,14}(\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4),$$

$$e'_{03,23} . \varepsilon''_{14,4} - e''_{03,23} . \varepsilon'_{14,4} = E_{4,14}(\vartheta_{03}^4 + \vartheta_{23}^4),$$

$$e'_{0,01} - e_7 . e''_{0,01} = e_6(\vartheta_0^4 + \vartheta_{01}^4) - e_8 . \vartheta_{03}^2 . \vartheta_{23}^2 + e_9 . \vartheta_5^2 . \vartheta_{34}^2,$$

$$e'_{0,2} - e_7 . e''_{0,2} = e_6(\vartheta_0^4 + \vartheta_2^4) \qquad\qquad + e_9 . \vartheta_5^2 . \vartheta_{34}^2,$$

$$e'_{0,12} - e_7 . e''_{0,12} = e_6(\vartheta_0^4 - \vartheta_{12}^4) - e_8 . \vartheta_{03}^2 . \vartheta_{23}^2 .$$

Im dritten Fall ergeben sich die Formeln (9):

$$\begin{aligned}\vartheta_5(v_1', v_2'\ \tau_{11}'\ \tau_{12}', \tau_{22}') = {} & e_{11} . \vartheta_5(v_1, v_2)^3 + e_{12} . \vartheta_5(v_1 . v_2) . \vartheta_1(v_1, v_2)^2 \\ & + e_{13} . \vartheta_5(v_1'', v_2'', \tau_{11}'', \tau_{12}'', \tau_{22}'') \\ & + e_{14} . \vartheta_5(v_1, v_2) . \vartheta_{34}(v_1, v_2)^2 \\ & + e_{15} . \vartheta_1(v_1, v_2) . \vartheta_{02}(v_1, v_2) . \vartheta_{34}(v_1, v_2).\end{aligned}$$

$$e_{11} = \frac{E_{03,23}}{\varepsilon''_{23,03}}, \quad e_{13} = \frac{\varepsilon'_{23,03}}{\varepsilon''_{23,03}},$$

$$\begin{aligned}& e_{12} . \vartheta_4 . \vartheta_{14}^2 . \varepsilon''_{23,03} = \vartheta_{03}^3 . E_{23,4} + \vartheta_{23}^3 . E_{4,03} + \vartheta_4^3 . E_{03,23}, \\ & e_{14} . \vartheta_5 . \vartheta_{34}^2 . \varepsilon''_{23,03} = \vartheta_{03}^3 . E_{5,23} + \vartheta_{23}^3 . E_{03,5} + \vartheta_5^3 . E_{23,03}, \\ & e'_{5,34} . \varepsilon''_{23,03} - e''_{5,34} . \varepsilon'_{23,03} = E_{03,23}(\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4), \\ & e'_{4,14} . \varepsilon''_{23,03} - e''_{4,14} . \varepsilon''_{23,03} = E_{03,23}(\vartheta_4^4 + \vartheta_{14}^4), \\ & e'_{0,01} - e_{13} . e''_{0,01} = e_{11}(\vartheta_0^4 + \vartheta_{01}^4) + e_{14} . \vartheta_5^2 . \vartheta_{34}^2, \\ & e'_{0,2} - e_{13} . e''_{0,2} = e_{11}(\vartheta_0^4 + \vartheta_2^4) + e_{12} . \vartheta_4^2 . \vartheta_{14}^2 + e_{14} . \vartheta_5^2 . \vartheta_{34}^2, \\ & e'_{0,12} - e_{13} . e''_{0,12} = e_{11}(\vartheta_0^4 + \vartheta_{12}^4) + e_{12} . \vartheta_4^2 . \vartheta_{14}^2.\end{aligned}$$

Im vierten Falle erhalten wir die Relationen (10):

$$\begin{aligned}\vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') = {} & e_{16} . \vartheta_5(v_1, v_2)^3 + e_{17} . \vartheta_5(v_1, v_2) . \vartheta_1(v_1, v_2)^2 \\ & + e_{18} . \vartheta_5(v_1 . v_2) . \vartheta_{02}(v_1, v_2)^2 \\ & + e_{19} . \vartheta_5(v_1'', v_2'', \tau_{11}'', \tau_{12}'', \tau_{22}'') \\ & + e_{20} . \vartheta_1(v_1, v_2) . \vartheta_{02}(v_1, v_2) . \vartheta_{34}(v_1, v_2).\end{aligned}$$

$$e_{16} = \frac{E_{5,34}}{\varepsilon''_{34,5}}, \quad e_{19} = \frac{\varepsilon'_{5,34}}{\varepsilon''_{34,5}},$$

$$\begin{aligned}& e_{17} . \vartheta_4 . \vartheta_{14}^2 . \varepsilon''_{34,5} = \vartheta_5^3 . E_{34,4} + \vartheta_{34}^3 . E_{4,5} + \vartheta_4^3 . E_{5,34}, \\ & e_{18} . \vartheta_{03} . \vartheta_{23}^2 . \varepsilon''_{34,5} = \vartheta_5^3 . E_{03,34} + \vartheta_{34}^3 . E_{5,03} + \vartheta_{03}^3 . E_{34,5}, \\ & e'_{03,23} . \varepsilon''_{34,5} - e''_{03,23} . \varepsilon'_{34,5} = E_{5,34}(\vartheta_{03}^4 + \vartheta_{23}^4), \\ & e'_{4,14} . \varepsilon''_{34,5} - e''_{4,14} . \varepsilon'_{34,5} = E_{5,34}(\vartheta_4^4 + \vartheta_{14}^4), \\ & e'_{0,01} - e_{19} . e''_{0,01} = e_{16}(\vartheta_0^4 + \vartheta_{01}^4) - e_{18} . \vartheta_{03}^2 . \vartheta_{23}^2, \\ & e'_{0,2} - e_{19} . e''_{0,2} = e_{16}(\vartheta_0^4 + \vartheta_2^4) + e_{17} . \vartheta_4^2 . \vartheta_{14}^2, \\ & e'_{0,12} - e_{19} . e''_{0,12} = e_{16}(\vartheta_0^4 - \vartheta_{12}^4) + e_{17} . \vartheta_4^2 . \vartheta_{14}^2 - e_{18} . \vartheta_{03}^2 . \vartheta_{23}^2.\end{aligned}$$

Der fünfte und letzte Fall giebt die Ausdrucksform (11):

$$\begin{aligned}\vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}'\ \tau_{22}') = {} & e_{21} . \vartheta_5(v_1, v_2)^3 + e_{22} . \vartheta_5(v_1, v_2) . \vartheta_1(v_1, v_2)^2 \\ & + e_{23} . \vartheta_5(v_1, v_2) . \vartheta_{03}(v_1, v_2)^2 \\ & + e_{24} . \vartheta_5(v_1, v_2) . \vartheta_{34}(v_1, v_2)^2 \\ & + e_{25} . \vartheta_5(v_1'', v_2'', \tau_{11}'', \tau_{12}'', \tau_{22}'').\end{aligned}$$

Die Relationen, die sich in diesem Falle ergeben, mögen nicht weiter aufgestellt werden, da sie zu grofse Ähnlichkeit mit den ursprünglichen haben.

Durch Differenzieren läfst sich die Zahl der Relationen ins Unendliche vermehren.

In ähnlicher Weise wie die Relationen zwischen je zwei der 40 repräsentierenden Thetafunktionen lassen sich die Relationen zwischen je drei derselben ableiten. Es werden sich hierbei 10 von einander verschiedene Ausdrucksformen ergeben. Wir begnügen uns damit eine einzige herauszugreifen, um die Anwendbarkeit der Methode zu zeigen.

Es ist:

$$(12)\quad \begin{aligned} \vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') = {} & e_1 . \vartheta_5(v_1'', v_2'', \tau_{11}'', \tau_{12}'', \tau_{22}'') \\ & + e_2 . \vartheta_5(v_1''', v_2''', \tau_{11}''', \tau_{12}''', \tau_{22}''') \\ & + e_3 . \vartheta_5(v_1, v_2) . \vartheta_{02}(v_1, v_2)^2 \\ & + e_4 . \vartheta_5(v_1, v_2) . \vartheta_{34}(v_1, v_2)^2 \\ & + e_5 . \vartheta_1(v_1, v_2) . \vartheta_{02}(v_1, v_2) . \vartheta_{34}(v_1, v_2). \end{aligned}$$

Die transformierten Thetafunktionen für die Nullwerte der Argumente bezeichnen wir durch Θ_α', Θ_α'', Θ_α'''. Durch Substitution halber Perioden ergeben sich dann nach Nullsetzen der Argumente die Ausdrücke (13):

$$e_1 . N = \Theta_4' . \Theta_{14}''' - \Theta_{14}' . \Theta_4''', \quad e_2 . N = \Theta_4'' . \Theta_{14}' - \Theta_{14}'' . \Theta_4',$$

$$\begin{aligned} e_3 . \vartheta_{03}^2 . \vartheta_{23}^2 . N = {} & \Theta_{03}' . \vartheta_{03}(\Theta_4'' . \Theta_{14}''' - \Theta_{14}'' . \Theta_4''') \\ & + \Theta_{03}'' . \vartheta_{03}(\Theta_4''' . \Theta_{14}' - \Theta_{14}''' . \Theta_4') \\ & + \Theta_{03}''' . \vartheta_{03}(\Theta_4' . \Theta_{14}'' - \Theta_{14}' . \Theta_4''), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_4 . \vartheta_5^2 . \vartheta_{34}^2 . N = {} & \Theta_5' . \vartheta_5(\Theta_4'' . \Theta_{14}''' - \Theta_{14}'' . \Theta_4''') \\ & + \Theta_5'' . \vartheta_5(\Theta_4''' . \Theta_{14}' - \Theta_{14}''' . \Theta_4') \\ & + \Theta_5''' . \vartheta_5(\Theta_4' . \Theta_{14}'' - \Theta_{14}' . \Theta_4''), \end{aligned}$$

$$N = \Theta_4'' . \Theta_{14}''' - \Theta_{14}'' . \Theta_4'''.$$

Dazu kommen die Thetabeziehungen (14):

$$\begin{aligned} & (\Theta_5' . \vartheta_5 - \Theta_{34}' . \vartheta_{34})(\Theta_4'' . \Theta_{14}''' - \Theta_{14}'' . \Theta_4''') \\ + {} & (\Theta_5'' . \vartheta_5 - \Theta_{34}'' . \vartheta_{34})(\Theta_4''' . \Theta_{14}' - \Theta_{14}''' . \Theta_4') \\ + {} & (\Theta_5''' . \vartheta_5 - \Theta_{34}''' . \vartheta_{34})(\Theta_4' . \Theta_{14}'' - \Theta_{14}' . \Theta_4'') = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\Theta_{03}' . \vartheta_{03} + \Theta_{23}' . \vartheta_{23})(\Theta_4'' . \Theta_{14}''' - \Theta_{14}'' . \Theta_4''') \\
&+ (\Theta_{03}'' . \vartheta_{03} + \Theta_{23}'' . \vartheta_{23})(\Theta_4''' . \Theta_{14}' - \Theta_{14}''' . \Theta_4') \\
&+ (\Theta_{03}''' . \vartheta_{03} + \Theta_{23}''' . \vartheta_{23})(\Theta_4' . \Theta_{14}'' - \Theta_{14}' . \Theta_4'') = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\Theta_0' . \vartheta_0 + \Theta_{01}' . \vartheta_{01})(\Theta_4'' . \Theta_{14}''' - \Theta_{14}'' . \Theta_4''') \\
&+ (\Theta_0'' . \vartheta_0 + \Theta_{01}'' . \vartheta_{01})(\Theta_4''' . \Theta_{14}' - \Theta_{14}''' . \Theta_4') \\
&+ (\Theta_0''' . \vartheta_0 - \Theta_{01}''' . \vartheta_{01})(\Theta_4' . \Theta_{14}'' - \Theta_{14}' . \Theta_4'') \\
&= (\Theta_5' . \vartheta_5 - \Theta_{03}' . \vartheta_{03})(\Theta_4'' . \Theta_{14}''' - \Theta_{14}'' . \Theta_4''') \\
&+ (\Theta_5'' . \vartheta_5 - \Theta_{03}'' . \vartheta_{03})(\Theta_4''' . \Theta_{14}' - \Theta_{14}''' . \Theta_4') \\
&+ (\Theta_5''' . \vartheta_5 - \Theta_{03}''' . \vartheta_{03})(\Theta_4' . \Theta_{14}'' - \Theta_{14}' . \Theta_4''),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\Theta_0' . \vartheta_0 + \Theta_2' . \vartheta_2)(\Theta_4'' . \Theta_{14}''' - \Theta_{14}'' . \Theta_4''') \\
&+ (\Theta_0'' . \vartheta_0 + \Theta_2'' . \vartheta_2)(\Theta_4''' . \Theta_{14}' - \Theta_{14}''' . \Theta_4') \\
&+ (\Theta_0''' . \vartheta_0 + \Theta_2''' . \vartheta_2)(\Theta_4' . \Theta_{14}'' - \Theta_{14}' . \Theta_4'') \\
&= \Theta_5' . \vartheta_5(\Theta_4'' . \Theta_{14}''' - \Theta_{14}'' . \Theta_4''') + \Theta_5'' . \vartheta_5(\Theta_4''' . \Theta_{14}' - \Theta_{14}''' . \Theta_4') \\
&\qquad + \Theta_5''' . \vartheta_5(\Theta_4' . \Theta_{14}'' - \Theta_{14}' . \Theta_4''),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\Theta_0' . \vartheta_0 - \Theta_{12}' . \vartheta_{12})(\Theta_4'' . \Theta_{14}''' - \Theta_{14}'' . \Theta_4''') \\
&+ (\Theta_0'' . \vartheta_0 - \Theta_{12}'' . \vartheta_{12})(\Theta_4''' . \Theta_{14}' - \Theta_{14}''' . \Theta_4') \\
&+ (\Theta_0''' . \vartheta_0 - \Theta_{12}''' . \vartheta_{12})(\Theta_4' . \Theta_{14}'' - \Theta_{14}' . \Theta_4'') \\
&= \Theta_{03}' . \vartheta_{03}(\Theta_4''' . \Theta_{14}'' - \Theta_{14}''' . \Theta_4'') + \Theta_{03}'' . \vartheta_{03}(\Theta_4' . \Theta_{14}''' - \Theta_{14}' . \Theta_4''') \\
&\qquad + \Theta_{03}''' . \vartheta_{03}(\Theta_4'' . \Theta_{14}' - \Theta_{14}'' . \Theta_4').
\end{aligned}$$

So haben wir auch in diesem Falle einige elegante Relationen gefunden. Durch Differentiation läfst sich die Zahl derselben bis ins unendliche vermehren.

In ähnlicher Weise können nun Beziehungen zwischen je vier, fünf und sechs beliebigen repräsentierenden Thetafunktionen hergestellt worden. Es ergeben sich resp. 10, 5, 1 wesentlich von einander verschiedene Ausdrucksformen. Da nun die Fourierschen Entwicklungen der repräsentierenden Thetafunktionen unmittelbar bekannt sind, so liefert der zweite Fall zu gleicher Zeit die Fouriersche Entwicklung der Ausdrücke:

$$\vartheta_5(v_1, v_2)^3; \quad \vartheta_5(v_1, v_2) . \vartheta_1(v_1, v_2)^2; \quad \vartheta_5(v_1, v_2) . \vartheta_{02}(v_1, v_2)^2;$$

$$\vartheta_5(v_1, v_2) . \vartheta_{34}(v_1, v_2)^2; \quad \vartheta_1(v_1, v_2) . \vartheta_{02}(v_1, v_2) . \vartheta_{34}(v_1, v_2).$$

Allerdings nehmen die Koeffizienten eine etwas komplizierte

Form an. Es empfiehlt sich unter solchen Umständen, umgekehrt die ersten Glieder in der Fourierschen Entwicklung der eben genannten Funktionen auf irgend eine Weise zu bestimmen und diese dann zur Berechnung der Koeffizienten anzuwenden. Im ersten Falle nehmen wenigstens zunächst die Resultate noch eine ziemlich komplizierte Form an, dagegen gestaltet sich die Berechnung im zweiten und dritten Falle höchst einfach. Wir nehmen den dritten Fall, indem wir zu gleicher Zeit auf die beiden folgenden Paragraphen verweisen.

Es findet nach dem früheren jedenfalls eine Gleichung von der Form statt:

$$\begin{aligned}\vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') = e_1 \,.\, \vartheta_5\left(v_1, v_2, \frac{\tau_{11}}{3}, \frac{\tau_{12}}{3}, \frac{\tau_{22}}{3}\right) \\ + e_2 \,.\, \vartheta_5\left(v_1, v_2, \frac{\tau_{11}-8}{3}, \frac{\tau_{12}}{3}, \frac{\tau_{22}}{3}\right) \\ + e_3 \,.\, \vartheta_5\left(v_1, v_2, \frac{\tau_{11}}{3}, \frac{\tau_{12}-8}{3}, \frac{\tau_{22}}{3}\right) \\ + e_4 \,.\, \vartheta_5\left(v_1, v_2, \frac{\tau_{11}}{3}, \frac{\tau_{12}}{3}, \frac{\tau_{22}-8}{3}\right) \\ + e_5 \,.\, \vartheta_5\left(v_1, v_2, \frac{\tau_{11}-8}{3}, \frac{\tau_{12}-8}{3}, \frac{\tau_{22}-8}{3}\right),\end{aligned}$$

wobei die Funktion auf der linken Seite eine beliebige repräsentierende Thetafunktion bedeutet, welche von den Funktionen rechts verschieden ist.

Führen wir nun für die Thetafunktionen ihre Fourierschen Entwicklungen ein, setzen insbesondere:

$$\begin{aligned}\vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') = a_0 + a_1 \,.\, \cos 2\pi v_1 + a_2 \,.\, \cos 2\pi v_2 \\ + a_3 \,.\, \cos 2\pi(v_1 - v_2) \\ + a_4 \,.\, \cos 2\pi(v_1 + v_2) + \cdots,\end{aligned}$$

so ergeben sich für die gesuchten Gröſsen e die folgenden Gleichungen (15):

$$\begin{aligned}e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 &= a_0, \\ 2p^{\frac{1}{3}}(e_1 + \varepsilon \,.\, e_2 + e_3 + e_4 + \varepsilon \,.\, e_5) &= a_1, \\ 2r^{\frac{1}{3}}(e_1 + e_2 + e_3 + \varepsilon \,.\, e_4 + \varepsilon \,.\, e_5) &= a_2, \\ 2p^{\frac{1}{3}} \,.\, q^{-\frac{2}{3}} \,.\, r^{\frac{1}{3}}(e_1 + \varepsilon \,.\, e_2 + \varepsilon \,.\, e_3 + \varepsilon \,.\, e_4 + e_5) &= a_3, \\ 2p^{\frac{1}{3}} \,.\, q^{\frac{2}{3}} \,.\, r^{\frac{1}{3}}(e_1 + \varepsilon \,.\, e_2 + \varepsilon^2 \,.\, e_3 + \varepsilon \,.\, e_4 + \varepsilon \,.\, e_5) &= a_4.\end{aligned}$$

Hierbei ist wie früher gesetzt:

$$p = e^{\pi i \tau_{11}}, \qquad q = e^{\pi i \tau_{12}}, \qquad r = e^{\pi i \tau_{22}},$$

ferner

$$\varepsilon = e^{-\frac{8\pi i}{3}}.$$

Diese fünf Gleichungen lehren die gesuchten Koefficienten unmittelbar kennen.

Wählen wir z. B. als Repräsentanten auf der linken Seite:

$$\vartheta_5(3v_1, 3v_2, 3\tau_{11}, 3\tau_{12}, 3\tau_{22}),$$

so nehmen die Gleichungen die Form an (16):

$$\begin{aligned}
e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 &= 1, \\
e_1 + \varepsilon \cdot e_2 + e_3 + e_4 + \varepsilon \cdot e_5 &= 0, \\
e_1 + e_2 + e_3 + \varepsilon \cdot e_4 + \varepsilon \cdot e_5 &= 0, \\
e_1 + \varepsilon \cdot e_2 + \varepsilon \cdot e_3 + \varepsilon \cdot e_4 + e_5 &= 0, \\
e_1 + \varepsilon \cdot e_2 + \varepsilon^2 \cdot e_3 + \varepsilon \cdot e_4 + \varepsilon \cdot e_5 &= 0,
\end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich die Werte:

$$e_1 = -\frac{2(1+\varepsilon)}{(1-\varepsilon)\cdot(2+\varepsilon^2)}, \quad e_2 = \frac{1+\varepsilon^2}{(1-\varepsilon)(2+\varepsilon^2)} = e_4,$$

$$e_3 = -\frac{\varepsilon^2}{(1-\varepsilon)(2+\varepsilon^2)}, \quad e_5 = \frac{1}{(1-\varepsilon)(2+\varepsilon^2)}.$$

Eine elegantere Darstellung dieser Relationen wird im folgenden gegeben werden.

§ 53.*)

Die Fourierschen Entwicklungen der Potenzen und Produkte der Thetafunktionen.

Bei der Verallgemeinerung des Transformationsproblems sind wir von selbst zu dem Problem gekommen, die Potenzen und gewisse Produkte der Thetafunktionen durch die repräsentierenden Thetafunktionen auszudrücken. Da die Fourierschen Entwicklungen der letzteren als bekannt vorauszusetzen sind, so können wir das Problem auch so formulieren: „es sollen die Potenzen und gewisse Produkte

*) Cf. Krause: Mathematische Annalen Band 26 u. 27. Wiltheifs: Crelle Journal Band 96.

der Thetafunktionen in Fouriersche Reihen entwickelt werden". Eine Durchführung der bisher gegebenen Methoden ist mit zwei Übelständen verknüpft. Erstens ergeben sich für die Koefficienten äufserst komplizierte und schwerfällige Ausdrücke, zweitens erhalten wir nur die Fourierschen Entwicklungen eines Teiles der möglichen Thetaprodukte. Es beruht der letztere Umstand auf einer Einschränkung, die wir von vorne herein bei der Aufstellung des Transformationsproblemes getroffen haben. Das Transformationsproblem wurde ursprünglich für die hyperelliptischen Funktionen gestellt. Hier konnten wir, ohne der Allgemeinheit des Problems Abbruch zu thun, annehmen, dafs den Nullwerten der ursprünglichen Argumente die Nullwerte der transformierten Argumente entsprechen. Wesentlich anders gestaltet sich aber bei den Thetafunktionen die Sache. Hier sind die beiden Fälle thatsächlich von einander zu unterscheiden.

Um den Fall zu erledigen, dafs den Nullwerten der ursprünglichen Funktionen von Null verschiedene Werte der transformierten entsprechen, müssen thatsächlich neue Funktionen in die Transformationstheorie eingeführt werden. Wir wollen dazu eine Zerlegung der repräsentierenden Thetafunktionen in andere Funktionen vornehmen. Wir setzen dazu (1):

$$\varepsilon_{g_1 g_2} = e^{-2\pi i(v_1 \cdot g_1 + v_2 \cdot g_2) + \frac{\pi i}{n}(g_1^2 \cdot \tau_{11} + 2 g_1 \cdot g_2 \cdot \tau_{12} + g_2^2 \cdot \tau_{22})},$$

$$\varphi(g_1, g_2)$$

$$= \varepsilon_{g_1 g_2} \cdot \vartheta_5(nv_1 - g_1 \tau_{11} - g_2 \tau_{12}, nv_2 - g_1 \tau_{12} - g_2 \tau_{22}, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22})$$
$$+ \varepsilon_{-g_1 - g_2} \cdot \vartheta_5(nv_1 + g_1 \tau_{11} + g_2 \tau_{12}, nv_2 + g_1 \tau_{12} + g_2 \tau_{22}, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22}).$$

Nun ist:

$$\vartheta_5(v_1, v_2) = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{m_1} \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{m_2} e^{\pi i(m_1^2 \cdot \tau_{11} + 2 m_1 \cdot m_2 \cdot \tau_{12} + m_2^2 \cdot \tau_{22}) + 2\pi i(m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2)}.$$

Setzen wir hierin an Stelle von m_1 und m_2 resp. $n\mu_1 + g_1$, $n\mu_2 + g_2$, so folgt:

$$\vartheta_5(v_1, v_2) = \sum_0^{n-1} {}^{g_1} \sum_0^{n-1} {}^{g_2} \varepsilon_{-g_1 - g_2} \cdot \vartheta_5\big(n(v_1 + g_1 \cdot \tau_{11} + g_2 \cdot \tau_{12}),$$
$$n(v_2 + g_1 \cdot \tau_{12} + g_2 \cdot \tau_{22}), n^2\tau_{11}, n^2\tau_{12}, n^2\tau_{22}\big).$$

Setzen wir links und rechts an Stelle der Gröfsen $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$ resp. $\frac{\tau_{11} + 2\lambda_1}{n}$, $\frac{\tau_{12} + 2\lambda_2}{n}$, $\frac{\tau_{22} + 2\lambda_3}{n}$, dann folgt leicht (2):

$$\vartheta_5\left(v_1, v_2, \frac{\tau_{11}+2\lambda_1}{n}, \frac{\tau_{12}+2\lambda_2}{n}, \frac{\tau_{22}+2\lambda_3}{n}\right)$$

$$= \vartheta_5(nv_1, nv_2, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22}) + \sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}^{g_1} e^{\frac{2\pi i g_1^2\lambda_1}{n}} \cdot \varphi(g_1, 0)$$

$$+ \sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}^{g_2} e^{\frac{2\pi i g_2^2\lambda_3}{n}} \cdot \varphi(0, g_2)$$

$$+ \sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}^{g_1} \sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}^{g_2} e^{\frac{2\pi i}{n}(g_1^2\cdot\lambda_1 + 2g_1\cdot g_2\cdot\lambda_2 + g_2^2\cdot\lambda_3)} \cdot \varphi(g_1, g_2)$$

$$+ \sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}^{g_1} \sum_0^{\frac{n-1}{2}}{}^{g_2} e^{\frac{2\pi i}{n}(g_1^2\cdot\lambda_1 - 2g_1\cdot g_2\cdot\lambda_2 + g_2^2\cdot\lambda_3)} \cdot \varphi(g_1, -g_2),$$

Jedenfalls also ist klar, dafs mit Hülfe n^{ter} Einheitswurzeln die repräsentierenden Thetafunktionen auf der linken Seite linear durch die Gröfsen $\varphi(g_1, g_2)$ ausgedrückt werden können. Das analoge gilt für alle andern repräsentierenden Thetafunktionen. Es ergiebt sich (3):

$$\vartheta_5\left(v_1 - 2\lambda_2 \cdot v_2, nv_2, \frac{\tau_{11} - 2\lambda_2\cdot\tau_{12} + 4\lambda_2^2\cdot\tau_{22} - 2\lambda_1}{n}, \tau_{12} - 2\lambda_2\cdot\tau_{22}, n\tau_{22}\right)$$

$$= \vartheta_5(nv_1, nv_2, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22}) + \sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}^{g} e^{\frac{-2\pi i}{n}g^2\cdot\lambda_1} \cdot \varphi(g, -2\lambda_2 \cdot g),$$

$$\vartheta_5\left(nv_1, v_2, n\tau_{11}, \tau_{12}, \frac{\tau_{22} - 2\lambda_3}{n}\right) = \vartheta_5(nv_1, nv_2, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22})$$

$$+ \sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}^{g} e^{-\frac{2\pi i}{2}g^2\cdot\lambda_3} \cdot \varphi(0, g).$$

Analoge Formeln würden sich für die übrigen Thetafunktionen ergeben.

Aus diesen Formen ist es dann leicht, wenn n eine Primzahl ist, die Gröfsen $\varphi(g_1, g_2)$ umgekehrt durch die repräsentierenden Thetafunktionen auszudrücken, so dafs wir berechtigt sind diese neuen Gröfsen $\varphi(g_1, g_2)$ als fundamentale in die Transformationstheorie einzuführen. Diese neuen Gröfsen ihrerseits setzen sich aber aus den Funktionen zusammen:

$$\varepsilon_{-g_1-g_2} \cdot \vartheta_\alpha(nv_1 + g_1.\tau_{11} + g_2.\tau_{12}, nv_2 + g_1.\tau_{12} + g_2.\tau_{22}, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22}).$$

Diese letzteren entstehen aus den Thetafunktionen, deren Charakteristiken sich aus gebrochenen Zahlen zusammensetzen, indem an Stelle von v_1, v_2, τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} in denselben gesetzt wird: nv_1, nv_2, $n\tau_{11}$, $n\tau_{12}$, $n\tau_{22}$, indem ferner $h_1 = h_2 = 0$ angenommen wird. Wir können dieselben demnach bezeichnen durch:

$$\vartheta_\alpha \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (nv_1, nv_2, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22})$$

oder auch nach Paragraph 50 durch

$$\vartheta_\alpha [g_1 \, g_2] (nv_1, nv_2, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22})$$

nebst seinen Abkürzungen.

Wie man sich nun leicht überzeugt, treten diese Gröfsen an Stelle der repräsentierenden Thetafunktionen, wenn man die Bedingung fallen läfst, dafs den Nullwerten der ursprünglichen Funktionen auch die Nullwerte der transformierten entsprechen sollen. Es liegt hierin ein entschiedener Vorzug der neuen Gröfsen vor den alten. Andrerseits kann aber nicht geleugnet werden, dafs ihre Eigenschaften nicht so einfache und elegante sind, wie die Eigenschaften der repräsentierenden Funktionen, die wir gebraucht haben. Aus diesem Grunde und weil für uns der Ausgangspunkt die Transformation der hyperelliptischen Funktionen war, ist von ihnen als fundamentalen bisher abgesehen worden.

Die Fourierschen Entwicklungen dieser Gröfsen können füglich als bekannt angenommen werden. Es wären also auch die Fourierschen Entwicklungen der Potenzen und Produkte der Thetafunktionen bekannt, wenn es gelänge, diese Gröfsen als lineare Funktionen der Gröfsen:

$$\vartheta_\alpha [g_1 \, g_2] (nv_1, nv_2, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22})$$

darzustellen.

Dieses Problem soll jetzt gelöst werden und zwar auf eine zweifache Weise.

Die erste Methode beruht wesentlich auf der Theorie der Thetafunktionen, deren Charakteristiken sich aus gebrochenen Zahlen zusammensetzen. Aus derselben folgt die Richtigkeit der Formel (4):

$$\sum_{0}^{n-1}{}_{h_1} \sum_{0}^{n-1}{}_{h_2} \alpha^{h_1} \cdot \beta^{h_2} \cdot \vartheta_5 \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} ((v))^n$$

$$= c_{g_1 g_2} \cdot \vartheta_5 [-g_1 \, -g_2] (nv_1, nv_2, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22}),$$

wenn gesetzt ist:

$$\alpha = e^{\frac{2\pi i g_1}{n}}, \quad \beta = e^{\frac{2\pi i g_2}{n}}.$$

Die Konstante $c_{g_1 g_2}$ bestimmen wir, indem wir an Stelle von v_1 und v_2 uns gesetzt denken resp.:

$$v_1 + \frac{g_1 \cdot \tau_{11} + g_2 \cdot \tau_{12}}{n}, \quad v_2 + \frac{g_1 \cdot \tau_{12} + g_2 \cdot \tau_{22}}{n}.$$

Dann wird (5):

$$\Theta_5 \cdot c_{g_1 g_2} = \sum_0^{n-1}{}_{h_1} \sum_0^{n-1}{}_{h_2} \vartheta_5 \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} ((0))^n,$$

wenn

$$\Theta_5 = \vartheta_5(0, 0, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22})$$

gesetzt wird.

Demgemäfs erhalten wir die Entwicklung (6):

$$n^2 \cdot \Theta_5 \cdot \vartheta_5(v_1, v_2)^n = \sum_0^{n-1}{}_{h_1} \sum_0^{n-1}{}_{h_2} \sum_0^{n-1}{}_{g_1} \sum_0^{n-1}{}_{g_2} \varepsilon_{g_1 g_2} \cdot \vartheta_5 \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} ((0))^n$$

$$\cdot\, \vartheta_5(nv_1 - g_1 \cdot \tau_{11} - g_2 \cdot \tau_{12}, nv_2 - g_1 \cdot \tau_{12} - g_2 \cdot \tau_{22}, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22}),$$

die auch in die Form gebracht werden kann (7):

$$n^2 \cdot \Theta_5 \cdot \vartheta_5(v_1, v_2)^n$$

$$= \sum_0^{n-1}{}_{h_1} \sum_0^{n-1}{}_{h_2} \vartheta_5 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} ((0))^n \cdot \vartheta_5(nv_1, nv_2, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22})$$

$$+ \sum_0^{n-1}{}_{h_1} \sum_0^{n-1}{}_{h_2} \sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_{g_1} \vartheta_5 \begin{bmatrix} g_1 & 0 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} ((0))^n \cdot \varphi(g_1, 0)$$

$$+ \sum_0^{n-1}{}_{h_1} \sum_0^{n-1}{}_{h_2} \sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_{g_2} \vartheta_5 \begin{bmatrix} 0 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} ((0))^n \cdot \varphi(0, g_2)$$

$$+ \sum_0^{n-1}{}_{h_1} \sum_0^{n-1}{}_{h_2} \sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_{g_1} \sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_{g_2} \vartheta_5 \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} ((0))^n \cdot \varphi(g_1, g_2)$$

$$+ \sum_0^{n-1}{}_{h_1} \sum_0^{n-1}{}_{h_2} \sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_{g_1} \sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_{g_2} \vartheta_5 \begin{bmatrix} g_1 & -g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} ((0))^n \cdot \varphi(g_1, -g_2).$$

Damit ist das Problem der Entwicklung der n^{ten} Potenz der fundamentalen Thetafunktion in eine Fouriersche Reihe gelöst. Das analoge kann mit leichter Mühe für die übrigen Thetafunktionen und für die Produkte zu je n durchgeführt werden.

Die zweite Methode geht von den Additionstheoremen aus, die in § 50 entwickelt worden sind.

Wir nehmen zunächst das erste, welches daselbst entwickelt worden ist und nehmen zu den früheren Bedingungen die hinzu, dafs die ganzen Zahlen $a_{\varepsilon\varepsilon_1}$ den weiteren Gleichungen Genüge leisten sollen:

$$a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} = n,$$
$$a_{\varepsilon 1} + a_{\varepsilon 2} + \cdots + a_{\varepsilon n} = 0, \quad \varepsilon > 1.$$

Dann ist klar, dafs falls diese Bestimmung möglich ist, sich für den speziellen Fall:

$$v_1^{(1)} = v_1^{(2)} = \cdots v_1^{(n)}, \quad v_2^{(1)} = v_2^{(2)} = \cdots v_2^{(n)}$$

die Formel ergiebt:

$$(8) \quad \vartheta_5((v, \tau))^n = \sum{}' \vartheta_5[g^{(1)}]((nv, n\tau)) . \vartheta_5[g^{(2)}]((0, n_2\tau)) \ldots \vartheta_5[g^{(n)}]((0, n_n\tau)),$$

wobei die Summe in der vorhin angegebenen Weise zu nehmen ist. Damit ist aber das Problem gelöst. Zu gleicher Zeit folgt das analoge für sämtliche n^{te} Potenzen von Thetafunktionen, ferner für alle Produkte zu je n, da diese Gröfsen aus dem Produkte $\prod \vartheta_5((v^{(\varepsilon)}, \tau))$ durch Substitution halber Perioden abzuleiten sind, wenn nach stattgefundener Substitution:

$$v_1^{(1)} = v_1^{(2)} = \cdots v_1^{(n)}, \quad v_2^{(1)} = v_2^{(2)} = \cdots v_2^{(n)}$$

gesetzt wird. Allerdings findet bei dieser Lösung der Übelstand statt, dafs in den Koefficienten Gröfsen vorkommen, die zu den mannigfachsten Transformationsgraden gehören. Wir werden es als schliefsliches Ziel hinstellen müssen, diese Unebenheit fortzuschaffen d. h. nur solche Gröfsen in den Koefficienten zuzulassen, die zu demselben Transformationsgrad gehören. Aufser ihnen können selbstverständlich noch die ursprünglichen Thetafunktionen vorkommen. Es würde die Auflösung des zuletzt fixierten Problems zu gleicher Zeit eine Fülle von Beziehungen liefern, die zwischen den Wurzeln der Transformationsgleichungen bestehen und zwar für den allgemeinen Transformationsgrad. Diese Beziehungen könnten dann ihrerseits dazu gebraucht werden, die allgemeinen Transformationsgleichungen in independenter Form darzustellen.

Die Lösung, die wir soeben charakterisiert haben, soll nun im allgemeinen Fall nicht gegeben werden, vielmehr beschränken wir uns im wesentlichen auf die Lösung des ursprünglichen Problems.

Nur in den einfachsten Fällen soll gezeigt werden, wie die Mannigfaltigkeit der Moduln thatsächlich gehoben werden kann.

Ehe wir nun den allgemeinen Fall behandeln, nehmen wir einige specielle.

I. $n = 2$.

In diesem Falle können wir setzen:

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = \quad 1,$$
$$a_{21} = 1, \quad a_{22} = -1.$$

Wir erhalten demgemäfs das Additionstheorem (9):

$$\begin{aligned}\vartheta_5((v^{(1)}, \tau)) \,.\, \vartheta_5((v^{(2)}, \tau)) = {} & \vartheta_5((v^{(1)} + v^{(2)}, 2\tau)) \,.\, \vartheta_5((v^{(1)} - v^{(2)}, 2\tau)) \\ & + \vartheta_5[10]((v^{(1)} + v^{(2)}, 2\tau)) \,.\, \vartheta_5[10]((v^{(1)} - v^{(2)}, 2\tau)) \\ & + \vartheta_5[01]((v^{(1)} + v^{(2)}, 2\tau)) \,.\, \vartheta_5[01]((v^{(1)} - v^{(2)}, 2\tau)) \\ & + \vartheta_5[11]((v^{(1)} + v^{(2)}, 2\tau)) \,.\, \vartheta\ [11]((v^{(1)} - v^{(2)}, 2\tau)).\end{aligned}$$

Setzen wir $v^{(1)} = v^{(2)}$, so erhalten wir die Formel (10):

$$\begin{aligned}\vartheta_5((v, \tau))^2 = {} & \vartheta_5((2v, 2\tau)) \,.\, \vartheta_5((0, 2\tau)) + \vartheta_4((2v, 2\tau)) \,.\, \vartheta_4((0, 2\tau)) \\ & + \vartheta_{01}((2v, 2\tau)) \,.\, \vartheta_{01}((0, 2\tau)) + \vartheta_{23}((2v, 2\tau)) \,.\, \vartheta_{23}((0, 2\tau)).\end{aligned}$$

Ganz analog erhalten wir die Formeln (11):

$$\begin{aligned}\vartheta_{34}((v, \tau))^2 = {} & \vartheta_5((2v, 2\tau)) \,.\, \vartheta_5((0, 2\tau)) - \vartheta_4((2v, 2\tau)) \,.\, \vartheta_4((0, 2\tau)) \\ & + \vartheta_{01}((2v, 2\tau)) \,.\, \vartheta_{01}((0, 2\tau)) - \vartheta_{23}((2v, 2\tau)) \,.\, \vartheta_{23}((0, 2\tau)), \\ \vartheta_{12}((v, \tau))^2 = {} & \vartheta_5((2v, 2\tau)) \,.\, \vartheta_5((0, 2\tau)) + \vartheta_4((2v, 2\tau)) \,.\, \vartheta_4((0, 2\tau)) \\ & - \vartheta_{01}((2v, 2\tau)) \,.\, \vartheta_{01}((0, 2\tau)) - \vartheta_{23}((2v, 2\tau)) \,.\, \vartheta_{23}((0, 2\tau)), \\ \vartheta_0((v, \tau))^2 = {} & \vartheta_5((2v, 2\tau)) \,.\, \vartheta_5((0, 2\tau)) - \vartheta_4((2v, 2\tau)) \,.\, \vartheta_4((0, 2\tau)) \\ & - \vartheta_{01}((2v, 2\tau)) \,.\, \vartheta_{01}((0, 2\tau)) + \vartheta_{23}((2v, 2\tau)) \,.\, \vartheta_{23}((0, 2\tau)).\end{aligned}$$

Ganz analog könnten die sämtlichen Quadrate und ferner die sämtlichen Produkte zu je zwei der ursprünglichen Thetafunktionen gebildet werden. Es ergeben sich dann Resultate, die aus den früheren Untersuchungen unmittelbar aufgenommen werden können. Jedenfalls ist klar, dafs wir, indem wir das spezielle Problem der Fourierschen Entwickelungen gelöst haben, zugleich die allgemeine Transformation zweiter Ordnung völlig zu Ende geführt haben, so zwar, dafs in den fertigen Formeln aufser den ursprünglichen Thetafunktionen nur noch Gröfsen vorkommen, die zu der Transformation zweiten Grades gehören. Die Ausdrücke, die sich hierbei ergeben haben und ferner die Werte, die sich hieraus für die transformierten Funktionen herstellen lassen, sind so einfacher Natur, dafs wir bei einer allgemeinen Transformation n^{ten} Grades alle diejenigen Gröfsen, die zur

Transformation 2ten resp. $2n$ten Grades gehören, unmittelbar durch die ursprünglichen resp. diejenigen Gröfsen ersetzen können, die zu der Transformation $n$ten Grades gehören.

Jedenfalls werden wir sagen können, dafs das Problem der Fourierschen Entwickelung in seiner engeren Fassung oder auch das allgemeine Transformationsproblem gelöst ist, wenn aufser den Moduln $\tau_{\varepsilon\varepsilon_1}$, $n\tau_{\varepsilon\varepsilon_1}$ noch die Moduln $2\tau_{\varepsilon\varepsilon_1}$, $2n\tau_{\varepsilon\varepsilon_1}$ in den fertigen Formeln enthalten sein sollten.

II. $n = 3$.

In diesem Falle haben wir zu setzen:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1, & a_{12} &= 1, & a_{13} &= 1, & n_1 &= 3, \\ a_{21} &= 0, & a_{22} &= 1, & a_{23} &= -1, & n_2 &= 2, \\ a_{31} &= 2, & a_{32} &= -1, & a_{33} &= -1, & n_3 &= 6. \end{aligned}$$

Mithin erhalten wir das Additionstheorem (12):

$$\begin{aligned} &\vartheta_5((v^{(1)}, \tau)) \,.\, \vartheta_5((v^{(2)}, \tau)) \,.\, \vartheta_5((v^{(3)}, \tau)) \\ &= \Sigma\, \vartheta_5[g^{(1)}]((v^{(1)} + v^{(2)} + v^{(3)}, 3\tau)) \\ &\quad .\, \vartheta_5[g^{(2)}]((2v^{(1)} - v^{(2)} - v^{(3)}, 6\tau)).\vartheta_5[g^{(3)}]((v^{(2)} - v^{(3)}, 2\tau)), \end{aligned}$$

wobei die Summation über alle Werte $g_1^{(1)}$ etc. zu nehmen ist, für welche die Kongruenzen bestehen:

$$\begin{aligned} g_1^{(1)} + g_1^{(3)} &\equiv 0 \bmod 3, & g_2^{(1)} + g_2^{(3)} &\equiv 0 \bmod 3, \\ g_1^{(2)} + g_1^{(3)} &\equiv 0 \bmod 2, & g_2^{(2)} + g_2^{(3)} &\equiv 0 \bmod 2. \end{aligned}$$

Setzen wir nun analog wie im allgemeinen Falle:

$$\varphi(g_1, g_2) = \vartheta_5[g_1 g_2]((3v, 3\tau)) + \vartheta_5[g_1 g_2]((-3v, 3\tau)),$$

so erhalten wir für die spezielle Annahme

$$v_1^{(1)} = v_1^{(2)} = v_1^{(3)}, \quad v_2^{(1)} = v_2^{(2)} = v_2^{(3)}$$

die folgende Fouriersche Entwickelung der dritten Potenz von $\vartheta_5(v_1, v_2)$ (12):

$$\begin{aligned} &\vartheta_5(v_1, v_2)^3 \\ &= \varphi(0,0)\big[\vartheta_5((0, 2\tau)).\vartheta_5((0, 6\tau)) + \vartheta_5[10]((0, 2\tau)).\vartheta_5[30]((0, 6\tau))\big] \\ &+ \varphi(1,0)\big[\vartheta_5((0, 2\tau)).\vartheta_5[40]((0, 6\tau)) + \vartheta_5[10]((0, 2\tau)).\vartheta_5[10]((0, 6\tau))\big] \\ &+ \varphi(0,1)\big[\vartheta_5((0, 2\tau)).\vartheta_5[04]((0, 6\tau)) + \vartheta_5[01]((0, 2\tau)).\vartheta_5[01]((0, 6\tau))\big] \\ &+ \varphi(1,1)\big[\vartheta_5((0, 2\tau)).\vartheta_5[44]((0, 6\tau)) + \vartheta_5[11]((0, 2\tau)).\vartheta_5[11]((0, 6\tau))\big] \\ &+ \varphi(2,1)\big[\vartheta_5[01]((0, 2\tau)).\vartheta_5[21]((0, 6\tau)) \\ &\qquad\qquad + \vartheta_5[10]((0, 2\tau)) \,.\, \vartheta_5[54]((0, 6\tau))\big]. \end{aligned}$$

Diese Entwickelung kann auch geschrieben werden (13):

$$\begin{aligned}
&\vartheta_5(v_1, v_2)^3 \\
&= \varphi(0, 0)\left[\vartheta_5((0, 2\tau)).\vartheta_5((0, 6\tau)) + \vartheta_{01}((0, 2\tau)).\vartheta_{01}((0, 6\tau))\right] \\
&+ \varphi(1, 0)\left[\vartheta_5((0, 2\tau)).\vartheta_5[40]((0, 6\tau)) + \vartheta_{01}((0, 2\tau)).\vartheta_{01}[40]((0, 6\tau))\right] \\
&+ \varphi(0, 1)\left[\vartheta_5((0, 2\tau)).\vartheta_5[04]((0, 6\tau)) + \vartheta_4((0, 2\tau)).\vartheta_4[04]((0, 6\tau))\right] \\
&+ \varphi(1, 1)\left[\vartheta_5((0, 2\tau)).\vartheta_5[44]((0, 6\tau)) + \vartheta_{23}((0, 2\tau)).\vartheta_{23}[44]((0, 6\tau))\right] \\
&+ \varphi(2, 1)\left[\vartheta_{01}((0, 2\tau)).\vartheta_{01}[42]((0, 6\tau)) + \vartheta_4((0, 2\tau)).\vartheta_4[42]((0, 6\tau))\right].
\end{aligned}$$

Durch Substitution halber Perioden können aus dem Additionstheorem die Fourierschen Entwickelungen eines jeden Produktes $\vartheta_\alpha((v, \tau)) . \vartheta_\beta((v, \tau)) . \vartheta_\gamma((v, \tau))$ in ähnlicher Weise dargestellt werden. Damit ist das Problem der Fourierschen Entwickelung für den Fall $n = 3$ völlig gelöst, mit ihm aber auch das Problem der Transformation 3ten Grades und zwar beide Probleme in dem vorhin angegebenen engeren Sinne, da die Thetafunktionen mit den Moduln $2\tau_{\epsilon\epsilon_1}$ und $6\tau_{\epsilon\epsilon_1}$ sich unmittelbar durch die Thetafunktionen mit den Moduln $\tau_{\epsilon\epsilon_1}$ und $3\tau_{\epsilon\epsilon_1}$ ausdrücken lassen. Setzen wir die Argumente gleich Null, so erhalten wir eine Fülle einfacher und eleganter Beziehungen zwischen den Wurzeln der Modular- und Multiplikatorgleichungen, die zu der Transformation 3ten Grades gehören. Von ihrer Aufstellung möge abgesehen werden.

III. $n = 4$.

In diesem Falle ist zu setzen:

$$\begin{array}{lllll}
a_{11} = 1, & a_{12} = 1, & a_{13} = 1, & a_{14} = 1, & n_1 = 4, \\
a_{21} = 1, & a_{22} = 1, & a_{23} = -1, & a_{24} = -1, & n_2 = 4, \\
a_{31} = 0, & a_{32} = 0, & a_{33} = 1, & a_{34} = -1, & n_3 = 2, \\
a_{41} = 1, & a_{42} = -1, & a_{43} = 0, & a_{44} = 0, & n_4 = 2.
\end{array}$$

Wir erhalten demgemäſs das Additionstheorem:

$$(14) \qquad \prod_1^4 {}^{\epsilon} \vartheta_5((v^{(\epsilon)}, \tau)) = \sum \prod_1^4 {}^{\epsilon} \vartheta_5[g^{(\epsilon)}]((w^{(\epsilon)}, n_\epsilon . \tau)).$$

Hierbei ist (15):

$$\begin{aligned}
w_i^{(1)} &= v_i^{(1)} + v_i^{(2)} + v_i^{(3)} + v_i^{(4)}, & n_1 &= 4, \\
w_i^{(2)} &= v_i^{(1)} + v_i^{(2)} - v_i^{(3)} - v_i^{(4)}, & n_2 &= 4, \\
w_i^{(3)} &= v_i^{(3)} - v_i^{(4)}, & n_3 &= 2, \\
w_i^{(4)} &= v_i^{(1)} - v_i^{(2)}, & n_4 &= 2;
\end{aligned}$$

$$g_i^{(1)} \equiv s_i^{(1)} + s_i^{(2)} + s_i^{(3)} + s_i^{(4)} \mod 4,$$
$$g_i^{(2)} \equiv s_i^{(1)} + s_i^{(2)} - s_i^{(3)} - s_i^{(4)} \mod 4,$$
$$g_i^{(3)} \equiv s_i^{(3)} - s_i^{(4)} \mod 2,$$
$$g_i^{(4)} \equiv s_i^{(1)} - s_i^{(2)} \mod 2. \qquad {}_{i=1,2.}$$

Die Gröfsen s sind willkürliche ganze Zahlen. Die Summation ist über alle soeben definierten Gröfsen g zu erstrecken. Jedenfalls ist klar, dafs hiermit auch für den Fall $n = 4$ das Problem der Fourierschen Entwickelung in dem enger begrenzten Sinne gelöst ist, da aufser den Moduln $\tau_{\varepsilon\varepsilon_1}$ und $4\tau_{\varepsilon\varepsilon_1}$ nur noch die Moduln $2\tau_{\varepsilon\varepsilon_1}$ in den fertigen Formeln vorkommen.

Für die beiden folgenden Fälle beschränken wir uns darauf, die Werte der Zahlen $a_{r\varepsilon}$ und n_ε anzugeben.

IV. $n = 5$.

$$\begin{array}{llllll}
a_{11}=1, & a_{12}=1, & a_{13}=1, & a_{14}=1, & a_{15}=1, & n_1=5, \\
a_{21}=4, & a_{22}=-1, & a_{23}=-1, & a_{24}=-1, & a_{25}=-1, & n_2=20, \\
a_{31}=0, & a_{32}=1, & a_{33}=1, & a_{34}=-1, & a_{35}=-1, & n_3=4, \\
a_{41}=0, & a_{42}=0, & a_{43}=0, & a_{44}=1, & a_{45}=-1, & n_4=2, \\
a_{51}=0, & a_{52}=1, & a_{53}=-1, & a_{54}=0, & a_{55}=0, & n_5=2.
\end{array}$$

V. $n = 6$.

$$\begin{array}{llllll}
a_{11}=1, & a_{12}=1, & a_{13}=1, & a_{14}=1, & a_{15}=1, & a_{16}=1, \\
a_{21}=1, & a_{22}=1, & a_{23}=1, & a_{24}=-1, & a_{25}=-1, & a_{26}=-1, \\
a_{31}=0, & a_{32}=0, & a_{33}=0, & a_{34}=2, & a_{35}=-1, & a_{36}=-1, \\
a_{41}=0, & a_{42}=0, & a_{43}=0, & a_{44}=0, & a_{45}=1, & a_{46}=-1, \\
a_{51}=2, & a_{52}=-1, & a_{53}=-1, & a_{54}=0, & a_{55}=0, & a_{56}=0, \\
a_{61}=0, & a_{62}=1, & a_{63}=-1, & a_{64}=0, & a_{65}=0, & a_{66}=0, \\
n_1=6, & n_2=6, & n_3=6, & n_4=2, & n_5=6, & n_6=2.
\end{array}$$

Jedenfalls ist auch in diesen Fällen die Fouriersche Entwicklung thatsächlich gefunden und zwar für den Fall $n = 6$ in dem enger begrenzten Sinne. Wir können hiernach sagen, dafs die Transformationen 2, 3, 4, 6ten Grades völlig zu Ende geführt sind. Von der Transformation fünften Grades kann dasselbe nicht behauptet werden, da in den Formeln die Moduln $4\tau_{\varepsilon\varepsilon_1}$ und $20\tau_{\varepsilon\varepsilon_1}$ enthalten sind.

In diesen speziellen Formeln tritt aber das Gesetz, mit dessen Hülfe im allgemeinen Falle die Konstantenbestimmung gegeben werden

kann, klar hervor. In der That, nehmen wir an, daſs n eine ungerade Zahl sei, so setzen wir:

$$a_{11} = a_{12} = \cdots a_{1n} = 1,$$

$$a_{21} = n - 1, \quad a_{22} = a_{23} \cdots = a_{2n} = -1,$$

$$a_{31} = a_{41} \cdots = a_{n1} = 0.$$

Man überzeugt sich leicht, daſs die Bedingungsgleichungen, mit deren Hülfe die übrigen Gröſsen zu bestimmen sind, dieselben sind wie für den Fall $n - 1$, so daſs die Bestimmung damit auf den Fall einer geraden Zahl zurückgeführt ist, welche kleiner ist, als die ursprünglich vorgelegte.

Ist dagegen n eine gerade Zahl gleich 2ν, so setzen wir:

$$a_{11} = a_{12} = \cdots a_{1n} = 1,$$

$$a_{21} = a_{22} \cdots = a_{2\nu} = 1, \; a_{2\nu+1} = a_{2\nu+2} = \cdots a_{2n} = -1.$$

Überdies nehmen wir an, daſs in den folgenden $\nu - 1$ Horizontalreihen die ν ersten Glieder der Null gleich sind, während die ν andern mit Hülfe der Bedingungsgleichungen bestimmt sind, die für den Fall ν bestehen; daſs endlich in den letzten $\nu - 1$ Horizontalreihen die ν letzten Glieder der Null gleich sind, während die übrigen zu dem Falle $n = \nu$ gehörig angesehen werden können. Damit ist aber das Problem gelöst und die Fourierschen Entwickelungen sind für ein beliebig vorgelegtes n thatsächlich in der verlangten Form aufzustellen.

Auch das letzte in § 50 aufgestellte Additionstheorem führt zur Lösung des Problems der Fourierschen Entwickelung, wenn wir die Zahlen $a_{\varepsilon\varepsilon_1}$ den Bedingungen unterwerfen:

$$a_{11} + a_{12} + \cdots a_{1n} = 2n,$$

$$a_{\varepsilon 1} + a_{\varepsilon 2} + \cdots a_{\varepsilon n} = 0, \quad \varepsilon > 1.$$

Daſs diese Bestimmung immer möglich ist, folgt leicht und braucht nicht näher auseinandergesetzt zu werden. Der Vorzug dieser zweiten Art der Darstellung besteht darin, daſs in einer Reihe von Fällen z. B. $n = 5$ die Mannigfaltigkeit der Moduln eine geringere ist, als bei der ersten Art der Darstellung.

§ 54.*)

Die linearen Relationen zwischen den transformierten Thetafunktionen.

Wie in § 51 nachgewiesen worden ist, bestehen zwischen den transformierten Thetafunktionen eine Reihe linearer Beziehungen. Dieselben sollen jetzt in Kürze entwickelt werden. Zunächst führt die Methode, welche in § 46 entwickelt worden ist, zu der Aufstellung solcher Relationen.

In der That, die Funktion:

$$f(v_1, v_2) = \vartheta_5(nv_1, nv_2, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22}) \tag{1}$$

leistet den Gleichungen Genüge (2):

$$f\left(v_1 + \frac{1}{n}, v_2\right) = f(v_1, v_2), \quad f(v_1, v_2 + 1) = f(v_1, v_2),$$
$$f(v_1 + \tau_{11}, v_2 + \tau_{12}) = e^{-n\pi i(2v_1 + \tau_{11})} . f(v_1, v_2),$$
$$f(v_1 + \tau_{12}, v_2 + \tau_{22}) = e^{-n\pi i(2v_2 + \tau_{22})} . f(v_1, v_2).$$

Denselben Gleichungen leisten die Funktionen Genüge:

$$\vartheta_5\left(nv_1, v_2, n\tau_{11}, \tau_{12}, \frac{\tau_{22} - 8\lambda}{n}\right).$$

Daraus folgt (3):

$$\vartheta_5(nv_1, nv_2, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22})$$
$$= \sum_0^{n-1} e_\lambda \cdot \vartheta_5\left(n v_1, v_2, n\tau_{11}, \tau_{12}, \frac{\tau_{22} - 8\lambda}{n}\right).$$

Die Konstanten sind u. a. durch Einsetzen der Fourierschen Entwickelungen unmittelbar bestimmt. Es ergiebt sich (4):

$$n \cdot \vartheta_5(nv_1, nv_2, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22})$$
$$= \sum_0^{n-1} \vartheta_5\left(nv_1, v_2, n\tau_{11}, \tau_{12}, \frac{\tau_{22} - 8\lambda}{n}\right).$$

Genau so erhalten wir die Gleichung (5):

$$n . \vartheta_5(nv_1, nv_2, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22})$$
$$= \sum_0^{n-1} \vartheta_5\left(v_1, nv_2, \frac{\tau_{11} - 8\lambda}{n}, \tau_{12}, n\tau_{22}\right)$$

und hieraus (6):

*) Cf. Wiltheifs: Crelle 96. Krause: Mathematische Annalen 25.

$$n \cdot \vartheta_5\left(nv_1,\ v_2,\ n\tau_{11},\ \tau_{12},\ \frac{\tau_{22}}{n}\right)$$

$$= \sum_0^{n-1}{}^{\lambda}\, \vartheta_5\left(v_1,\ v_2,\ \frac{\tau_{11}-8\lambda}{n},\ \frac{\tau_{12}}{n},\ \frac{\tau_{22}}{n}\right).$$

Durch eine einfache Modifikation des Verfahrens, indem nach Thetafunktionen n^{ter} Ordnung gesucht wird, die etwas andern Bedingungsgleichungen Genüge leisten, folgen die Relationen (7):

$$n \cdot \vartheta_5(nv_1,\ nv_2,\ n\tau_{11},\ n\tau_{12},\ n\tau_{22})$$

$$= \sum_0^{n-1}{}^{\lambda}\, \vartheta_5\left(v_1 - 2\lambda_1 \cdot v_2,\ nv_2,\ \frac{\tau_{11} - 2\lambda_1 \cdot \tau_{12} + 4\lambda_1^2 \cdot \tau_{22} - 2\lambda}{n},\right.$$

$$\left. \tau_{12} - 2\lambda_1 \cdot \tau_{22},\ n\tau_{22}\right) \quad {\scriptstyle \lambda_1 = 0,\, 1,\, \ldots\, n-1},$$

$$n \cdot \vartheta_5\left(v_1 - 2\lambda_2 . v_2,\ nv_2,\ \frac{\tau_{11} - 2\lambda_2 \cdot \tau_{12} + 4\lambda_2^2 \cdot \tau_{22}}{n},\ \tau_{12} - 2\lambda_2 \cdot \tau_{22},\ n\tau_{22}\right)$$

$$= \sum_0^{n-1}{}^{\lambda}\, \vartheta_5\left(v_1,\ v_2,\ \frac{\tau_{11} - 2\lambda}{n},\ \frac{\tau_{12} - 2\lambda'_2 \cdot \lambda}{n},\ \frac{\tau_{22} - 2\lambda'^2_2 \cdot \lambda}{n}\right) \quad {\scriptstyle \lambda_2 = 1,\, 2,\, \ldots\, n-1},$$

wenn die Kongruenz stattfindet:

$$(8) \qquad 2\lambda_2 \cdot \lambda_2' \equiv 1 \bmod n.$$

Der ganze Formenreichtum von Beziehungen, die zwischen $n+1$ transformierten Thetafunktionen bestehen, ist hiermit nicht erschöpft, es können entweder auf direktem Wege oder auch durch lineare Transformation weitere Formeln analoger Art abgeleitet werden — indessen bringen dieselben inhaltlich nichts Neues.

Aufser den soeben charakterisierten Relationen bestehen aber noch andere zwischen je n transformierten Thetafunktionen. Man überzeugt sich hiervon u. a. unmittelbar durch die Darstellung der transformierten Thetafunktionen durch die Gröfsen $\varphi(g_1, g_2)$, die im vorigen Paragraphen gegeben worden ist.

Versteht man dann unter g einen Nichtrest nach dem Modul n, und setzt:

$$(9) \qquad e^{\frac{2\pi i g}{n}} = \alpha,$$

so finden die Beziehungen (10) statt:

$$\sum_0^{n-1}{}^{\lambda}\, \alpha^{\lambda} . \vartheta_5\left(v_1,\ v_2,\ \frac{\tau_{11} - 2\lambda}{n},\ \frac{\tau_{12} - 2\lambda}{n},\ \frac{\tau_{22} - 2\lambda}{n}\right) = 0,$$

$$\sum_0^{n-1}{}_\lambda \alpha^\lambda . \vartheta_5\left(v_1 - \lambda_1 v_2,\ n v_2,\ \frac{\tau_{11} - 2\lambda_1\tau_{12} + 4\lambda_1{}^2\tau_{22} - 2\lambda}{n},\ \tau_{12} - 2\lambda_1\tau_{22},\ n\tau_{22}\right) = 0,$$

$$\sum_0^{n-1}{}_\lambda \alpha^\lambda . \vartheta_5\left(n v_1,\ v_2,\ n\tau_{11},\ \tau_{12},\ \frac{\tau_{22} - 2\lambda}{n}\right) = 0.$$

§ 55.*)

Die Division der hyperelliptischen Funktionen.

Das Problem der Division der hyperelliptischen Funktionen möge zunächst folgendermaſsen formuliert werden.

Es sollen die Funktionen

$$al_\alpha\left(\frac{u_1 + 2J_1}{n},\ \frac{u_2 + 2J_2}{n}\right)$$

durch die ursprünglichen ausgedrückt werden, wenn gesetzt ist:

$$\begin{aligned} J_1 &= m \,.\, K_{11} + m' . K_{12} + m_1 \,.\, K_{11}' + m_2 \,.\, K_{12}', \\ J_2 &= m \,.\, K_{21} + m' . K_{22} + m_1 \,.\, K_{21}' + m_2 \,.\, K_{22}', \end{aligned} \tag{1}$$

und m, m', m_1, m_2 beliebige ganze Zahlen bedeuten. Die bei der Lösung zu gebrauchenden Konstanten lassen wir einstweilen unbestimmt, n sei eine ungerade Primzahl.

Es empfiehlt sich nun, bei der Lösung dieses Problems der einfacheren Bezeichnungsweise wegen die hyperelliptischen Funktionen als Funktionen der Gröſsen v_1, v_2, τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} anzusehen. Wir wollen setzen:

$$al_\alpha(u_1, u_2) = \lambda_\alpha(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}), \tag{2}$$

oder auch wo kein Zweifel über die Werte der Gröſsen τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} herrscht:

$$al_\alpha(u_1, u_2) = \lambda_\alpha(v_1, v_2).$$

Es handelt sich dann um die Bestimmung der Gröſsen:

$$\lambda_\alpha\left(\frac{v_1 + 2i_1}{n},\ \frac{v_2 + 2i_2}{n}\right),$$

wenn gesetzt ist:

$$i_1 = m + m_1 \,.\, \tau_{11} + m_2 \,.\, \tau_{12},\quad i_2 = m' + m_1 \,.\, \tau_{12} + m_2 \,.\, \tau_{22}. \tag{3}$$

Aus dem Additionstheorem folgt, daſs alle die genannten Aus-

*) Cf. Hermite: Crelle 32. Krause: Zur fünften Säkularfeier der Universität Heidelberg. Rostock 1886.

drücke rationale Funktionen der Gröfsen $\lambda_\alpha\left(\frac{v_1}{n}, \frac{v_2}{n}\right)$ sind, deren Koefficienten sich rational aus den Konstanten

$$\lambda_\alpha\left(\frac{2i_1}{n}, \frac{2i_2}{n}\right) \text{ und } \varkappa^2, \lambda^2, \mu^2$$

zusammensetzen lassen. Hierbei kann α den Index einer beliebigen Thetafunktion bedeuten. Ferner folgt aber aus dem Multiplikationstheorem, dafs alle 15 Gröfsen $\lambda_\alpha\left(\frac{v_1}{n}, \frac{v_2}{n}\right)$ sich rational durch drei unter ihnen, etwa $\lambda_{34}\left(\frac{v_1}{n}, \frac{v_2}{n}\right)$, $\lambda_{01}\left(\frac{v_1}{n}, \frac{v_2}{n}\right)$, $\lambda_2\left(\frac{v_1}{n}, \frac{v_2}{n}\right)$ ausdrücken lassen, so zwar, dafs die Koefficienten rationale Funktionen von $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 und den ursprünglichen Funktionen $\lambda_\alpha(v_1, v_2)$ sind.

Mit andern Worten, das Problem der Division der hyperelliptischen Funktionen, wie wir es gestellt haben, kommt lediglich auf die Bestimmung der drei Gröfsen: $\lambda_\varepsilon\left(\frac{v_1}{n}, \frac{v_2}{n}\right)$ heraus, wenn ε die Werte annehmen kann 34, 01, 2. Aus den Multiplikationsgleichungen folgt aber unmittelbar, dafs diese Gröfsen Wurzeln eines Gleichungssystems sind, dessen Koefficienten sich rational aus den Gröfsen $f_\varepsilon(v_1, v_2)$ und $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 zusammensetzen lassen, dessen sämtliche Wurzelsysteme ferner die Form haben:

$$\lambda_\varepsilon\left(\frac{v_1 + 2i_1}{n}, \frac{v_2 + 2i_2}{n}\right),$$

wobei die Zahlen m, die in den Ausdrücken i_1 und i_2 vorkommen, der Reihe nach die Werte annehmen können: $0, 1, \ldots n-1$.

Die soeben definierten Gleichungen sind mit Hülfe von Wurzelzeichen lösbar.

In der That, bilden wir die Summen:

$$\sum_0^{n-1}{}_m \sum_0^{n-1}{}_{m'} \sum_0^{n-1}{}_{m_1} \sum_0^{n-1}{}_{m_2} \lambda_\varepsilon\left(\frac{v_1+2i_1}{n}, \frac{v_2+2i_2}{n}\right) p^m \cdot q^{m'} \cdot r^{m_1} \cdot s^{m_2}, \qquad \varepsilon = 34, 01, 2,$$

wobei p, q, r, s n^{te} Einheitswurzeln bedeuten, so folgt, dafs dieser Ausdruck sich als rationale Funktion der Gröfsen

$$\lambda_\varepsilon\left(\frac{v_1}{n}, \frac{v_2}{n}\right)$$

darstellen läfst; es folgt ferner, dafs die n^{te} Potenz desselben ungeändert bleibt, wenn gesetzt wird an Stelle von:

$$\frac{v_1}{n}, \frac{v_2}{n} \text{ resp. } \frac{v_1 + 2i_1}{n}, \frac{v_2 + 2i_2}{n},$$

mit andern Worten, es folgt, dafs die n^{te} Potenz eine rationale Funktion der Koefficienten der Divisionsgleichungen ist. Lassen wir nun p, q, r, s der Reihe nach die verschiedenen Wurzeln der Kreisteilungsgleichung n^{ter} Ordnung bedeuten, so folgt der

Lehrsatz.

Unter Adjunktion der Konstanten

$$\varkappa^2,\ \lambda^2,\ \mu^2,\ \lambda_a\left(\frac{2i_1}{n},\ \frac{2i_2}{n}\right)$$

lassen sich die Gröfsen:

$$\lambda_\varepsilon\left(\frac{v_1+2i_1}{n},\ \frac{v_2+2i_2}{n}\right)$$

mit Hülfe n^{ter} Wurzeln aus den ursprünglichen Funktionen $\lambda_\varepsilon(v_1, v_2)$ darstellen.

Unter Zuhülfenahme der Transformationstheorie läfst sich das Divisionsproblem wesentlich reduzieren.

In der That, es folgt aus den Betrachtungen, die früher entwickelt worden sind, dafs die Gröfsen

$$(4) \qquad y_\varepsilon = \lambda_\varepsilon\left(\frac{v_1+2m}{n},\ \frac{v_2+2m'}{n}\right)$$

Wurzeln je einer Gleichung vom Grade n^2 sind, deren Koefficienten sich rational aus den Gröfsen

$$\lambda_\varepsilon(v_1,\ v_2,\ n\tau_{11},\ n\tau_{12},\ n\tau_{22}),\ \varkappa^2,\ \lambda^2,\ \mu^2,\ c^2,\ l^2,\ m^2$$

zusammensetzen lassen. Hierbei bedeuten c^2, l^2, m^2 die transformierten Moduln. Auch diese Gleichungen sind mit Hülfe n^{ter} Wurzeln lösbar. In der That, bilden wir die Ausdrücke:

$$\sum_0^{n-1}{}_m \sum_0^{n-1}{}_{m'}\ \lambda_\varepsilon\left(\frac{v_1+2m}{n},\ \frac{v_2+2m'}{n}\right) p^m \cdot q^{m'},$$

wo p und q wieder n^{te} Einheitswurzeln bedeuten, so folgt analog, wie früher, dafs dieselben sich rational aus den drei Funktionen $\lambda_\varepsilon\left(\frac{v_1}{n},\ \frac{v_2}{n}\right)$ zusammensetzen, so zwar, dafs die Koefficienten rationale Funktionen von

$$\lambda_\varepsilon(v_1,\ v_2),\ \varkappa^2,\ \lambda^2,\ \mu^2 \text{ und } \lambda_a\left(\frac{2m}{n},\ \frac{2m'}{n}\right)$$

sind; es folgt ferner, dafs die n^{ten} Potenzen dieser Ausdrücke rationale Funktionen der Koefficienten in den vorhin genannten Gleichungen sind. Mit andern Worten, es folgt der:

Lehrsatz.

Die Gröfsen y_ε sind Wurzeln je einer Gleichung vom Grade n^2, deren Koefficienten sich rational aus den Gröfsen:

$$\lambda_\varepsilon(v_1, v_2, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22}), \varkappa^2, \lambda^2, \mu^2, c^2, l^2, m^2$$

zusammensetzen lassen. Unter Adjunktion der soeben genannten Gröfsen und der Ausdrücke:

$$\lambda_\alpha\left(\frac{2m}{n}, \frac{2m'}{n}\right)$$

sind sie mit Hülfe n^{ter} Wurzeln durch die ursprünglichen hyperelliptischen Funktionen darstellbar.

Analoge Sätze gelten für alle Repräsentanten. So z. B. folgt: Die Ausdrücke

$$\lambda_\varepsilon\left(\frac{v_1 + 2m_1 \cdot \tau_{11} + 2m_2 \cdot \tau_{12}}{n}, \frac{v_2 + 2m_1 \cdot \tau_{12} + 2m_2 \cdot \tau_{22}}{n}\right)$$

sind Wurzeln je einer Gleichung vom Grade n^2, deren Koefficienten sich rational aus den Gröfsen:

$$\lambda_\varepsilon\left(\frac{v_1}{n}, \frac{v_2}{n}, \frac{\tau_{11}}{n}, \frac{\tau_{12}}{n}, \frac{\tau_{22}}{n}\right), \varkappa^2, \lambda^2, \mu^2, c_1^2, l_1^2, m_1^2$$

ausdrücken lassen, wobei c_1^2, l_1^2, m_1^2 die den Gröfsen $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 entsprechenden transformierten Gröfsen bedeuten. Unter Adjunktion der soeben genannten Gröfsen und der Konstanten:

$$\lambda_\alpha\left(\frac{2m_1 \cdot \tau_{11} + 2m_2 \cdot \tau_{12}}{n}, \frac{2m_1 \cdot \tau_{12} + 2m_2 \cdot \tau_{22}}{n}\right)$$

sind sie mit Hülfe n^{ter} Wurzeln aus den ursprünglichen hyperelliptischen Funktionen darstellbar.

Hieraus aber folgt eine Reduktion des ursprünglichen Divisionsproblems auf das Problem, zwei algebraisch lösbare Gleichungssysteme einfacherer Natur zu lösen.

In der That, aus dem ersten der beiden letzten Gleichungssysteme lassen sich die Gröfsen:

$$\lambda_\varepsilon\left(\frac{v_1}{n}, \frac{v_2}{n}, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}\right)$$

algebraisch durch die Gröfsen

$$\lambda_\varepsilon(v_1, v_2, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22}), \lambda_\alpha(v_1, v_2), \varkappa^2, \lambda^2, \mu^2, c^2, l^2, m^2,$$

$$\lambda_\alpha\left(\frac{2m}{n}, \frac{2m'}{n}\right)$$

darstellen. Aus dem zweiten Gleichungssysteme aber folgt, dafs die Funktionen:

$$\lambda_\varepsilon(v_1, v_2, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22})$$

sich algebraisch durch die Gröfsen:

$$\lambda_\varepsilon(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}), \lambda_\alpha(nv_1, nv_2, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22}),$$

$$\lambda_\alpha\left(n\left(\frac{2m_1.\tau_{11}+2m_2.\tau_{12}}{n}\right), n\left(\frac{2m_1.\tau_{12}+2m_2.\tau_{22}}{n}\right), n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22}\right),$$

$$\varkappa^2, \lambda^2, \mu^2, c^2, l^2, m^2$$

darstellen lassen. Nun lassen sich aber vermöge der Transformationsgleichungen die Funktionen:

$$\lambda_\alpha(nv_1, nv_2, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22})$$

rational durch die Gröfsen:

$$\lambda_\alpha(v_1, v_2), \varkappa^2, \lambda^2, \mu^2, c^2, l^2, m^2$$

darstellen, und zwar gilt das für alle Werte von v_1 und v_2, also auch für:

$$v_1 = \frac{2m_1.\tau_{11}+2m_2.\tau_{12}}{n}, \quad v_2 = \frac{2m_1.\tau_{12}+2m_2.\tau_{22}}{n}.$$

Hieraus folgt mit Hülfe weniger Schlüsse der

Lehrsatz.

Die Gröfsen $\lambda_\varepsilon\left(\frac{v_1}{n}, \frac{v_2}{n}\right)$ lassen sich mit Hülfe zweier Gleichungen vom Grade n^2 algebraisch durch die ursprünglichen Funktionen ausdrücken. Als Konstanten treten die Gröfsen auf:

$$\lambda_\alpha\left(\frac{2i_1}{n}, \frac{2i_2}{n}\right), \varkappa^2, \lambda^2, \mu^2, c^2, l^2, m^2.$$

Das Problem kann noch weiter reduziert werden.

In der That, nehmen wir jetzt die transformierten Funktionen:

$$\lambda_\varepsilon\left(nv_1, v_2, n\tau_{11}, \tau_{12}, \frac{\tau_{22}+8\xi}{n}\right),$$

so folgt leicht, dafs die zu diesen Funktionen gehörenden Transformationsgleichungen, wenn wir noch an Stelle von v_1 und v_2 uns $\frac{v_1}{n}$ und $\frac{v_2}{n}$ gesetzt denken, jedenfalls die Wurzeln besitzen:

$$y_\varepsilon = \lambda_\varepsilon\left(\frac{v_1+2m}{n}, \frac{v_2}{n}\right);$$

es folgt ferner, dafs dieses die einzigen Wurzeln sind, welche sie mit den Transformationsgleichungen, die der Determinante

$$\begin{vmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

entsprechen, gemeinsam haben können.

Hieraus folgt der

Lehrsatz.

Die Funktionen $\lambda_\varepsilon\left(\frac{v_1+2m}{n}, \frac{v_2}{n}\right)$ sind Wurzeln je einer Gleichung vom Grade n, deren Koefficienten sich rational aus je zwei der Funktionensysteme:

$$\lambda_\varepsilon(v_1, v_2, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22}),\ \lambda_\varepsilon\left(v_1, \frac{v_2}{n}, n\tau_{11}, \tau_{12}, \frac{\tau_{22}+8\xi}{n}\right)$$

zusammensetzen lassen. Alle diese Gleichungen sind im analogen Sinne wie die früher behandelten algebraisch lösbar.

Offenbar ergeben sich eine ganze Reihe analoger Sätze, die mit Leichtigkeit durch Anwendung der linearen Transformation oder anderer Methoden aus dem obigen entwickelt werden können.

Die Betrachtung dieser Gleichungssysteme liefert dann den

Lehrsatz.

Die Bestimmung der Gröfsen $\lambda_\varepsilon\left(\frac{v_1}{n}, \frac{v_2}{n}\right)$ ist mit Hülfe von vier algebraisch lösbaren Gleichungen vom Grade n durchzuführen.

Diese Resultate ergeben sich durch Adjunktion zweier Systeme transformierter Funktionen. Würden wir alle transformierten Funktionen adjungieren, so würde sich, wie leicht folgt, das Resultat ergeben:

Die Funktionen $\lambda_\varepsilon(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})$ sind rationale Funktionen der repräsentierenden transformierten hyperelliptischen Funktionen $\lambda_\varepsilon(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')$.

Es ist nun nicht schwer, die Transformationsgleichungen und damit auch die Divisionsgleichungen wirklich aufzulösen.

In der That, aus den Entwickelungen des § 53 folgt leicht die Formel (5):

$$n^2 \cdot \vartheta_5(v_1, v_2)^n = \sum e^{-\frac{2\pi i}{n}(h_1 \cdot p + h_2 \cdot q)} \cdot \vartheta_5 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} ((0))^n \cdot \psi_5(p, q),$$

$$\psi_5(p, q) = e^{-2\pi i(p \cdot v_1 + q \cdot v_2)}$$

$$\cdot \frac{\vartheta_5(nv_1 - p\tau_{11} - q\tau_{12},\ nv_2 - p\tau_{12} - q\tau_{22},\ n\tau_{11},\ n\tau_{12},\ n\tau_{22})}{\vartheta_5(-p\tau_{11} - q\tau_{12},\ -p\tau_{12} - q\tau_{22},\ n\tau_{11},\ n\tau_{12},\ n\tau_{22})}.$$

Dabei ist die Summe eine vierfache und über h_1, h_2, p, q von 0 bis $n - 1$ zu erstrecken.

Analog folgt (6):

$$n^2 \cdot \vartheta_{34}(v_1, v_2) \cdot \vartheta_5(v_1, v_2)^{n-1} = \sum e^{-\frac{2\pi i}{n}(h_1 \cdot p + h_2 \cdot q)}$$

$$\cdot \vartheta_{34} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} ((0)) \cdot \vartheta_5 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} ((0))^{n-1} \cdot \psi_{34}(p, q),$$

$$\psi_{34}(p, q) = e^{-2\pi i(p \cdot v_1 + q \cdot v_2)}$$

$$\cdot \frac{\vartheta_{34}(nv_1 - p\tau_{11} - q\tau_{12},\ nv_2 - p\tau_{12} - q\tau_{22},\ n\tau_{11},\ n\tau_{12},\ n\tau_{22})}{\vartheta_{34}(-p\tau_{11} - q\tau_{12},\ -p\tau_{12} - q\tau_{22},\ n\tau_{11},\ n\tau_{12},\ n\tau_{22})}.$$

Durch Division ergiebt sich (7):

$$\frac{\vartheta_{34}(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)} = \frac{M}{N},$$

$$M = \sum e^{-\frac{2\pi i}{n}(h_1 \cdot p + h_2 \cdot q)} \cdot \vartheta_{34} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} ((0)) \cdot \vartheta_5 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} ((0))^{n-1} \cdot \psi_{34}(p, q),$$

$$N = \sum e^{-\frac{2\pi i}{n}(h_1 \cdot p + h_2 \cdot q)} \cdot \vartheta_5 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} ((0))^n \cdot \psi_5(p, q).$$

Nun ist:

$$\psi_{34}(p, q) = \frac{\lambda_{34}(nv_1 - p\tau_{11} - q\tau_{12},\ nv_2 - p\tau_{12} - q\tau_{22},\ n\tau_{11},\ n\tau_{12},\ n\tau_{22})}{\lambda_{34}(-p\tau_{11} - q\tau_{12},\ -p\tau_{12} - q\tau_{22},\ n\tau_{11},\ n\tau_{12},\ n\tau_{22})} \cdot \psi_5(p, q).$$

Hieraus folgt leicht, daſs die Auflösung geleistet wäre, wenn wir im Stande wären, die Quotienten

$$\frac{\psi_5(p, q)}{\psi_5(0, 0)}$$

zu bestimmen. Nun folgt aber aus den Transformationsgleichungen, daſs der Ausdruck:

$$\frac{\vartheta_5\left(v_1, v_2, \frac{\tau_{11}}{n}, \frac{\tau_{12}}{n}, \frac{\tau_{22}}{n}\right) \vartheta_5^n}{\vartheta_5\left(0, 0, \frac{\tau_{11}}{n}, \frac{\tau_{12}}{n}, \frac{\tau_{22}}{n}\right) \cdot \vartheta_5(v_1, v_2)^n}$$

eine völlig bekannte ganze Funktion der drei Gröſsen $\lambda_s(v_1, v_2)$ ist, die wir bezeichnen wollen durch:

$$\chi\left(\lambda_{34}(v_1, v_2), \lambda_{01}(v_1, v_2), \lambda_2(v_1, v_2)\right).$$

Setzen wir in diesen Ausdrücken an Stelle von $v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$ resp. $nv_1, nv_2, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22}$, so folgt, daſs der Ausdruck:

$$\frac{\vartheta_5(nv_1, nv_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}) \cdot \vartheta_5(0, 0, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22})^n}{\vartheta_5(0, 0, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}) \cdot \vartheta_5(nv_1, nv_2, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22})^n}$$

eine völlig bekannte Funktion der drei Gröſsen

$$\lambda_s(nv_1, nv_2, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22})$$

ist. Setzen wir endlich an Stelle von v_1 und v_2 resp.:

$$v_1 - \frac{p\tau_{11} + q\tau_{12}}{n}, \quad v_2 - \frac{p\tau_{12} + q\tau_{22}}{n},$$

so folgt unmittelbar, daſs die Funktionen:

$$\frac{\psi_5(p, q)^n}{\psi_5(0, 0)^n}$$

als völlig bekannte rationale Funktionen der Gröſsen

$$\lambda_s(nv_1 - p\tau_{11} - q\tau_{12}, nv_2 - p\tau_{12} - q\tau_{22}, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22})$$

angesehen werden können, wobei p und q alle Werte von 0 bis $n - 1$ durchlaufen können.

Damit ist die Auflösung thatsächlich geliefert. Allerdings sind die Gröſsen:

$$\frac{\psi_5(p, q)}{\psi_5(0, 0)}$$

nur mit Hülfe n^{ter} Wurzeln darstellbar, indessen ist es leicht zu zeigen, daſs von diesen Gröſsen immer vier derart bestimmt werden können, daſs die übrigen mit ihrer Hülfe in eindeutiger Weise bestimmt sind.

Nehmen wir dazu den Ausdruck:

$$\frac{\vartheta_5\begin{bmatrix} p & q \\ 0 & 0 \end{bmatrix}(v) \cdot \vartheta_5\begin{bmatrix} \varepsilon_1 . p' & \varepsilon_1 . q' \\ 0 & 0 \end{bmatrix}(v)^s \cdot \vartheta_5\begin{bmatrix} \varepsilon_2 . p'' & \varepsilon_2 . q'' \\ 0 & 0 \end{bmatrix}(v)^t \cdot \vartheta_5(v)^{n-s-t-1}}{\vartheta_5\begin{bmatrix} p & q \\ 0 & 0 \end{bmatrix}(0) \cdot \vartheta_5\begin{bmatrix} p' & q' \\ 0 & 0 \end{bmatrix}(0)^s \cdot \vartheta_5\begin{bmatrix} p'' & q'' \\ 0 & 0 \end{bmatrix}(0)^t \cdot \vartheta_5{}^{n-s-t-1}}$$

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1, \; s \leq \frac{n-1}{2}, \; t \leq \frac{n-1}{2},$$

wobei p und q beliebige ganze Zahlen sind, so können die Gröſsen p', q', p'', q'', s, t immer so bestimmt werden, daſs dieser Ausdruck eine Thetafunktion n^{ter} Ordnung mit der Charakteristik Null wird.

In der That, wir haben dazu p', q', p'', q'' nur so zu wählen, daſs die Kongruenzen lösbar sind (8):

$$p + \varepsilon_1 . s . p' + \varepsilon_2 . t . p'' \equiv 0 \mod n,$$
$$q + \varepsilon_1 . s . q' + \varepsilon_2 . t . q'' \equiv 0 \mod n.$$

Thetafunktionen n^{ter} Ordnung lassen sich aber in bekannter Weise durch die ursprünglichen ausdrücken. Setzen wir in den auf diese Weise erhaltenen Gleichungen links und rechts an Stelle von v_1, v_2, τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} resp. nv_1, nv_2, $n\tau_{11}$, $n\tau_{12}$, $n\tau_{22}$, so folgt der zu beweisende Satz.

Damit ist die Auflösung der Transformationsgleichungen wirklich geleistet. Es ist klar, daſs analog die Auflösung der Divisionsgleichungen in expliciter Form gegeben werden kann.

Da aber die Ausdrücke eine etwas kompliziertere Form annehmen, so möge von ihrer Aufstellung abgesehen werden.

Bei der Lösung des Divisionsproblems, wie wir sie gebracht haben, waren die Konstanten völlig willkürlich gelassen worden. Es zeigten sich mehrere Kategorien derselben. Wir greifen aus ihnen die folgenden heraus, auf welche sich etwa fehlende leicht reduzieren lassen:

1) die Gröſsen: $\vartheta_5\begin{bmatrix}0\,0\\h_1 h_2\end{bmatrix}((0))^n : \vartheta_{34}\begin{bmatrix}0\;\;0\\h_1' h_2'\end{bmatrix}((0)) \cdot \vartheta_5\begin{bmatrix}0\;\;0\\h_1' h_2'\end{bmatrix}((0))^{n-1}$,

2) die Gröſsen: $\lambda_\alpha\left(\frac{2i_1}{n}, \frac{2i_2}{n}\right)$,

3) die transformierten Moduln.

Es fragt sich nun, welches die Beziehungen sind, die zwischen diesen Gröſsen bestehen; es fragt sich ferner, wie dieselben bestimmt werden können, wenn die ursprünglichen Moduln oder auch die Quotienten je zweier ursprünglichen Thetafunktionen für die Nullwerte der Argumente gegeben sind.

Zunächst läſst sich die Bestimmung der Konstanten in der ersten Kategorie leicht auf die Bestimmung der Konstanten in den beiden andern Kategorien zurückführen. In der That, gehen wir dazu zu der Transformationsgleichung zurück, die wir für die Gröſse:

$$\frac{\vartheta_5(nv_1, nv_2, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22}) . \vartheta_5^n}{\vartheta_5(0, 0, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22}) . \vartheta_5(v_1, v_2)^n}$$

gefunden haben, so folgt aus ihr, daſs die Ausdrücke:

$$\frac{\vartheta_5\begin{bmatrix}0\;0\\h_1 h_2\end{bmatrix}(0)^n}{\vartheta_5^n}$$

sich rational durch die Konstanten der zweiten und dritten Kategorie ausdrücken lassen. Das analoge gilt für:

$$\frac{\vartheta_{34}\begin{bmatrix}0 & 0\\ h_1' & h_2'\end{bmatrix}(0)\,.\,\vartheta_5\begin{bmatrix}0 & 0\\ h_1' & h_2'\end{bmatrix}(0)^{n-1}}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_5^{\,n-1}},$$

und damit für die Konstanten der ersten Kategorie.

Wir wenden uns nun zu den Konstanten der zweiten Kategorie. Es folgt leicht, dafs wir uns hierbei auf die drei Quotienten beschränken können:

$$\lambda_\varepsilon\left(\frac{2i_1}{n}, \frac{2i_2}{n}\right) \qquad \varepsilon = 34, 01, 2.$$

In der That nehmen wir die Funktion:

$$\lambda_\gamma\left(\frac{2i_1}{n}, \frac{2i_2}{n}\right),$$

wobei γ den Index einer beliebigen geraden Thetafunktion bedeutet, so folgt aus dem Multiplikationsproblem unmittelbar, dafs derselbe sich rational aus den vorhin genannten drei speziellen Gröfsen zusammensetzen läfst, so zwar, dafs die Koefficienten rationale Funktionen von $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 sind. Ähnliches gilt für die ungeraden Funktionen.

Die drei genannten Gröfsen aber sind nach dem früheren Wurzeln je einer Gleichung vom Grade n^4, deren Koefficienten sich rational aus $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 zusammensetzen. Die Auflösung derselben kann auf die Auflösung dreier Gleichungen vom Grade $1 + n + n^2 + n^3$ reduziert werden, wobei es genügt, eine einzige derselben wirklich aufzulösen.

In der That, setzen wir (9):

$$i_1^{(1)} = 0, \qquad i_2^{(1)} = 2,$$

$$i_1^{(2)} = \frac{2\tau_{11}}{n}, \qquad i_2^{(2)} = \frac{2\tau_{12} + 2m}{n},$$

$$i_1^{(3)} = \frac{2m_1\,.\,\tau_{11} + 2\tau_{12}}{n}, \qquad i_2^{(3)} = \frac{2m_1\,.\,\tau_{12} + 2\tau_{22} + 2m}{n},$$

$$i_1^{(4)} = \frac{2m_1\,.\,\tau_{11} + 2m_2\,.\,\tau_{12} + 2}{n}, \qquad i_2^{(4)} = \frac{2m_1\,.\,\tau_{12} + 2m_2\,.\,\tau_{22} + 2m}{n},$$

so folgt, dafs alle Wurzeln in die Form gebracht werden können:

$$\lambda_\varepsilon(\nu\,.\,i_1^{(s)},\ \nu\,.\,i_2^{(s)}) \qquad s = 1, 2, 3, 4,$$

wobei ν der Reihe nach die Werte annimmt $1, 2, \ldots n-1$, oder da:

$$\lambda_\varepsilon\left((n-\nu)i_1^{(s)}, (n-\nu)i_2^{(s)}\right) = \lambda_\varepsilon(\nu\,.\,i_1^{(s)},\ \nu\,.\,i_2^{(s)})$$

ist, der Reihe nach die Werte $1, 2, \cdots \frac{n-1}{2}$.

Betrachten wir nun den Ausdruck:

$$(10) \qquad \sum_{0}^{\frac{n-1}{2}-1} \lambda_s(\varrho^r \cdot i_1^{(s)},\ \varrho^r \cdot i_2^{(s)})\, \alpha^r = \varphi_s(i_1^{(s)},\ i_2^{(s)}),$$

wo ϱ eine primitive Wurzel von n bedeutet und α eine Wurzel von:

$$x^{\frac{n-1}{2}} = 1,$$

so folgt, dafs ein jedes Glied $\lambda_s(\varrho^r \cdot i_1^{(s)},\ \varrho^r \cdot i_2^{(s)})$ sich rational aus den drei Gröfsen $\lambda_s(i_1^{(s)},\ i_2^{(s)})$ zusammensetzen läfst. Setzen wir nun:

$$(11) \qquad \varphi_s(i_1^{(s)},\ i_2^{(s)})^{\frac{1}{2}(n-1)} = \psi_s(i_1^{(s)},\ i_2^{(s)}),$$

so folgt leicht, dafs für jeden Wert von r die Gleichung besteht:

$$(12) \qquad \psi_s(i_1^{(s)},\ i_2^{(s)}) = \psi_s(\varrho^r \cdot i_1^{(s)},\ \varrho^r \cdot i_2^{(s)}).$$

Hieraus aber folgt, dafs $\psi_s(i_1^{(s)},\ i_2^{(s)})$ einer Gleichung vom Grade

$$1 + n + n^2 + n^3$$

Genüge leistet, deren Koefficienten sich rational aus x^2, λ^2, μ^2 zusammensetzen lassen. Sind aber die Funktionen $\psi(i_1^{(s)},\ i_2^{(s)})$ bekannt, so sind es die gesuchten auch, wie nicht näher auseinandergesetzt zu werden braucht.

Als weitere Konstanten nun traten in den früheren Betrachtungen die transformierten Moduln auf. Diese Gröfsen sind ausführlich betrachtet worden, es sind dieselben die Lösungen algebraischer Gleichungen, die mit dem Namen Modulargleichungen bezeichnet worden sind.

So sind die Konstanten aller drei Kategorien in Betracht gezogen worden, und um die Untersuchungen zu vervollständigen, ist es nur noch nötig, die Beziehungen herzustellen, die zwischen den Konstanten der zweiten und der dritten Kategorie bestehen.

Aus den Transformationsgleichungen nun zeigt es sich, dafs die transformierten Moduln rationale Funktionen der Gröfsen

$$\lambda_\alpha\left(\frac{2i_1}{n},\ \frac{2i_2}{n}\right)$$

sind, wenn man die Quotienten zweier ursprünglichen Thetafunktionen für die Nullwerte der Argumente adjungiert. Sind demnach die Gröfsen

$$\lambda_\alpha\left(\frac{2i_1}{n},\ \frac{2i_2}{n}\right)$$

bekannt, so sind es die transformierten Moduln auch.

Wir nehmen jetzt endlich umgekehrt die Wurzeln der Modulargleichungen als bekannt an und untersuchen, wie sich dann die Lösungen der speziellen Teilungsgleichungen modifizieren.

Die Funktionen:

$$\lambda_\varepsilon(nv_1, nv_2, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22}) \quad {\scriptstyle \varepsilon = 34,\, 01,\, 2}$$

lassen sich, wie früher bewiesen, als rationale Funktionen von $\lambda_\varepsilon(v_1, v_2)$ ausdrücken, deren Koefficienten sich rational aus $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 und den dazu gehörenden transformierten Moduln ausdrücken lassen.

Hieraus folgt für die Nullwerte der Argumente, dafs die Gröfsen:

$$\lambda_\varepsilon\left(\frac{2m}{n}, \frac{2m'}{n}\right)$$

Wurzeln je einer Gleichung vom Grade n^2 sind, deren Koefficienten sich rational aus den ursprünglichen und den transformierten Moduln zusammensetzen lassen. Die Auflösung dieser Gleichungen kann nun auf die Auflösung dreier Gleichungen vom Grade $n+1$ reduziert werden. In der That, setzen wir (13):

$$i_1^{(1)} = 0, \quad i_2^{(1)} = 2,$$
$$i_1^{(2)} = 2, \quad i_2^{(2)} = 2m,$$

wo m der Reihe nach gleich $0, 1, \ldots n-1$ zu nehmen ist, so lauten alle Wurzeln:

$$\lambda_\varepsilon(\nu \cdot i_1^{(s)}, \nu \cdot i_2^{(s)}), \quad {\scriptstyle s = 1,\, 2,}$$

wo ν die Werte $1, 2, \cdots \frac{n-1}{2}$ annimmt. Jetzt können dieselben Schlüsse wie vorhin angestellt werden. Setzen wir (14):

$$\sum_0^{\frac{n-1}{2}-1} {}_r\, \lambda_\varepsilon(\varrho^r \cdot i_1^{(s)}, \varrho^r \cdot i_2^{(s)}) \alpha^r = \varphi_\varepsilon(i_1^{(s)}, i_2^{(s)}),$$

$$\varphi_\varepsilon(i_1^{(s)}, i_2^{(s)})^{\frac{n-1}{2}} = \psi_\varepsilon(i_1^{(s)}, i_2^{(s)}),$$

so folgt, dafs $\psi_\varepsilon(i_1^{(s)}, i_2^{(s)})$ einer Gleichung vom Grade $n+1$ Genüge leistet, deren Koefficienten sich rational aus den ursprünglichen und den transformierten Moduln zusammensetzen lassen. Sind aber die Gröfsen $\psi_\varepsilon(i_1^{(s)}, i_2^{(s)})$ bekannt, so sind es die Gröfsen

$$\lambda_\varepsilon(\varrho^r \cdot i_1^{(s)}, \varrho^r \cdot i_2^{(s)})$$

auch und zwar mit Hülfe von $\frac{n-1}{2}$ten Wurzeln.

Das Problem kann aber noch weiter reduziert werden. Wir nehmen dazu die Transformationsgleichungen hinzu, die den Funk-

tionen $\lambda_\varepsilon(nv_1, nv_2, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22})$ und je einem der Funktionensysteme $\lambda_\varepsilon\left(nv_1, v_2, n\tau_{11}, \tau_{12}, \frac{\tau_{22}+8\xi}{n}\right)$ entsprechen, z. B. dem Systeme $\lambda_\varepsilon\left(nv_1, v_2, n\tau_{11}, \tau_{12}, \frac{\tau_{22}}{n}\right)$.

Setzen wir nun in den Transformationsgleichungen $v_1 = v_2 = 0$, so erhalten wir zwei Systeme algebraischer Gleichungen, welche als gemeinsame Wurzeln die Gröfsen:

$$\lambda_\varepsilon\left(\frac{2m}{n}, 0\right)$$

und nur diese besitzen. Daraus folgt, dafs diese Gröfsen je einer Gleichung n^{ten} Grades Genüge leisten, deren Koefficienten rationale Funktionen der ursprünglichen und der entsprechenden transformierten Moduln sind. Von der Wurzel $\lambda_\varepsilon(0, 0)$ können wir absehen, die andern sind paarweise einander gleich, so dafs die drei Gleichungen sich auf drei Gleichungen vom Grade $\frac{n-1}{2}$ reduzieren lassen. Die Wurzeln haben die Form:

$$\lambda_\varepsilon\left(\frac{2\varrho^r}{n}, 0\right).$$

Aus derselben folgt, dafs die Gleichungen mit Hülfe $\frac{n-1}{2}^{\text{ter}}$ Wurzeln lösbar sind.

Das Problem kann aber noch weiter reduziert werden. In der That, durch Umkehrung der Transformationsgleichungen folgt, dafs die Produkte:

$$\frac{\vartheta_5(v)^a \cdot \vartheta_{34}(v)^b \cdot \vartheta_2(v)^c \cdot \vartheta_{01}(v)^d}{\vartheta_5{}^a \cdot \vartheta_{34}{}^b \cdot \vartheta_2{}^c \cdot \vartheta_{01}{}^d}$$

sich als lineare Funktionen der Gröfsen:

$$\frac{\vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')}{\vartheta_5(0, 0, \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')}$$

darstellen lassen und zwar können wir uns hierbei auf die Gröfsen beschränken:

$$\frac{\vartheta_5\left(v_1, v_2, \frac{\tau_{11}+8\xi_1}{n}, \frac{\tau_{12}+8\xi_2}{n}, \frac{\tau_{22}+8\xi_3}{n}\right)}{\vartheta_5\left(0, 0, \frac{\tau_{11}+8\xi_1}{n}, \frac{\tau_{12}+8\xi_2}{n}, \frac{\tau_{22}+8\xi_3}{n}\right)}.$$

Setzen wir demnach $v_1 = v_2 = \frac{1}{n}$, so folgt, dafs der Ausdruck:

$$\frac{\vartheta_5\left(\left(\frac{1}{n}\right)\right)^a \cdot \vartheta_{34}\left(\left(\frac{1}{n}\right)\right)^b \cdot \vartheta_2\left(\left(\frac{1}{n}\right)\right)^c \cdot \vartheta_{01}\left(\left(\frac{1}{n}\right)\right)^d}{\vartheta_5{}^a \cdot \vartheta_{34}{}^b \cdot \vartheta_2{}^c \cdot \vartheta_{01}{}^d}$$

sich linear durch die Gröfsen:

$$\frac{\vartheta_5\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{\tau_{11}+8\xi_1}{n}, \frac{\tau_{12}+8\xi_2}{n}, \frac{\tau_{22}+8\xi_3}{n}\right)}{\vartheta_5\left(0, 0, \frac{\tau_{11}+8\xi_1}{n}, \frac{\tau_{12}+8\xi_2}{n}, \frac{\tau_{22}+8\xi_3}{n}\right)}$$

darstellen läfst. Nun läfst sich aber der Zähler dieses Ausdruckes mit Hülfe n^{ter} Einheitswurzeln durch die repräsentierenden Thetafunktionen selbst ausdrücken. In der That, gehen wir dazu zu der Formel zurück (15):

$$\begin{aligned}
&\vartheta_5\left(v_1, v_2, \frac{\tau_{11}+8\xi_1}{n}, \frac{\tau_{12}+8\xi_2}{n}, \frac{\tau_{22}+8\xi_3}{n}\right)\\
&= \vartheta_5(nv_1, nv_2, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22})\\
&+ \sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_r\, e^{\frac{8\pi i}{n} r^2 \cdot \xi_1} \cdot \varphi(r, 0) + e^{\frac{8\pi i}{n} r^2 \cdot \xi_3} \cdot \varphi(0, r)\\
&+ \sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_{r_1} \sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_{r_2}\, e^{\frac{8\pi i}{n}(r_1^2 \cdot \xi_1 + 2r_1 \cdot r_2 \cdot \xi_2 + r_2^2 \cdot \xi_3)} \cdot \varphi(r_1, r_2)\\
&+ e^{\frac{8\pi i}{n}(r_1^2 \cdot \xi_1 - 2r_1 \cdot r_2 \cdot \xi_2 + r_2^2 \cdot \xi_3)} \cdot \varphi(r_1, -r_2).
\end{aligned}$$

Aus dieser Formel folgt, dafs die Ausdrücke:

$$\vartheta_5\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{\tau_{11}+8\xi_1}{n}, \frac{\tau_{12}+8\xi_2}{n}, \frac{\tau_{22}+8\xi_3}{n}\right)$$

sich unter Adjunktion n^{ter} Einheitswurzeln linear durch die Gröfsen $\varphi(r_1', r_2')$ ausdrücken lassen, wobei r_1', r_2' nicht näher zu definierende Zahlen durchlaufen können. Diese Gröfsen aber drücken sich ihrerseits wieder linear durch die repräsentierenden Thetafunktionen aus und damit ist der Beweis geliefert. Wir finden somit den

Lehrsatz.

Die sämtlichen Ausdrücke:

$$\frac{\vartheta_5\left(\left(\frac{1}{n}\right)\right)^a \cdot \vartheta_{34}\left(\left(\frac{1}{n}\right)\right)^b \cdot \vartheta_2\left(\left(\frac{1}{n}\right)\right)^c \cdot \vartheta_{01}\left(\left(\frac{1}{n}\right)\right)^d}{\vartheta_5^{\,a} \cdot \vartheta_{34}^{\,b} \cdot \vartheta_2^{\,c} \cdot \vartheta_{01}^{\,d}},$$

bei denen

$$a + b + c + d = n,\ b + c \equiv b + d \equiv 0 \bmod 2$$

ist, lassen sich durch die Gröfsen:

$$\frac{\vartheta_5\left(0,\ 0,\ \frac{\tau_{11}+8\xi_1}{n},\ \frac{\tau_{12}+8\xi_2}{n},\ \frac{\tau_{22}+8\xi_3}{n}\right)}{\vartheta_5\left(0,\ 0,\ \frac{\tau_{11}}{n},\ \frac{\tau_{12}}{n},\ \frac{\tau_{22}}{n}\right)}$$

rational ausdrücken. Die Koefficienten setzen sich rational aus den transformierten Moduln und aus n^{ten} Einheitswurzeln zusammen.

Nun bestehen aber zwischen den Ausdrücken:

$$\frac{\vartheta_5\left(0,\ 0,\ \frac{\tau_{11}+8\xi_1}{n},\ \frac{\tau_{12}+8\xi_2}{n},\ \frac{\tau_{22}+8\xi_3}{n}\right)}{\vartheta_5\left(0,\ 0,\ \frac{\tau_{11}}{n},\ \frac{\tau_{12}}{n},\ \frac{\tau_{22}}{n}\right)}$$

und den transformierten Moduln selbst sehr enge Beziehungen.

In der That, nennen wir wie früher die Argumente der ursprünglichen hyperelliptischen Funktionen u_1, u_2, der transformierten u_1', u_2', so bestehen zwischen ihnen die oft erwähnten Beziehungen:

$$\begin{aligned} u_1' &= M_0 \,.\, u_1 + M_1 \,.\, u_2, \\ u_2' &= M_2 \,.\, u_1 + M_3 \,.\, u_2. \end{aligned} \tag{16}$$

Dabei lassen sich vermöge der Differentialbeziehungen, die in früheren Paragraphen entwickelt sind, die Gröfsen

$$M_\varepsilon^2,\ M_0 \,.\, M_1 \,.\, M_2 \,.\, M_3 \quad (\varepsilon = 0, 1, 2, 3)$$

rational durch die ursprünglichen Moduln und durch die zu der vorgelegten Transformation gehörenden transformierten ausdrücken. Dasselbe gilt also für die Gröfse:

$$M^2 = (M_0 \,.\, M_3 - M_1 \,.\, M_2)^2.$$

Nun ist andrerseits, wenn wir die transformierten Thetafunktionen durch grofse Buchstaben bezeichnen:

$$M = A \cdot \frac{\Theta_5^2}{\vartheta_5^2} \cdot \frac{\Theta_{34}^3 . \Theta_4^3 . \Theta_5}{\Theta_{03} . \Theta_{23} . \Theta_2 . \Theta_{12} . \Theta_{01} . \Theta_{14} . \Theta_0} \cdot \frac{\vartheta_{03} . \vartheta_{23} . \vartheta_2 . \vartheta_{12} . \vartheta_{01} . \vartheta_{14} . \vartheta_0}{\vartheta_{34}^3 . \vartheta_4^3 . \vartheta_5}.$$

Dabei ist A, wenn wir uns auf die zuletzt gebrauchten repräsentierenden Thetafunktionen beschränken, der Einheit gleich zu setzen. Hieraus folgt unmittelbar der

Lehrsatz.

Die Ausdrücke:

$$\frac{\vartheta_5\left(0,\ 0,\ \frac{\tau_{11}+8\xi_1}{n},\ \frac{\tau_{12}+8\xi_2}{n},\ \frac{\tau_{22}+8\xi_3}{n}\right)^4}{\vartheta_5^4}$$

lassen sich rational durch die ursprünglichen Moduln und die zu ihnen gehörenden transformierten ausdrücken.

Berücksichtigen wir diesen Lehrsatz, so folgt mit Hülfe weniger Schlüsse der weitere:

Es lassen die Funktionen:

$$\lambda_\epsilon\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

sich mit Hülfe vierter Wurzeln durch die transformierten Moduln darstellen. In den Koefficienten treten die ursprünglichen Moduln und n^{te} Einheitswurzeln auf. Nehmen wir überdies die Gleichung hinzu, die wir für den Ausdruck:

$$\frac{\vartheta_5\left(0, 0, \frac{\tau_{11}+8\xi_1}{n}, \frac{\tau_{12}+8\xi_2}{n}, \frac{\tau_{22}+8\xi_3}{n}\right)^4}{\vartheta_5^4}$$

gefunden haben, so folgt durch Aufsuchen des gröfsten gemeinsamen Theilers mit Hülfe weniger Schlüsse, dafs die Ausdrücke:

$$\frac{\vartheta_5\left(0, 0, \frac{\tau_{11}+8\xi_1}{n}, \frac{\tau_{12}+8\xi_2}{n}, \frac{\tau_{22}+8\xi_3}{n}\right)^2}{\vartheta_5^2}$$

sich rational durch die ursprünglichen und die zu ihnen gehörenden transformierten Moduln ausdrücken.

Hieraus wieder folgt der

Lehrsatz.

Es lassen sich die Funktionen:

$$\lambda_\epsilon\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

mit Hülfe von Quadratwurzeln durch die transformierten Moduln darstellen. In den Koefficienten treten die ursprünglichen Moduln und n^{te} Einheitswurzeln auf.

Hiermit sind wir am Ziele.

Litteraturzusammenstellung.

Borchardt, C. W. Über die Darstellung der Kummerschen Fläche vierter Ordnung mit sechzehn Knotenpunkten durch die Göpelsche biquadratische Relation zwischen vier Thetafunktionen mit zwei Variabeln. Crelles Journal für die reine und angewandte Mathematik Band 83.

Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels aus vier Elementen. Mathem. Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin aus dem Jahre 1878.

Sur le choix des modules dans les intégrales hyperelliptiques. Comptes rendus des séances de l'Academie des sciences. Tome 88. Paris 1879.

Sur les transformations du second ordre des fonctions hyperelliptiques qui, appliquées deux fois de suite, produisent la duplication. Comptes rendus. Tome 88. Paris 1879.

Brioschi, F. Sur la transformation des fonctions Abéliennes. Comptes rendus. Tome 47. Paris 1858.

Sulla transformazione delle funzioni iperellittiche del primo ordine. Reale Accademia dei Lincei. Vol. I. Serie 4ª. Rendiconti 1885.

Sur quelques formules hyperelliptiques. C. R. Tome 102. Paris 1886.

Caspary, F. Zur Theorie der Thetafunktionen mit zwei Argumenten. Crelles Journal Band 94.

Cayley, A. On the double Θ-functions in connexion with a 16-nodal quartic surface. Crelles Journal Band 83.

On the 16-nodal quartic surface. Crelle 84.

A memoir on the double ϑ-functions. Crelle 85.

On the double ϑ-functions. Crelle 87.

On the addition of the double ϑ-functions. Crelle 88.

A memoir on the single und double Theta-functions. Philosophical Transactions of the royal society of London for the year 1880. Vol. 171.

Clebsch, A. und Gordan, P. Theorie der Abelschen Funktionen. Leipzig 1866.

Clebsch, A. Zur Theorie der binären Formen sechster Ordnung und zur Dreiteilung der hyperelliptischen Funktionen. Abhandlungen d. Königl. Gesellschaft d. Wissensch. zu Göttingen Band 14.

Domsch, P. Über die Darstellung der Flächen vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt durch hyperelliptische Funktionen. Greifswald 1885.

Dorn, E. Die Form und Zahl der Repräsentanten nicht äquivalenter Klassen der Transformationen der ultraelliptischen Funktionen für beliebige Transformationsgrade. Mathematische Annalen Band 7.

Forsyth, A. R. Memoir on the Theta-Functions, particularly those of two variables. Philosophical Transactions for the year 1882. Vol. 173.

Frobenius, G. Über die konstanten Faktoren der Thetareihen. Crelle 98.

Fuchs, L. Die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale als Funktionen eines Parameters aufgefasst. Crelle 71.

Göpel, A. Theoriae transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio levis. Crelle 35.

Gordan, P. Über die Transformation der Θ-Funktionen. Giessen 1863.

Gordan, P. und Clebsch, A. Theorie der Abelschen Funktionen. Leipzig 1866.

Henoch, M. De Abelianarum Functionum Periodis. Berlin 1867.

Hermite, Ch. Extraits de deux lettres de M. Charles Hermite à M. C. G. J. Jacobi. Crelle 32. Jacobi gesammelte Werke. Band II.

Sur la théorie de la transformation des fonctions Abéliennes. Comptes rendus. Tome 40. Paris 1855.

Jordan, C. Sur les sommes de Gauss à plusieurs variables. Comptes rendus. Tome 73. Paris.

Traité des substitutions et des équations algébriques. Paris 1870.

Sur les équations de la division des fonctions abéliennes. Math. Annalen 1.

Klein, F. Über hyperelliptische Sigmafunktionen. Math. Annalen 27. (Nach Fertigstellung des Manuskriptes erschienen.)

Königsberger, L. Über die Transformation der Abelschen Funktionen erster Ordnung. Crelle 64.

Über die Transformation der Abelschen Funktionen erster Ordnung. Crelle 65.

Über die Transformation dritten Grades und die zugehörigen Modulargleichungen der Abelschen Funktionen erster Ordnung. Crelle 67.

Über die Transformation des zweiten Grades für die Abelschen Funktionen erster Ordnung. Crelle 67.

Die Differentialgleichung der Perioden der hyperelliptischen Funktionen erster Ordnung. Mathem. Annalen 1.

Die Modulargleichungen der hyperelliptischen Funktionen erster Ordnung für die Transformation dritten Grades. Math. Annalen 1.

Krause, M. Über die Transformation fünften Grades der hyperelliptischen Funktionen erster Ordnung. Mathem. Annalen 16.

Über die lineare Transformation der hyperelliptischen Funktionen erster Ordnung. Math. Annalen 17.

Über die Multiplikation der hyperelliptischen Funktionen erster Ordnung. Math. Ann. 17.

Die Modulargleichungen der hyperelliptischen Funktionen erster Ordnung für die Transformation dritten Grades. Math. Annalen 19.

Über die Modulargleichungen der hyperelliptischen Funktionen erster Ordnung. Zwei Abhandl. Math. Annalen 19.

Über Multiplikatorgleichungen der hyperelliptischen Funktionen erster Ordnung. Math. Annalen 19.

Die Modulargleichungen der hyperelliptischen Funktionen erster Ordnung für die Transformation fünften Grades. Math. Annalen 19.

Sur le multiplicateur des fonctions hyperelliptiques de premier ordre. Acta mathematica III.

Krause, M. Sur la transformation des fonctions hyperelliptiques de premier ordre. Acta math. III.

Zur Transformationstheorie der hyperelliptischen Funktionen erster Ordnung. Crelle 95.

Zur Theorie der hyperelliptischen Funktionen erster Ordnung. Crelle 98.

Zur Transformation der Thetafunktionen zweier Veränderlichen. Math. Annalen 25.

Über einige Differentialgleichungen im Gebiete der Thetafunktionen zweier Veränderlichen. Zwei Abhandl. Math. Annalen 26.

Über Thetafunktionen, deren Charakteristiken gebrochene Zahlen sind. Math. Annalen 26.

Über Fouriersche Entwicklungen im Gebiete der Thetafunktionen zweier Veränderlichen. Math. Annalen 27.

Zur Division der hyperelliptischen Funktionen erster Ordnung. Festschrift Rostock 1886.

Krazer, A. Theorie der zweifach unendlichen Thetareihen auf Grund der Riemannschen Thetaformel. Leipzig 1882.

Krazer, A. und Prym, F. Über die Verallgemeinerung der Riemannschen Thetaformel. Acta math. III.

Über die Zusammensetzung ganzzahliger linearer Substitutionen von der Determinante Eins aus einer geringsten Anzahl fundamentaler Substitutionen. Annali di Matematica pura ed applicata Ser. II. Tom. XII.

Kronecker, L. Über bilineare Formen. Monatsberichte der K. p. Akad. d. Wiss. zu Berlin 1866.

Milewski, L. De Abelianarum functionum periodis per aequationes differentiales definiendis. Berlin 1876.

Pringsheim, A. Zur Transformation zweiten Grades der hyperelliptischen Funktionen erster Ordnung. Math. Annalen 9.

Prym, F. Neue Theorie der ultraelliptischen Funktionen. Zweite Ausgabe. Berlin 1885.

(Die Untersuchungen der ersten siebzehn Paragraphen wurden schon früher veröffentlicht, sie bildeten den Inhalt der im März 1863 erschienenen Inaugural-Dissertation des Verfassers: „Theoria nova functionum ultraellipticarum. Pars prior. Berolini 1863.“ Die vollständige Arbeit erschien im Jahre 1864 im 24. Bande der Denkschriften der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien.)

Kurze Ableitung der Riemannschen Thetaformel. Crelle 93.

Ein neuer Beweis für die Riemannsche Thetaformel. Acta mathematica III.

Ableitung einer allgemeinen Thetaformel. Acta mathematica III.

Prym, F. u. Krazer, A. Über die Verallgemeinerung der Riemannschen Thetaformel. Acta mathematica III.

Riemann, B. Die verschiedenen Abhandlungen von Riemann, die für die Theorie in Betracht kommen, finden sich in seinen gesammelten Werken vor. Leipzig 1876.

Rohn, K. Betrachtungen über die Kummersche Fläche und ihren Zusammenhang mit den hyperelliptischen Funktionen $p = 2$. München 1882.

Rohn, K. Transformation der hyperelliptischen Funktionen $p = 2$ und ihre Bedeutung für die Kummersche Fläche. Mathem. Annalen 15.

Rosenhain, G. Mémoire sur les fonctions de deux variables à quatre périodes qui sont les inverses des intégrales ultra-elliptiques de la première classe Mém. prés. par d. s. à l'Académie des sciences. Paris. Tome 11.

Staude, O. Geometrische Deutung der Additionstheoreme der hyperelliptischen Integrale und Funktionen 1. Ordnung im System der konfokalen Flächen 2ten Grades. Math. Annalen 22.

Über die Parameterdarstellung der Thetafunktionen zweier Veränderlichen. Math. Annalen 24.

Über die algebraischen Charakteristiken der hyperelliptischen Funktionen. Math. Annalen 25.

Thomae, J. Die allgemeine Transformation der Θ-Funktionen mit beliebig vielen Variablen. Göttingen 1864.

Beitrag zur Bestimmung von $\vartheta(0, 0, \ldots 0)$ durch die Klassenmoduln algebraischer Funktionen. Crelle 71.

Sammlung von Formeln, welche bei Anwendung der elliptischen und Rosenhainschen Funktionen gebraucht werden. Halle 1876.

Weber, H. Über die mehrfachen Gaussischen Summen. Crelle 74.

Über die unendlich vielen Formen der ϑ-Funktionen. Crelle 74.

Anwendung der Thetafunktionen zweier Veränderlichen auf die Theorie der Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit. Math. Annalen 14.

Über die Kummersche Fläche vierter Ordnung mit sechzehn Knotenpunkten und ihre Beziehung zu den Thetafunktionen von zwei Veränderlichen. Crelle 84.

Weierstraſs, K. Zur Theorie der Abelschen Funktionen. Crelle 47 u. 52.

Wiltheiſs, E. Bestimmung Abelscher Funktionen mit zwei Argumenten, bei denen komplexe Multiplikationen stattfinden. Halle 1881.

Zur Theorie der Transformation hyperelliptischer Funktionen zweier Argumente. Crelle 96.



